

डमार्गन

याचा

बीजगणित मू

यांचे मराठी म.

कारनेल जार्ज रिट्सो ज

मुंबई खात्याचे चीफ इंजनेर

B2  
155A

MP 253214

याणीं

विष्णु सुंदर छत्रे, गंगाधर शास्त्री फडके

आणि

गोविंद गंगाधर फडके

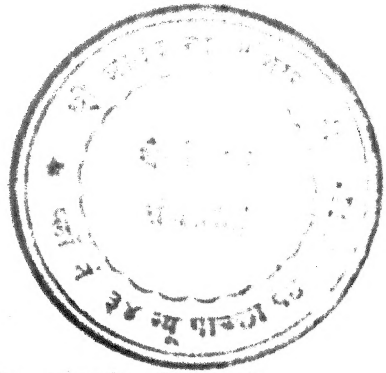
यांचा साहाय्याने केलें

दुसरी आवृत्ति.

मुकाम मुंबई माहे एप्रिल सन १८५१

मुंबईमध्ये अमेरिकन मिशन छापखान्यांत छापिलें, सन १८५१.

Add



TO

THE HONORABLE GEORGE RUSSELL CLERK, K. C. B.

GOVERNOR OF BOMBAY.

One of the most eminent of those Statesmen who have laboured in many ways, and with conspicuous success, for the mental and moral improvement of the Natives of Hindoostan; and who considers that the introduction into India of European knowledge and modern science, by translation from the languages of Europe into the languages of the East, is the true basis on which the Education of the mass of the Native population should be founded; this translation into Marathi of Professor De Morgan's pre-eminently lucid treatise on the Elements of Algebra, is, with sentiments of unfeigned admiration and regard, dedicated, by his most obedient humble servant,

GEORGE RITSO JERVIS.

*Bombay, 15th April, 1851.*



## ELEMENTS OF ALGEBRA.

"What a benefite that onely thyng is, to haue the witte whetted and sharpened, I neade not trauell to declare, sith all men confesse it to be as greate as maie be. Excepte any witlesse persone thinke he maie bee to wise. But he that moste feareth that, is leaste in daunger of it. Wherefore to conclude, I see moare menne to acknowledge the benefite of nomber, than I can espie willyng to studie, to attaine the benefites of it. Many praise it, but fewe dooe greatly practise it: onlesse it bee for the volgare practice, concerning Merchaundes trade. Wherein the desire and hope of gain, maketh many willyng to sustaine some trauell. For aide of whome, I did sette forth the firste parte of *Arithmetike*. But if thei knewe how farre this seconde parte, dooeth excell the firste parte, the would not accoumpte any tyme loste, that were imploied in it. Yea, thei would not thinke any tyme well bestowed, till thei had gotten soche habilitie by it, that it might be their aide in al other studies.—ROBERT RECORDE.

"Ce n'est point par la routine qu'on s'instruit, c'est par sa propre reflection; et il est essentiel de contracter l'habitude de se rendre raison de ce qu'on fait; cette habitude s'acquiert plus facilement qu'on ne pense; et une fois acquise, elle ne se perd plus."—CONDILLAC.

# बीजगणित

मूळपीठिका.

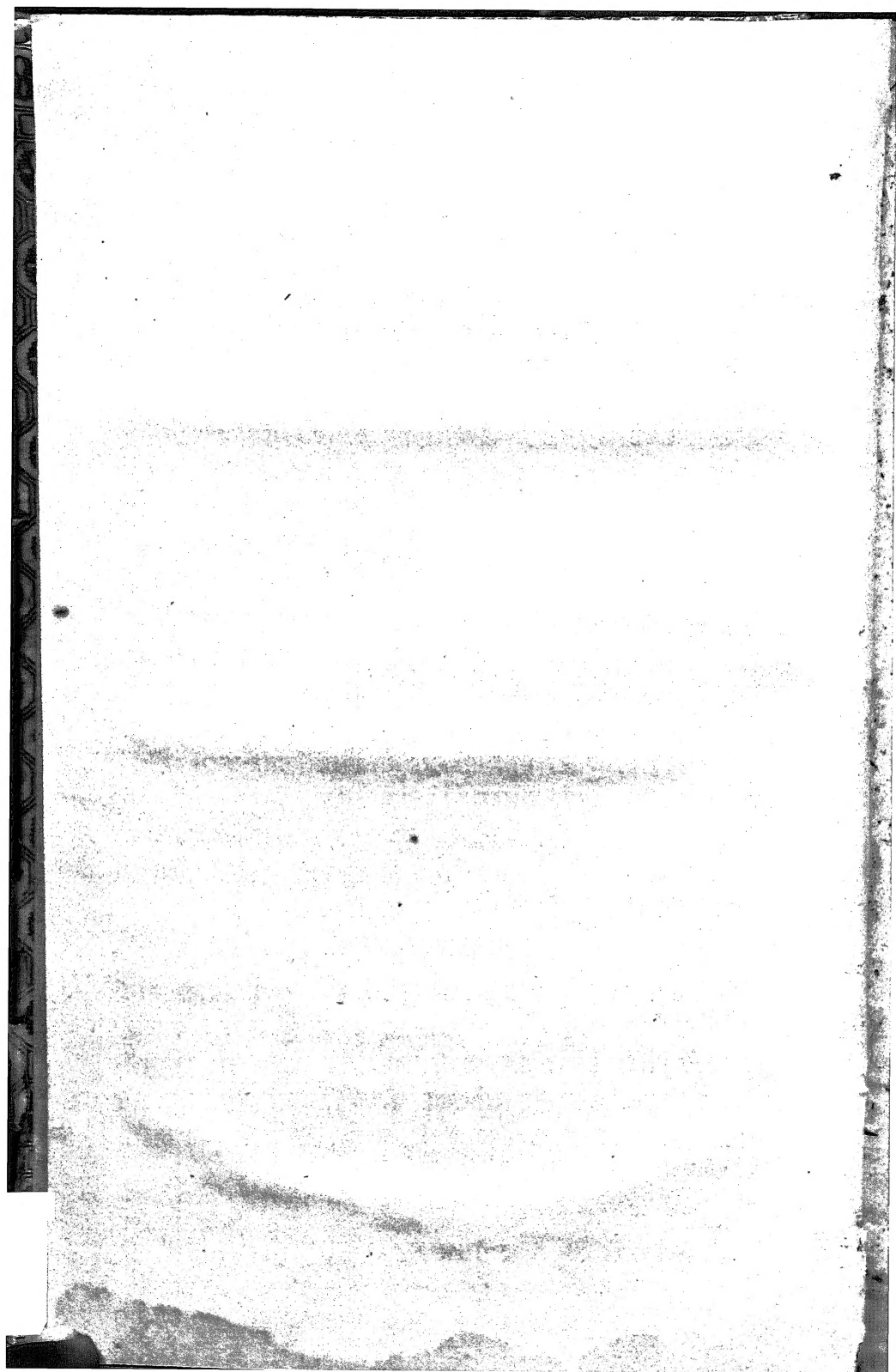


बुद्धि पाजवून तीक्ष्ण केली असतां, केवढा लाभ होईल, हें सांगत फिरण्याचें प्रयोजन नाहीं, कां कीं, तो लाभ बहुत मोठा आहे, असें सर्व लोक कबूल करितात. कोणी एकादा मूर्ख मनुष्य आपल्ये मनांत समजेल, कीं मी फार शाहाणा होईन, परंतु जो माणूस, मी अतिशाहाणा होईन, हें भय, जितकें जितकें धरितो, तितका तितका तो शाहाणपणापासून दूर रहातो. सारांश हाच, कीं गणित विद्येपासून लाभ होतो, असें पुष्कळ लोक मानितात; परंतु तो लाभ संपादायासाठीं शिकण्यास राजी, असे थोडे आढळतात. गणितविद्येस बहुत लोक बाखाणितात, परंतु व्यापार उद्दीम, असे हलके कामाचे गरजेखेरीज, या विद्येस शिकणारे थोडे. अशा कामांत लोभानें प्रवासाचे श्रम घेण्यास ही, ते राजी होतात. अशा लोकांचा उपयोगासाठीं गणिताचा पहिला भाग तयार केला. परंतु हा दुसरा भाग पहिल्या भागापेक्षां किती उत्तम आहे, हें जर ते जाणतील, तर ते याजवर जो वेळ घालविला, तो फुकट गेला, असें कधीहि मानणार नाहींत. इतकेंच केवळ नाहीं, दुसऱ्या विद्यांचा अभ्यासाविषयी उपयोगी पडे, अशी याविद्येंत निपूणता प्राप्त होईपर्यंत, आपला वेळ चांगला गेला, असेहि ते मानणार नाहीं.

ज्ञानप्राप्ती स्वकष्टानें आणि स्वविचारानें होये. दुसऱ्याचे सांगण्यावरून, केवळ पाठकरणें, हा ज्ञान प्राप्तीचा उपाय नव्हे. जें कांहीं करायचें त्याचें कारण सांगण्याची अवश्य संवय केली पाहिजे. अशी संवय करण्यास, जरी पहिल्यानें अवघड वाटतें, तथापि ती अभ्यासाने सोपी होये. आणि एकदा संवय झाली, झणजे, ती कधीं सुटत नाहीं.

मुंबई

इंश्चीसन १८५१



# अनुक्रमणिका.



प्रवेशक. . . . . पृष्ठ १

## पहिला अध्याय.

एकवर्ण समीकरणाविषयी. . . . . ५१

## दुसरा अध्याय.

अंकगणित चिन्हाहून भिन्न, अशा बीजगणित चिन्हांविषयी. . ११५

## तिसरा अध्याय.

एकापेक्षा अधिक अव्यक्त परिमाणे आहेत, अशा एकवर्णसमीक-  
रणाविषयी. . . . . १४७

## चवथा अध्याय.

घात आणि मूलप्रकाशक चिन्हे, आणि बीजानुरूप पद्धतींचा  
क्रमनियम, यांविषयी. . . . . १६९

## पांचवा अध्याय.

पहिल्या आणि दुसऱ्या वर्णांचे पद्धतींचा सामान्य सिद्धांत ; या-  
मध्ये दुसऱ्या वर्णांचे समीकरणांचे अंकगणितरूप उलमड-  
ण्याचा विचार आहे. . . . . २२७



## सहावा अध्याय.

पृष्ठ

नियत आणि अनियत परिमाणांविषयीं. . . . . २६५

## सातवा अध्याय.

बीजगणितानुरूप पद्धती आणि त्यांचीं फलें यांचे प्रतवार रचने-  
विषयीं, भागाकारांची रीति. . . . . २८९

## आठवा अध्याय.

श्रेणी आणि अनियमित गुणकांविषयीं. . . . . ३०५

## नववा अध्याय.

अंकगणितांतील बरोवरी शब्दार्थाहून भिन्न, अशा बीजगणितां-  
तील बरोवरी शब्दाचे अर्थाविषयीं. . . . . ३२४

## दहावा अध्याय.

फड्शनगणिताविषयीं. . . . . ३३५

## अकरावा अध्याय.

द्वियुक्पदसिद्धांताविषयीं. . . . . ३४०

## बारावा अध्याय.

घातप्रकाशकांची आणि लाग्रतमाची श्रेणी यांविषयीं. . . . . ३५७

## तेरावा अध्याय.

गणितकृति सोपी करण्यासाठीं लाग्रतम कामांत आणण्याचा रि-  
तीविषयीं. . . . . ३७३



# बीजगणित मूलपीठिका.

प्रवेशक.

जो कोणी बीजगणित शिकायास इच्छील, त्याला अगोधर अंक-गणिताची चांगली माहिती असावी, आणि तो खचित व्यवहारी आणि दशांशअपूर्णाकांत पक्का जाणता असावा. एवढे ज्ञान नसेल तर त्याने आरंभी ते शिकून घ्यावे हेंच बरे, कां की त्याशिवाय बीजगणित शिकण्यास दुसरा कांहीं सुगम मार्ग नाही.

अंकगणिताचीं कामें, चिन्हांनीं होतात. अंक ह्मणजे भलत्ये परिमाणाचें चिन्ह आहे; तें परिमाण कोणखे जातीचें आहे, तें तो अंक दाखवीत नाही. जर कोणी मनुष्य आपल्येपार्शीं मेढरें किती आहेत, त्यांची गणना खड्यांनीं करितो, तेव्हां ते खडे त्या मेंढांचे संख्येचें चिन्ह आहे. ही रीति फार लांब आणि श्रमाची आहे, यास्तव हल्लीं, अंकांची संख्या जाणायासाठीं, कागदावर अनेक तऱ्हेचीं चिन्हे करितात; आणि जेव्हां १ अशा चिन्हाचा अर्थाचा नेम ठरविला, तेव्हां त्यावरून दुसऱ्या प्रत्येक चिन्हाचा अर्थ ठरवितां येईल. जेव्हां लांबीविषयीं विचार करितों, तेव्हां, इच्छेप्रमाणें, भलती कांहीं लांबी घेऊन, तीस एक ह्मणतो. व्यवहारांत तो एक अनेक वस्तूंचा मार्गें विशेषणरूपानें लागतो; जसें एक हात, एक कोस; परंतु अंकगणितांमध्ये त्या एकानें गणना होती, तेव्हां तो नुसता १ आहे. आतां + या चिन्हास बहिर्वाटीत आणिलें, आणि असें मानिलें कीं जेव्हां दोन अंकांमध्ये + हें चिन्ह ठेविलें, तर असें जाणावें, कीं त्या दोन परिमाणांची बेरीज घेण्याचें चिन्ह आहे. जसें, जर

— ह्या लांबीचें चिन्ह १ आहे,  
तर — — ह्या लांबीचें चिन्ह १+१ आहे.



१+१ याचें संक्षेपचिन्ह (२) घेतों ; ह्मणजे हें चिन्ह, दोन, ही संख्या दाखवायास नवें कल्पित घेतलें आहे. तसें २+१ याचें संक्षेपचिन्ह (३) तीन घेतों; तसें ३+१ याचें संक्षेपचिन्ह (४) चार घेतों; याप्रमाणें पुढेंहि.

जेव्हां १, २, ३, इत्यादिकांचा अर्थ १कोस, २कोस, ३कोस, इत्यादि; अथवा १शेर, २शेर, ३शेर, इत्यादि असेल, तेव्हां त्या अंकांस विशेषणांक ह्मणतात. परंतु १, २, ३, इत्यादि विशेष्य वस्तूंचे अंक अशी कल्पना न केली, जसें, साहा आणि चार मिळून दहा होतात, तेव्हां त्या अंकांस केवळ अंक ह्मणतात. गणितपुस्तकांत शिकणारास केवळ अंकांची ओळख होती; विशेषणांक आणि केवळ अंक, या दोहोंमध्ये जो भेद आहे, तो खास उघडा समजत नाही. समजातीय एकंचा विशेषणांकांनीं, गणितांमध्ये, किती कृती होतात? केवळ मिळवणी आणि वजाबाकी. कोसांस कोस मिळवितां येतात, अथवा कोसांतून कोस वजा करितां येतात. गुणाकारांत १, २, ३, इत्यादि अंकांमध्ये काहीं नव्ये तऱ्हेचे ध्वनित होतें; तें असें कीं, काहीं काम वारंवार करायाचें, त्यास तेवढ्या वेळा ह्मणतात. ६ कोस ५ वेळा घे. यांत एकंचा दोन जाती आहेत; ह्मणजे एक एक १ कोसाचा दर्शक आणि दुसरा एक १ वेळेचा दर्शक, गुणाकारांत असे दोन एकमांतील, एक तरी अगळ वेळेचा दर्शक असला पाहिजे; आणि ६ कोस ३ कोसांनीं गुणावे, असें ह्मणणें हें फार अयोग्य आहे. ६ कोस ३ कोस वेळा घे यापासून काय समजेल? काहींच समजणार नाही.

परंतु या पुढील प्रश्नावर काहीं विचार कर. जर कापडाचे एक गजाला ५ रुपये पडतात, तर १२ गजांस किती पडतील? याचें उत्तर जाणणें, तर १२ गज ५ रुपयांनीं गुणितात कीं काय? नाही. कारण अशा स्तितीने गुणाकार होत नाही. या प्रश्नास उलगडून उत्तर काढण्यासाठीं, याप्रमाणें कृति केली पाहिजे; सांगितलें आहे कीं प्रत्येक गजाची किंमत ५ रुपये आहे; तर जेवढ्या वेळा कापड विकणारा एक एक गज, वारंवार मोजून देतो, तितके वेळा विकत घेणारानें, वारंवार, ५ रुपये दिले पाहिजेत; ह्मणजे तो ५ रुपये १२ वेळा देतो. यावरून मुख्यत वेळांवर आहे.

भागाकारांत अशी कल्पना आहे, कीं काहीं पुनःपुनः करायाचें



हाच, कीं ३ कोस किती वेळा पुनःपुनः घ्यावे, असे कीं १८ कोसांबरोबर होतील; परंतु जर याप्रमाणें ह्मटलें, कीं १८ कोस ३ नीं भाग, तर अर्थ हाच, १८ कोस ३ समभागांत विभागून, त्या प्रत्येक समभागांत किती कोस आहेत हें शोधायचें आहे.

१८ कोस ३ कोसांनीं भागिले असतां ६ येतात; ह्मणजे अर्थ हाच कीं १८ कोस पुरे होण्यासाठीं, ३ कोस पुनः पुनः ६ वेळा घेतले पाहिजेत.

१८ कोस भागिले ३ नीं, ह्मणजे ६ कोस येतात; अर्थ हाच कीं, जर १८ कोस ३ समभागांत विभागिले, तर प्रत्येक समभाग ६ कोसांबरोबर आहे. वरचे दोन उदाहरणांत, जर केवळ अंकांनीं कृति केली, तर दोहोंचें उत्तर एकच होतें; १८ भागिले ३, ह्मणजे ६.

दुसरा नवा एक प्रश्न करितों. १२ गजांमध्ये ८ गज किती वेळा जातात! एक वेळेपेक्षां अर्धाक आणि दोन वेळापेक्षां कमी हें उत्तर आहे, हेंहि उत्तर बरोबर पुरें नाहीं, कांकी पुनःपुनः वेळांचा भागांची कल्पना अजून बरोबर समजांत आली नाहीं. आतां मनांत आण कीं एक यंत्र आहे, जाचे अवयवांचें चलन उड्या मारीत मारीत होतें, आणि त्याचा प्रत्येक उडीत आठ गजांचें काम होतें, आणि त्याचानें एक पूर्ण उडीपेक्षां कमी उडी मारवत नाहीं, ह्मणजे उडी मारील तर बरोबर आठ गजांचीच मारील नाहीं तर कांहींच नाहीं, तेव्हां या यंत्राची एक एक उडी वेळेचा दर्शक आहे असें मानून वेळा हा शब्द एथें कामांत घेतला आहे. यापासून उघड समजतें, कीं अशा यंत्रावयवानें ८ आणि १६ गज समभागांचे उडीमध्ये, असें १२ गजांवर त्याचानें उभें राहवत नाहीं. परंतु, आतां कल्पना कर, कीं हें यंत्र एक पळांत बरोबर ८ गज चालतें. वर असें लिहिलें कीं एक एक उडी ८ गजांबरोबर आहे, तर १२ गज ह्मणजे एक उडी आणि एक अर्धी उडी होईल. तशाच रितीनें १२ गजांमध्ये ८ गज हे एक वेळा आणि अर्ध वेळा आहेत.

अंकगणितांमध्ये एक अपूर्णाक दुसरे अपूर्णाकानें भागावा असें असले, तर या पुढील उदाहरणापासून त्याचा अर्थ कळेल; उदाहरण,



$\frac{३}{३}$  यांस  $\frac{५}{३}$  याणीं भागिलें तर  $\frac{१४}{१५}$  होतात; अथवा  $\frac{३}{३}$  मध्ये  $\frac{५}{३}$  १ वे-  
ळेचा  $\frac{१४}{१५}$  जातो.

हीं पुढील उदाहरणें शिकणारानें मनांत विचार करून ठसवून घ्यावीं.

जर पूर्ण १ दिवसांत एक रुपयाचे  $\frac{५}{३}$  मिळवितो, तर एक रुपयाचे  $\frac{३}{३}$  एक दिवसाचे  $\frac{१४}{१५}$  शांत मिळवील.

जर एक या अंकाचा अर्थ फिरविला, असा कीं, जो  $\frac{५}{३}$  होता तो हल्लीं १ आहे, तर जो  $\frac{३}{३}$  होता तो हल्लीं  $\frac{१४}{१५}$  होईल.

जर अ रेघेचे  $\frac{५}{३}$ , ब रेघेचे बरोबर आहेत, तर अ रेघेचे  $\frac{३}{३}$  ब रेघेचे  $\frac{१४}{१५}$  होतील.

वर सांगितलेलीं उदाहरणें बरोबर पक्कीं समजलीं पाहिजेत, अशे जातीचीं उदाहरणें मनांत पक्की समजून ठसलीं नाहींत तों-पर्यंत बीजगणित शिकणारांस आरंभीं तें फार कठीण आहे असें वाटतें. जें वर लिहिलें ते ध्यानांत आलें नाहीं, तर निश्चयें समजावें कीं शिकणाराला अंकगणिताची पुरी माहिती नाहीं, तेव्हां त्यास या बीजगणिताचे पुस्तकापासून कसा लाभ होईल!

अंकगणिताचा अंक चिन्हांमध्ये नियमितसंबंध आहे; उदाहरण, २+२ हे नेहेमी ४ आहेत, हीं अंकचिन्हे कोस, गज, विघे, इत्यादि कोणत्याहि वस्तूंचीं असोत. बीजामध्ये अंकचिन्हस्थळीं अक्षरें घेतात, परंतु त्यांचा परस्पर नियमित संबंध नाहीं. जसें अंकगणितांमध्ये १, २, ३, इत्यादि अंकचिन्हांनीं कोणत्याहि कृतीपासून जो निश्चितार्थ निघतो तो निश्चितार्थ, अनेक विशेष, १ गज, २ गज, किंवा १ पळ २ पळ इत्यादि वस्तूविषयीं बरोबर एकसारखा आहे; तशा रितीनें बीजगणितांत अंकांचा साधारण गुणावर कल्पना करितों, आणि त्या कल्पनांपासून जो निश्चितार्थ उत्पन्न होतो, तो सर्व अंकांवर बरोबर सारखाच लागू पडतो. हें बीजगणिताचें मोठें एक अंग आहे, आणि शिकणाराला या अंगानें बीजगणित येण्याची योग्यता येईल.

परंतु ही व्याख्या थोड्या शब्दांनीं सांगितली, ही जो थोडें बहुत बीजगणित शिकलेला असेल, त्यास मात्र समजेल. जो मनुष्य कोण-तीहि विद्या शिकायास इच्छितो, त्यास जर त्या विद्येविषयीं काहींच मा-हीत नाहीं, तर त्यास त्या विद्येची व्याख्या थोड्या शब्दांनीं समजावि-

(८) एकं घे, आणि असा अपूर्णांक घे कीं त्यास (८) वेळा घेतला तर पूर्ण एक एकं होईल, ह्मणजे तो एकंचा (८) वा भाग असावा. आतां त्या दोहोंस प्रत्येकीं १ मिळीव; तर ८+१ ह्मणजे ९ होतील आणि  $\frac{1}{8}+1$  ह्मणजे  $1\frac{1}{8}$  आहे. पाहा, प्रथम अंक ह्मणजे ९, यामध्ये दुसरा अंक ह्मणजे  $1\frac{1}{8}$ , हा बरोबर (८) वेळा जातो. एकंचे ( $\frac{2}{3}$ ) घे, आणि असा अपूर्णांक घे कीं, एक वेळेचे ( $\frac{2}{3}$ ) घेतले असतां पूर्ण १ एकं होईल; तर एथें तो अपूर्णांक  $1\frac{1}{3}$  होईल. आतां त्या दोहोंस प्रत्येकीं एक मिळीव, तर  $1\frac{2}{3}$  आणि  $2\frac{1}{3}$  होतील. यांतील प्रथम अंकांत ह्मणजे  $1\frac{2}{3}$  शांत, दुसरा अंक ह्मणजे  $2\frac{1}{3}$ , हा बरोबर ( $\frac{2}{3}$ ) वेळा जाईल. हीं पुढील उदाहरणें तपासून पाहा, त्यांमध्ये इच्छेप्रमाणें भलते कांहीं पूर्णांक किंवा अपूर्णांक घालावे.

( ) एकं घे आणि असा पूर्णांक किंवा अपूर्णांक घे कीं, जो वारं-वार ( ) वेळा घेतला तर, पूर्ण एक एकं होईल. नंतर त्या दोहोंस १ मिळीव; तेव्हां प्रथमाचे बेरीजेंत दुसऱ्याची बेरीज ( ) वेळा किंवा वेळेचा भाग जाईल.

हीं पुढील उदाहरणें तपासून पाहा,

( )	पूर्ण किंवा अपूर्णांक, जो वारंवार ( ) वेळा घेतला तर पूर्ण एकं होतो.	पहिल्या अंकास एक मि- ळविला.	दुसऱ्या अंकास १ मिळ- विला.	( ) वेळा तिसऱ्या कोष्टकांतील अंकांत चवथ्या कोष्टकांतील अंक जातो.
७	$\frac{1}{7}$	८	$1\frac{1}{8}$	७
$\frac{1}{3}$	३	$1\frac{1}{3}$	४	$\frac{1}{3}$
$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$3\frac{1}{8}$	$1\frac{4}{8}$	$2\frac{1}{8}$
$\frac{1}{20}$	२०	$1\frac{1}{20}$	२१	$\frac{1}{20}$
१	१	२	२	१

या कोष्टकांत १ भागिला प्रथम आसनांतील पूर्ण किंवा अपूर्णांकानें, इतक्याबरोबर दुसऱ्या आसनांतील पूर्ण किंवा अपूर्णांक आहे; अथवा एकांत पहिल्या आसनांतील अंक किती वेळा जातो तो वेळांक दुसऱ्या आसनांतील अंक दाखवितो, असा संबंध या दोन आसनांत आहे. उदाहरण, जर प्रथम आसनांतील संख्येस

अंक ह्मणतात,

तर दुसरे आसनांतील संख्या, १ भागिली अंकानें इतकी आहे.

आणि प्रथम आणि पांचव्या आसनांतील अंकांचें ऐक्य जें ध्यानांत येतें, तें या पुढील रितीप्रमाणें सांगतां येईल;

अंकास १ मिळवून त्या बेरिजेस, अंक जितके वेळा १ मध्ये जातो त्यांत १ मिळवून त्या बेरिजेनें भागिलें, तर तो भागाकार अंकच होईल.

वर सांगितलेली गोष्ट सोईकरितां अधिक संक्षेपानें सांगतां येती, अंक ह्मणता तर भलता काहीं अंक घेतां येतो, आणि इच्छेप्रमाणें त्या अंकाचे जागीं भलतें काहीं चिन्ह घेतां येतें, तर त्या चिन्हाविषयीं मूळाक्षरांतून भलतें काहीं अक्षर घे, मनांत आण, कीं त्या अंकाचें चिन्ह एथें अ, घे. वर सांगितल्याप्रमाणें + हें चिन्ह मिळवणीचें आहे असें जाण, आणि एक अंक दुसऱ्या अंकास भागायास, जसें अंकगणितामध्ये लिहितात, तसें लिहावें, ह्मणजे भाज्य वर आणि भाजक खाली आणि यांचामध्ये रेघ. आणि = या चिन्हांनें असें समजावें कीं जो अंक त्याचे पुढें आहे, तो त्याचे दुसरे बाजूचे मागव्ये अंकाबरोबर आहे. तेव्हां वर सर्व अंकांचा सामान्य गुण जो सिद्ध करून दाखविला तो याप्रमाणें अक्षरचिन्हांनीं दाखवितो येतो;

$$\frac{अ+१}{अ+१} = अ$$

आतां या विद्येचा प्रथम भागाची व्याख्या सांगायामें आरंभ करितों, १ व्याख्या. या विद्येविषयीं, हिंदुलोकांमध्ये, सर्वापेक्षां प्राचीन पुस्तक, जें हल्लीं सांपडतें, तें संस्कृत भाषेत, भास्कराचार्य या नाम्ने पुरुषानें केले, यास बीजगणित ह्मणतात. त्याचा काळ सुमारे इ.स. ११५० आहे.

२ व्या०. अंकास अक्षरानें दाखवितां येतें, आणि पुढें समजांत येईल कीं तो, इच्छेप्रमाणें, भलता कांहीं सामान्य अंक असेल; किंवा तो कांहीं अव्यक्तविशेष अंक असेल, त्याचे जागीं, व्यक्त अंक होईपावेतो, अक्षरचिन्हांने तो दाखविला जातो; अथवा तो कांहीं व्यक्त पूर्ण किंवा अपूर्णांक असेल, जाचें वारंवार काम पडतें, याजकरितां कांहीं संक्षेप अक्षरचिन्हांनीं लिहायास जोईस पडतें. ह्मणजे ' ' या चिन्हास पि, आणि ' ' या चिन्हास इ, हीं दोन अक्षरें इंग्लिश भाषेंतून दोन विशेष निश्चितार्थ स्थळीं लिहितात, ते निश्चितार्थ पुरे दाखवायास अशक्य, परंतु सुमारानें २.१.४१५९२७ आणि २.७१८२८१८ यांचे जवळ जवळ आहेत.

३ व्या०. जीं अक्षरें कामांत आणितात तीं वाळबोध लिपीचीं मूळ अक्षरें आहेत, इंग्रजी भाषेंत इटालिक् लहान अक्षरें घेतात, आणि तीं कळायासाठीं एथें लिहून दाखवितों.

### मूळ अक्षरें.

इंग्रजी	उच्चार	वाळबोध	इंग्रजी	उच्चार	वाळबोध		
A	a	ए	अ	N	n	एन	न
B	b	बी	ब	O	o	ओ	ओ
C	c	सी	क	P	p	पी	प
D	d	डी	ड	Q	q	क्यु	क
E	e	ई	ई	R	r	आर	र
F	f	एफ	फ	S	s	एस	स
G	g	जी	ग	T	t	टी	ट
H	h	एच	ह	U	u	यु	यु
I	i	ऐ	ऐ	V	v	वि	व
J	j	जे	ज	W	w	डब्ल्यु	व
K	k	के	के	X	x	एक्स	क्ष
L	l	एल	ल	Y	y	वै	य
M	m	एम	म	Z	z	जेड	ज

४ व्या०. पूर्णांक आणि अपूर्णांक यांस सर्वदा अंक ह्मणतात. व्यवहारी बोलण्यांत  $२\frac{१}{२}$  यांस अंक ह्मणत नाही, परंतु बीजगणितांत त्यांस अंक ह्मणतात; जर  $२\frac{१}{२}$  आणि २, ३, ४, इत्यादि या दोहोंमध्ये फेर काय तो दाखवायाचें प्रयोजन असेल, तर प्रथम  $२\frac{१}{२}$  यांस अपूर्णांक ह्मणतात, व दुसरे २, ३, ४, यांस पूर्णांक ह्मणतात.

बहुधा ० या चिन्हास अंक ह्मणतात, त्याचा अर्थ शून्य आहे, ह्मणजे ते काहीं महत्त्व किंवा परिमाणाचा अभाव सुचविते. जसे, अ, यांतून ब वजा केला तर काय राहील? आणि असे विचारिलें असतां कळतें, कीं अ आणि ब एकेच अंकाचे ठिकाणीं घेतले आहेत, तर, उत्तर हेंच आहे, कीं काहीं अंक बाकी राहत नाही, ह्मणजे शून्य राहतें. असे जातीचे प्रश्नावरून जेव्हां काहीं राहिलें नाही असे ह्मणतात, तेव्हां प्रश्नाचे उत्तरासाठीं ० असे चिन्ह लिहितात, ह्मणून शून्य अंकाप्रमाणें रूप धरितें.

५ व्या०. हें पुढील चिन्ह + अधिकाचा अर्थ दाखवितें, आणि जेव्हां दोन अंकांचे किंवा अक्षरांचे मध्ये हें चिन्ह लिहिलें असतें, तेव्हां दुसरी रकम पहिल्या रकमेशीं मिळवायाची आहे असे दाखवितें. जसे, अ + ब यास अ अधिक व ह्मणतात, याचा अर्थ हाच, कीं अ या अक्षराचे जे अंक असतील, ते ब अक्षराचे अंकांशीं मिळवायाचे आहेत.

नुसता + अ, त्याचा अर्थ केवळ अ शून्याशीं मिळवावा अथवा ० + अ असा होतो.

६ व्या०.— या चिन्हास उणें ह्मणतात, त्याचा अर्थ कमी करणें, ह्मणजे दुसरा अंक पहिल्या अंकांतून वजा करायाचा आहे असा होतो. जसे, अ - ब यास अ उणा व ह्मणतात, ह्मणजे अ, बनें कमी करायाचा अथवा अ यांतून ब वजा करायाचा आहे.

जेव्हां अ, ब पेक्षां उणा आहे, तेव्हां हें वरचें उदाहरण अशक्य आहे, कां कीं जी अशी कृति होऊं सकत नाही ती करायास तें सांगतें. जसे, ३ - ६ ही कृति अशक्य आहे. असे जातीचे उत्तराचा अर्थ काय आहे तो कल्पनेनें पुढें शोधला जाईल, अशी कृति अशक्य आहे ह्मणून, त्याचा अशक्यपणा कसकसे जातीचे अयुक्तीनें होतो, हेहि पुढें शोधून कळेल.

७ व्या०. हें पुढील चिन्ह x गुणाकार दाखवितें, त्याचा अर्थ

असा आहे कीं प्रथम अंकामध्ये जितके एक किंवा एकचे भाग असतील, तेवढे वेळा किंवा वेळांचा भाग दुसरा अंक घेण्याचा आहे. जसे,  $अ \times ब$  यास अ गुणिला ब असें ह्मणतात. आणि अ वेळा ब घ्यावा असें हे चिन्ह सूचविते. जसे,  $१\frac{१}{२} \times ६$  ह्मणजे ६ हे एक वेळा आणि एक अर्धी वेळा ह्मणजे ९ घ्यावयाचे आहेत. अब ही पद्धती अ आणि ब यांचा गुणाकार दाखविती; आणि या दोन अक्षरांस गुणाकाराचे गुण्यगुणक ह्मणतात, आणि तीं अक्षरेहि परस्पर गुणक आहेत.  $० \times अ$  आणि  $अ \times ०$  हीं दोन्ही ० असलीं पाहिजेत; कां कीं अ कांहीं वेळा अथवा वेळांचा भागहि न घेतला, तर कांहींच परिमाण होत नाही, आणि ०, कितीहि वेळा वारंवार घेतलें, तर कांहींच फळ उत्पन्न होत नाही. नवे शिकणारे वरचे या गोष्टीविषयीं नेहेमी चुकतात, यास्तव, त्यांचे स्मरणांत या गोष्टीचा निश्चितार्थ ठसायासाठी, हीं दोन पुढील कृत्ये उदाहरणासाठीं सांगतो. त्यांचें उत्तर स्पष्ट उघड आहे, आणि तीं उत्तरे बीजगणितरूपानें दाखवितां येतील.

कितीएक पेढ्या आहेत, त्या प्रत्येक पेढींत कांहींच भरलें नाही, तर सर्वांत किती भरलें असेल ?

जर अ, हें अक्षर पेढ्यांची संख्या दाखविते, तर ० वारंवार अ वेळा घेतलें, अथवा  $अ \times ०$ , तर केवळ शून्य होतें.

एक पेढी आहे, ती सोन्यानें भरलेली आहे, परंतु त्यांत अला कांहीं भाग नाही; तर त्यांत अचें काय आहे ?

जर, प, हें अक्षर पेढ्यांत जितके सोन्याचे शेर आहेत, ते दाखविते, तर अचा भाग  $० \times प$ , ह्मणजे ० आहे; ह्मणजे कांहींच नाही.

नवे शिकणारे अशी चूक करितात याचें कारण असें आहे, कीं गुणिला नाही, ह्मणजे कांहीं उणा केला नाही, किंवा त्याचें रूप अगदीं बदललें नाही, असें मनांत आणून चूक करितात; परंतु अपूर्णाक गणितांमध्ये आणि बीजगणितांमध्ये गुणाकार झटला, तर हाच अर्थ धरिला पाहिजे, कीं अमुक वेळा किंवा वेळांचा भाग वारंवार घ्यावयाचा आहे. जर कोणताहि अंक अगदींच गुणिलेला नसला, तर कांहींच अंक उत्पन्न होत नाही, कां कीं त्याचा कांहींच भाग घेतला नाही; रूप बदल न होतां जो अंक तसाच रहातो, तो अंक गुणिला



जेव्हां केवळ अक्षरें, किंवा अंकसुद्धां अक्षरें कामांत आणितात, तेव्हां (x) हें गुणाकार चिन्ह टाकितात. जसें अब, ह्यणजे अ वेळा व घेतला असा अर्थ आहे; ३अ याचाहि अर्थ हाच, कीं अ तीन वेळा घेतला आहे. जेव्हां दोन अंक कामांत घेतले असतात तेव्हां मात्र त्यांचामध्ये x हें चिन्ह लिहिलें पाहिजे. जसें, ३x६ हे गुणाकार चिन्हावांचून जवळ जवळ ३६ याप्रमाणें लिहितां येत नाहींत, कां कीं तो अंक ६+६+६ होत नाहीं, परंतु अंकगणित रितीनें ३ गुणिले १० अधिक ६ याप्रमाणें असावा. बहुतकरून अंकांमध्ये x हें चिन्ह सोडून, केवळ त्याचेजागीं बिंदु करून ३.६ याप्रमाणें लिहितात; परंतु यापासून शिकणारांस काहीं भ्रम होईल, कीं या रूपाचा अर्थ  $३ + \frac{६}{१०}$  असा आहे ह्यणून, दशांशाचे चिन्हाचा बिंदु नेहमी संभाळून त्याणें वर लिहावा. जसें, ३.६.

८ व्या०. अपूर्णाकांतील अंश आणि छेद यांमध्ये जी रेघ लिहितात, ती भागाकार दाखविती. जसें,  $\frac{अ}{ब}$  यास अ भागिला ब असें ह्यणतात आणि अमध्ये ब किती वेळा किंवा वेळेचा भाग जातो असा त्याचा अर्थ आहे. जसें,  $\frac{३}{२}$  अथवा ३ भागिले २ ह्यणजे  $१\frac{१}{२}$  आहे. अर्थ हाच कीं ३ यामध्ये २ एक वेळा, आणि एक अर्धी वेळा जातात. अर्धा ह्यणजे  $\frac{१}{२}$ , या रूपानें लिहिण्यास योग्य, कां कीं एकामध्ये जितके वेळा दोन जातात, तो एका वेळेचा अर्धा भाग आहे. कदाचित् अःब याप्रमाणें लिहितात.

$\frac{अ}{ब}$  यापासून बहुतकरून नवे शिकणारे असें मनांत घेतात कीं, याचें उत्तर अच आहे; परंतु त्यांत काहींच अर्थ नाहीं. साहज्यामध्ये शून्य किती वेळा जातें! उत्तर हेंच कीं असें प्रश्न अयुक्त आहेत. अ आणि  $\frac{अ}{ब}$  हे एकच आहेत. कां कीं अ याचा अर्थ भलते एकची संख्या, अथवा एकचें भाग आहेत; तर, अ यामध्ये १ हा किती वेळा किंवा वेळेचा भाग जातो असें विचारिलें तर, उत्तर हेंच कीं नुस्ता अ आहे.

९ व्या०. हीं पुढील सांगितलेलीं उदाहरणें, अ अक्षराचा वेगळाल्या पद्धती आहेत; त्या पद्धती शिकणारानें घोकून त्यांशीं पक्कें माहित व्हावें;

१०. व्या० बरोबरी आणि तर किंवा यामुळे यांचीं संक्षेप चिन्हे पुढीलप्रमाणे लिहितात. अ=ब यांत अर्थ हाच, कीं अ आणि ब जा अंकस्थळीं घेतले, ते दोन अंक बरोबर आहेत; आणि अ बरोबर ब याप्रमाणे ह्मणतात; तर किंवा यामुळे यांचे संक्षेप चिन्ह  $\therefore$  हें आहे. जसें, अ=ब आणि ब=क;  $\therefore$  अ=क, आणि यास, अ बरोबर ब आणि ब बरोबर क, यामुळे अ बरोबर क याप्रमाणे ह्मणतात.

११ व्या०. बीजगणितांतील चिन्हाचा प्रत्येक समुदायास पद्धती ह्मणतात, आणि जेव्हां दोन पद्धती, = या चिन्हांने जोडिल्या असतात, तेव्हां त्या सर्वांस समीकरण ह्मणतात.

एकरूप समीकरण तेंच आहे, कीं जाचा दोन बाजू बरोबर आहेत; त्या समीकरणांतील अक्षर भलत्ये कोणत्याहि अंकाचे स्थळीं लिहिले आहे अशी कल्पना करितां येईल; जसें, ६ व्या पृष्ठावरील समीकरणांत,

$$\frac{अ+१}{१} = अ$$

यांत अ कोणत्याहि किमतीचा असला, तरी हें समीकरण खोटें होत नाहीं; अथवा अची कशाहि किमत कल्पिली तथापि त्या किमतीविषयीं हें समीकरण खरेंच आहे.

हीं पुढील सांगितलेली समीकरणांची उदाहरणे एकरूप आहेत, असें स्पष्ट दिसते.

$$अ+ब = ब+अ$$

$$अ+१+१ = अ+३-१$$

$$अ+अ = २अ$$

$$अ+अ+अ = ३अ$$

$$\frac{१}{२}अ + \frac{१}{२}अ = अ$$

$$\frac{१}{३}अ + \frac{१}{३}अ + \frac{१}{३}अ = अ$$

$$२अ+३अ-अ+४अ = ८अ+६अ+५अ-११अ$$

हीं पुढील उदाहरणें एकरूप आहेत, असें पहिल्यानें दिसण्यांत येत नाहीं; परंतु शोधिलीं असतां, प्रत्येक स्थितींत तीं बरोबर खरीं आहेत.

$$\frac{१}{१+अ} + \frac{१}{१+२अ} = \frac{२+३अ}{१+३अ+२अअ}$$

$$अ - \frac{अ}{१+अ} = \frac{अअ}{१+अ}$$

संकेत समीकरण तेंच आहे, कीं जें अक्षरांचे प्रत्येक किमतीनें खरें होत नाहीं, परंतु तें कित्येक नियमित किमतीनें मात्र खरें असतें.

जसें,  $ब+१=७$  आणि  $अ-३=१२$ ,

हीं दोन उदाहरणें ब बरोबर ६ आणि अ बरोबर १५ अशा संकेतावांचून खरीं होणार नाहींत.

पुनः  $अ=ब+क$  हे समीकरण अ, ब, आणि क, यांचे प्रत्येक किमतीविषयीं खरें होत नाहीं, परंतु असा संकेत असला पाहिजे कीं, अ हा ब आणि क यांचे बेरिजेबरोबर असावा. समीकरणांत जेव्हां अक्षरस्थलीं अंक लिहितात, आणि तें समीकरण खरें होतें, तेव्हां असें झणतात कीं तो अंक त्या समीकरणास स्थापितो; जसें,  $अ-३=१२$ , हे समीकरण अ बरोबर १५, या अंकानें मात्र स्थापिलें जातें.

१२ व्या०. जेव्हां बीजांतल्या पद्धती एक किंवा अनेक कुंडलींत\* मांडिलेल्या असतात, तेव्हां त्यांचा अर्थ हाच, कीं त्या कुंडलींतील अनेक पदे, बाजूचे पदांशीं केवळ एक अक्षरासारखा संबंध ठेवितात. जसें,

अ-(ब-क)

याचा अर्थ हा कीं, अ यांतून नुसता ब किंवा नुसता क उणा करायाचा नाहीं, परंतु ब-क वजा करायाचा, झणजे ब यांतून क उणा करून जी बाकी राहिल, ती अ यांतून वजा करायाची आहे. झणून अ-ब-क असें नाहीं.

उदाहरण. जेव्हां  $अ=२०$ ,  $ब=१२$ ,  $क=१०$ ,  $ड=३$ , तेव्हां अ-(ब-{क-ड}) या पद्धतीपासून उत्तर काय निघेल? एथें या उदाहरणांत क-ड, हे  $१०-३$  झणजे ७ आहेत; ब-(क-ड) हे  $१२-७$ ,

\* ( ) या चिन्हास कुंडली झणतात.

ह्रणजे ५ आहेत; तर अ-(व-{क-ड}) हे २०-५, ह्रणजे १५ आहेत.

आणि, (अ+व)(क+ड) याचा अर्थ हाच, कीं क+ड ही पद्धती अ+व वेळा घेण्याची आहे, आणि प(क+र) याचा अर्थ हाच, कीं प वेळा क+र, घेण्याचा आहे.

या वरचा व्याख्या बीजगणित लिहिण्याचा पहिल्या परिपाटी आहेत. पुढें शिकतांना दुसऱ्या परिपाटी आढळतील. आतां बीजांतील मिळवणी, वजाबाकी, गुणाकार, भागाकार, या चार प्रथम कृत्यांतील काहीं उघडे विशेष गुण सांगतो.

१. अंक किंवा अक्षरचिन्हें, कोणत्याहि क्रमानें मांडून मिळविलीं असतां, त्यांचे बेरिजेंत अंतर पडत नाही. या पुढील पद्धती एकच आहेत असें उघड दिसतें;

$$१ + २ + ३$$

$$१ + ३ + २$$

$$२ + ३ + १$$

$$३ + २ + १$$

$$३ + १ + २$$

$$२ + १ + ३$$

याचप्रमाणें अक्षरचिन्हांनीं अ+व+क+ड=व+क+ड+अ=व+अ+ड+क, इत्यादि, होतें.

२. लहानांतून मोठें पद वजा करणें, असा प्रसंग आणव्याशिवाय, मेळवणी आणि वजाबाकीचीं पदे, इच्छेप्रमाणें स्थळभेदेंकरून मांडितां येतात. जसें, कोणी मनुष्य २० रुपये हारेल आणि ५० रुपये जिंकेल, तर आरंभीं ५० रुपये जिंकला आणि त्यांतून २० रुपये हारला, इतकेच रुपये त्याचे जवळ राहतील; परंतु त्याचे जवळ २० रुपयांपेक्षा उणे असते तर, त्याच्यानें ५० रुपये जिंकवते, परंतु २० रुपये हारववतेना. जसें, १०-२०+५० हें अशक्य; परंतु १०+५०-२० हें शक्य आहे. याचप्रमाणें ८-६+१०-११ या पुढील रूपानें मांडितां येतात;

$$८-६+१०-११$$

$$८+१०-११-६$$

$$१०+८-११-६$$

$$८+१०-६-११$$

$$१०+८-६-११$$

$$१०-६+८-११;$$

परंतु या पुढील रूपानें मांडवत नाही;

$$१०-११+८-६ \quad -११+८+१०-६ \text{ इत्या०}$$

$$१०-११-६+८ \quad -६-११+८+१० \text{ इत्या०}$$

प्रश्न. अ-ब+क-ड हे संभवण्यासाठी कोणत्या प्रकारचे संकेत केले पाहिजेत? उत्तर, ब पेक्षा अ अधिक असावा, किंवा ब पेक्षा उणा तरी नसावा, आणि अ-ब+क हे ड पेक्षा उणे नसावे. या गोष्टीविषयी पुढे विचार होईल.

३. गुणाकार आणि भागाकार कोणत्याही क्रमाने करिता येतात. ह्मणजे, अवक ही पद्धती हे सुचविती कीं, ब वेळा क घेण्याचा आहे; आणि यांचा गुणाकार होतो तो अ वेळा घेण्याचा आहे; अंकगणितांतील रितीपासून कळते, कीं अ, ब, क, यांचा गुणाकार, ब अक यांचे बरोबरच आहे; ह्मणजे, क, अ वेळा घेतला, आणि त्यांचा गुणाकार ब वेळा घेतला, ते अंक पूर्ण किंवा अपूर्ण असोत. शिकणाराने बीजाचा आरंभ केल्याचे पूर्वी, या सर्व जातीचा अंकगणित रिती शिकून सिद्ध केलेल्या आहेत, असे मानिले आहे.

अंकगणितांत हेहि दाखविले आहे कीं, भागाकार आणि गुणाकार यांचा कृतींचा क्रम फिरविता येतो; ह्मणजे, अ भागिला ब आणि त्यांचा भागाकार गुणिला कने, अशी सांगितलेली पद्धती या पुढील पद्धती प्रमाणेच आहे, ह्मणजे अ गुणिला क आणि त्यांचा गुणाकार भागिला बने, अथवा

$$क \times \frac{अ}{ब} = \frac{कअ}{ब}$$

सारांश, वर २ व्या आणि ३ व्या दृष्टावर गुणाकार ह्मणजे वेळा किंवा वेळेचा भाग घेण्याचे सांगितले आहे, त्याचा अर्थ वाढवून पाहतां, प्रत्येक गुणाकार भागाकार आहे, आणि प्रत्येक भागाकार गुणाकार आहे. जसे, ६ यांचीं अ भागणे ह्मणजे अचा साहावा भाग घेणे आहे, अथवा एक वेळेचा एक षष्ठांश वेळा अ घ्यावा, अथवा अ यास  $\frac{१}{६}$  याणे गुणायचा आहे. याचसारखे, अ यास  $\frac{१}{६}$  याणे भागणे ह्मणजे १ एकाचे किती चतुर्थांश अमध्ये जातात असे विचारणे; त्यास उत्तर हेच, कीं अमध्ये जितके एक आहेत, तितके वेळांचा चौपट वेळा, ह्मणजे अ यास चौहोनी गुणावे.

पुनः १० यांस  $\frac{३}{२}$  यांणीं भागावें, ह्मणजे १० गुणिले  $\frac{३}{२}$  आहे. १० यांस  $\frac{३}{२}$  यांणीं भागावें ह्मणजे एक एकचे  $\frac{३}{२}$  श १० मध्ये किती वेळा जातात हें शोधून काढावयाचें आहे. आतां  $\frac{३}{२}$  आणि  $\frac{१}{३}$  मिळून १ एकं होतो आणि  $\frac{१}{३}$  हा  $\frac{३}{२}$  चे अर्धा आहे; ह्मणून पूर्ण १ एकंमध्ये  $\frac{३}{२}$  हे एक वेळा आणि एक अर्धा वेळा जातात. यामुळे, १० मध्ये  $\frac{३}{२}$  हे १० वेळा आणि १० अर्धे वेळा जातात, अथवा १५ वेळा. ह्मणजे १० यांस  $\frac{३}{२}$  यांणीं भागिलें तर १० हे एक वेळा आणि एक अर्ध वेळा घेतल्याप्रमाणें आहेत, अथवा १० गुणिले  $\frac{११}{२}$ , ह्मणजे गुणिले  $\frac{३}{२}$  नीं.

याचसारिखें, १० हे  $\frac{७}{२}$  यांणीं भागणें, ह्मणजे १० यांस  $\frac{७}{२}$  यांणीं गुणणें हीं दोनीं बरोबर आहेत. अशा प्रश्नांत विचार हाच आहे कीं १० मध्ये ७ एकंचे अर्धे किती वेळा जातालं? तर जितके वेळा त्यांत ७ एकं जातात, त्यांचे दुप्पट वेळा; ह्मणजे १ वेळेचे  $\frac{१०}{७}$  याचे दुप्पट अथवा एक वेळेचे  $\frac{२०}{७}$ . परंतु  $\frac{२०}{७}$  हे १० यांचे  $\frac{२}{७}$  आहेत, अथवा १० चा एक वेळेचे  $\frac{२}{७}$  घेतले.

शिकणारानें या पुढील पद्धतीप्रमाणें वेगवेगळीं अनेक जातीचीं उदाहरणें कल्पून लावण्याचा अभ्यास केला पाहिजे.

$$\begin{aligned} \text{अ गुणिला } \frac{प}{क} \text{ ह्मणजे अ भागिला } \frac{क}{प} \\ \text{अ भागिला } \frac{प}{क} \text{ ह्मणजे अ गुणिला } \frac{क}{प} \\ \text{अथवा } \frac{प}{क} \times \text{अ} = \frac{अ}{क} \text{ आणि } \frac{अ}{प} = \frac{क}{प} \times \text{अ} \end{aligned}$$

बीजगणितांतल्या पद्धतीस अंकरूप देणें, आणि वेगवेगळ्या अक्षरांची वेगवेगळी किंमत समजणें, अशा जातीचा कृतीचा शिकणारानें प्रथमतः अभ्यास केला पाहिजे. जसें याप्रमाणें,

जेव्हां  $अ = \frac{१}{२}$  आणि  $ब = \frac{३}{५}$  तर  $\frac{अ+ब}{अ-ब}$  याची काय किंमत आहे.

$$अ+ब = \frac{१}{२} + \frac{३}{५} = \frac{९}{१०} \quad अ-ब = \frac{१}{२} - \frac{३}{५} = \frac{१}{१०}$$

$$\therefore \frac{अ+ब}{अ-ब} = \frac{\frac{९}{१०}}{\frac{१}{१०}} = ९$$

जेव्हा  $a = 1\frac{1}{2}$  तर  $\frac{1+a}{1+a} = \frac{a+a}{2+\frac{1}{2}a}$  असे समीकरण खरे आहे की नाही?

$$\begin{aligned} a+a &= \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{4} & 1+a &= 1\frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ 1+a &= 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} & (1+a) \div (1+a) &= \frac{9/4}{5/2} = \frac{9}{10} \\ a+a &= \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{27}{8} & \frac{1}{2}a &= \frac{3}{4} & 2+\frac{1}{2}a &= \frac{9}{4} \\ a+a \div (2+\frac{1}{2}a) &= \frac{27/8}{9/4} = \frac{27}{18} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

परंतु सांगितले उदाहरणाची पहिली रकम  $(1+a) \div (1+a) = \frac{9}{10}$  यामुळे वरचे समीकरण खरे नाही.

जेव्हा  $a=8$  आणि  $b=3$ , तेव्हा  $a+b(a+b)$  याची किंमत काय आहे?

$$\begin{aligned} a+b &= 8+3 = 11 & b(a+b) &= 3 \times 11 = 33, a+b &= 11 \\ \text{तर } a+b(a+b) &= 11+33 = 44 \end{aligned}$$

परंतु जी समीकरणे एकरूप आहेत, असे खचित सांगतात, त्यांचा खरेपणा काढायाचे कृत्वांचा अभ्यास बोध होण्यास फार उपयोगी आहे.

$a = 8$  आणि  $b = 2$  असे असले तर

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{a+a+b+b}{a+b+b-a} \text{ हे खरे आहे की नाही?}$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{10-8}{8-2} = (1), a+a = 16, b+b = 4.$$

$$\text{तर } \frac{a+a+b+b}{a+b+b-a} = \frac{16+4}{16+4-8} = \frac{20}{12} = (1\frac{2}{3}) \text{ तर हे समीकरण खरे आहे.}$$

आता  $a = \frac{2}{3}$  आणि  $b = \frac{1}{2}$  असे असले, तर वरचे समीकरण खरे आहे की नाही?

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{4}{6}-\frac{3}{6}}{\frac{4}{6}-\frac{3}{6}} = (1)$$

$$\frac{a+a+b+b}{a+b+b-a} = \frac{\frac{4}{3}+\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{8}{6}+\frac{3}{6}}{\frac{4}{6}+\frac{3}{6}-\frac{2}{6}} = \frac{11}{5} = (2\frac{1}{5}) \text{ यावरून हे समीक-}$$

रण खचित खरे आहे.



या पुढील एकरूप समीकरणाचा उदाहरणक्रमाची सत्यता शिक-  
गारानें ताडून पहावी; ती अशी, कीं पहिल्यानें, अक्षरांस पूर्णांकाचें  
रूप द्यावें, नंतर दुसऱ्यानें अपूर्णांकाचें रूप द्यावें. कां कीं, जर समी-  
करणाचा दोन बाजूंचा किमती बरोबर असतील, तर त्यावरून त्यांचे  
एकरूपाचा खरेपणा निघेल. कृति करितेसमयीं पदांमध्ये इतकें मात्र  
संभाळावें कीं समीकरणांतील अक्षरांस, उण्यांतून अधिक वजा करावें  
लागेल, अशी किमत देऊं नये, आणि अक्षरांस अशीहि किमत देऊं  
नये कीं, कृति केल्यानें पदांमध्ये असा कांहीं अपूर्णांक निघेल कीं  
जाचे छेदस्थळीं शून्य येईल. याविषयीं ६ वी आणि ८ वी व्याख्या  
पाहा ह्मणजे ध्यानांत येईल.

$$(अ+क्ष+य)(अ+क्ष-य) = अअ+२अक्ष+क्षक्ष-यय$$

$$(अ+ब)(अ+ब) = अअ+२अब+बब$$

$$(अ-ब)(अ-ब) = अअ-२अब+बब$$

$$(अ+ब)(अ-ब) = अअ-बब$$

$$(मम-नन)(मम-नन)+४ममनन = (मम+नन)(मम+नन)$$

$$(अ+ब)(अ+ब)+(अ-ब)(अ-ब) = २अअ+२बब$$

$$(अ+ब)(अ+ब)-(अ-ब)(अ-ब) = ४अब$$

$$(अ+ब+क)(अ+ब-क)(ब+क-अ)(क+अ-ब) = २अअबब + २ \times$$

$$बबकक + २ककअअ - अअअअ - बबबब - कककक; (अ+ब)(अ+ब) \times$$

$$(अ+ब) = अअअ + ३अअब + ३अबब + बबब$$

$$\frac{1}{अ} + \frac{1}{अ-१} + \frac{1}{अ-२} = \frac{३अअ+२-६अ}{अअअ+२अ-३अअ}$$

$$\frac{अ+ब}{अ-ब} + \frac{अ-ब}{अ+ब} = \frac{२अअ+२बब}{अअ-बब}$$

$$अक्षक्ष + बक्ष + क = \frac{(२अक्ष+ब)(२अक्ष+ब)+४अक-बब}{४अ}$$

$$\frac{क्षक्षक्ष-यययय}{क्षक्षक्ष-ययय} = \frac{क्षक्षक्ष+क्षक्षय+क्षयय+यययय}{क्षक्ष+क्षय+ययय}$$

$$\frac{क्ष+अ}{क्ष+ब} = \frac{क्षक्ष+(अ+क)क्ष+अक}{क्षक्ष+(ब+क)क्ष+बक}$$

जेव्हां व्रीजांत एकरूप अक्षरांचीं अनेक पदें असतील तेव्हां तीं संक्षेपानें अधिक सरळरूपांत आणितां येतील. जसें,

$$३अ+२अ = ५अ \quad अ+७अ-४अ=४अ$$

$$३अव+२अव = ५अव \quad \frac{प}{क}+७\frac{प}{क}-४\frac{प}{क}=४\frac{प}{क}$$

$$३क्षक्ष+२क्षक्ष = ५क्षक्ष \quad अअव+७अअव-३अअव=५अअव$$

$$अ+१२अ-३अ-६अ+२अ-अ=५अ$$

या वरचे शेवटील उदाहरणांमध्ये सर्व अधिक पदांची बेरीज मिळवून १५अ होतात, आणि त्यांतून पहिला अ तीन वेळा, दुसरा अ ६ वेळा, आणि तिसरा अ १ वेळा, ह्याजें सर्व मिळून १० वेळा; ह्याजें १०अ वजा करायाचे आहेत; अशांन १५अ-१०अ=५अ होतात.

त्याच प्रमाणें अ+व-३अ+४व=५व-२अ, कां कीं व आणि ४व मिळविले असतां ५व होतात, आणि यांशीं अ मिळविला आहे. आणि नंतर त्यांतून ३अ वजा केले आहेत. परंतु, पहिल्यानें अ मिळवून नंतर ३अ वजा केले असतां, आणि अ न मिळवितां केवळ २अ वजा केले, तर हीं दोन्ही बरोबर आहेत. ह्याजें त्यांस हें रूप होतें.

$$अ+५व-३अ=५व-२अ$$

उदाहरणें:

$$अ+अव-२अव+४अ+६अ=११अ-अव$$

$$२क्षक्ष+६क्ष-४क्ष-क्षक्ष+क=क्षक्ष+२क्ष+क$$

$$३क्ष-१५+\frac{१}{२}क्ष-क्ष-७=२\frac{१}{२}क्ष-२२$$

$$क्ष+य+क्ष-य+३क्ष = ५क्ष$$

कोणत्याहि पद्धतीमध्ये क्ष य हीं अक्षरें सर्व पदांमध्ये साधारण असतील जसें,

$$+६क्षय, -क्षय, +४क्षय, +२क्षय, -११क्षय, -१२क्षय, क्षय चा या$$

वेगवेगळ्या सर्व पदांची किंमत जें एक पद दाखवितें तें याप्रमाणें काढितां येतें; अधिक क्षय पदांची बेरीज १२ आहे, आणि उण्ये पदांची बेरीज २४ आहे. तर सर्व अधिक पदांची बेरीज, आणि तितक्याच उण्या पदांची बेरीज टाक, ह्मणजे कांहींच अधिक पदे न राहातां उणीं पदे १२ राहातील, तर दुसरे पद्धतीचे पदांस-१२क्षय जोडून लिहिले पाहिजेत.

जेव्हां अक्षरांची किंवा अंकांचीं दोन पदे सारखीं नाहींत, तेव्हां त्यांस वरप्रमाणें संक्षेपरूप होत नाहीं. उदाहरण; अअ+अ या पदांचें संक्षेपरूप होत नाहीं. त्याचें संक्षेपरूप २अ, किंवा २अअ, किंवा अअअ, असेंहि नव्हे; तर तें, अ घेतला अ वेळा, अधिक अ घेतला एक वेळा, असें आहे, यास्तव तें अ घेतला अ+१ वेळा, अथवा (अ+१)अ आहे. (अ+१) घेतला अ वेळा, अथवा अ(अ+१) हें त्याचें दुसरें रूप आहे. वर १४ वें पृष्ठ पाहा ह्मणजे ध्यानांत येईल.

याप्रमाणें बीजकृतीनें अ+अ या दोन पदांचा २अ, असा एक पदरूप संक्षेप होतो, परंतु अअ+अ या पद्धतीचा संक्षेप त्याप्रमाणें होत नाहीं, आणि बीजानें त्यास कांहींच संक्षेपरूप देवत नाहीं, आणि अंकगणित रितीनें त्यास संक्षेपरूप देतां येतें परंतु, जोपर्यंत अ कोणत्या अंकस्थळीं घेतला, हें समजे पावेतो संक्षेप होत नाहीं.

अ+व यामध्ये अ, किती वेळा जातो? एथें व मध्ये अ किती वेळा जातो हें जाणल्यावांचून या प्रश्नाचें उत्तर देवत नाहीं; यामुळे अ+व यांत अ किती वेळा जातो. हें केवळ  $\frac{अ+व}{अ}$ , अशे बीजरूप पद्धतीनें दाखवितां येतें परंतु शिकणारानें लक्षांत आणिलें पाहिजे, कीं, हें प्रश्नाचें उत्तर नाहीं, परंतु प्रश्नाचें उत्तर दाखविण्यासाठीं अशी एक बीजरीति योजिली आहे.

मअ-नअ यामध्ये अ किती वेळा जातो? एथें, म आणि न या दोहोंचे अंकांची किंमत जाणल्यावांचून, वरचे प्रश्नाचे उत्तर बरोबर देवत नाहीं; तथापि मअ आणि नअ यांचा बीज अर्थ सहाय्यानें बीज पद्धतीचें उत्तर, त्या गणित पद्धतीचे उत्तराजवळ जवळ एक पायरी आलीकडे आणि तें, तशानें  $\frac{मअ-नअ}{अ}$  या रूपाशिवाय दुसरे रूपानें लिहितां येतें, कां, स्पष्ट आहे कीं न वेळा, म वेळांतून वजा केल्या असतां म-न वेळा राहातात; ह्मणजे मअ-नअ यांत अ हा म-न वेळा जातो.

वर सांगितलेल्या गोष्टी बीजगणितांतील सर्व कृती करितेसमयीं लक्षांत ठेविल्या पाहिजेत.  $८अ+५$  अ हे किती किमतीचे आहेत? एथें अ कोणत्या अंकस्थानीं घेतला आहे, हें जाणल्यावांचून, अशे प्रश्नाचें उत्तर देवकत नाही; परंतु  $८अ+५अ$  यांचें अतिसंक्षेप बीजरूप काय आहे? असा प्रश्न केला तर, उत्तर  $१३अ$  आहे. आणि बीजांतील मिळवणी, वजाबाकी, गुणाकार, इत्यादिकांचा कृती, बीजपद्धतींस एक रूपांतून दुसरें अधिक संक्षेपरूप देण्याचा रिती दाखवितात. उदाहरण  $अ+ब$  आणि  $अ-ब$  यांची बेरीज काय आहे? हें बीजरितीनें विस्तारें लिहिलें असतां, त्यास याप्रमाणें पहिलें रूप होईल; जसें,

$$(अ+ब)+(अ-ब)$$

परंतु यांचें सर्वापेक्षां संक्षेपरूप  $२अ$  आहे; आणि  $२अ$ , असें संक्षेपरूप केल्यानें, त्या कृतीस बीजगणिताची मिळवणी झणतात.

### मिळवणी.

क+ई यास  $अ+ब$  याशीं मिळवायाची इच्छा आहे. जर  $अ+ब$  यास क मिळविला, तर  $अ+ब+क$  होतो, परंतु इतकेंच केल्यानें पूर्ण मिळवणी झाली नाही, कां कीं मिळवायाचें परिमाण केवळ क नाही, तर क+ई आहे. यामुळे  $अ+ब+क+ई$  होच पूर्ण मिळवणी झाली. अथवा,

$$(अ+ब)+(क+ई)=अ+ब+क+ई \dots (१)*$$

$अ+ब$  यास क-ई मिळविणें असल्यास, प्रथम क मिळवून,  $अ+ब+क$  होतात. परंतु असें केल्यानें, बेरीज अधिक झाली, कां कीं, क पासून ई वजा करून बाकी मात्र मिळवायाची. झणून बेरीजेतून ई वजा करून ती बेरीज शुद्ध कर, झणजे  $अ+ब+क-ई$  असें होईल.

\* जेव्हा वर दिलेल्या समीकरणासारख्या समीकरणाची गरज पुढें लागेल, तेव्हा त्यास लौकर जाणायासाठी, त्या समीकरणासमोर एक अंक किंवा अक्षर याप्रमाणें लिहांवें.

$$(अ+ब)+(क-ई)=अ+ब+क-ई \dots \dots \dots (२)$$

(१) आणि (२) या पद्धतींस अधिक संक्षेपरूप देणें अशक्य. आतां हीं पुढील उदाहरणें तपासावीं.

अ+ब यांस अ-ब मिळीव,

$$(अ+ब)+(अ-ब)=अ+ब+अ-ब=२अ$$

३क्ष-अ यास २अ-क्ष मिळीव

$$(३क्ष-अ)+(२अ-क्ष)=३क्ष-अ+२अ-क्ष=२क्ष+अ.$$

अब-ब यास २अब+क-६ब मिळीव

उत्तर २अब+क-६ब+अब-ब, अथवा ३अब+क-७ब

वरचे आणि त्यासारख्या दुसऱ्या कृतीवरून, मिळवणीची रीति या-प्रमाणें निश्चित होती.

रीति. एक पद्धतीवांचून बाकी दुसऱ्या सर्व पद्धतींचे प्रथम पदांपुढें + हें चिन्ह कर; आणि असें मनांत आण कीं त्यांचा समुदाय एकच पद्धती आहे. नंतर अक्षराविषयीं सरूप पदांचा संक्षेप होईपर्यंत कर.

उदाहरण.

$$\begin{aligned} & अ-ब+३क-अब \\ & ४अब-ब+२अ-क्ष \\ & ४क्ष+६अ+अब-७ \end{aligned}$$

यांची मिळवणी कर.

$$\text{उत्तर } ९अ-२ब+४अब+३क+३क्ष-७$$

या पुढील उदाहरणांचा बेरिजा घे.



अ-ब	अ-२ब	अ+मअ-४
व-क	ब-२क	ई-अ+२मअ
क-ड	क-२ड	१२मअ-१२-३अ
ड-क्ष	ड-२क्ष	प+अ- $\frac{१}{२}$
अ-क्ष	अ-ब-क-ड-२क्ष	१५मअ-२अ-१० $\frac{१}{२}$ +प

(१) आणि (२); यांपासून ही पुढील रिती निघती.  
जेव्हां कुंडलींतल्या पद्धतीचे पूर्वी बाहेर+चिन्ह मांडिले असते.  
तेव्हां कुंडलीचा रेघा पुसून टाकून, पद्धतीचे किमतीत फेर पडत नाही.

$$अ+(ब+क-ई)=अ+ब+क-ई$$

### वजाबाकी.

अ यांतून ब+क वजा कर. अ यांतून प्रथम ब, वजा केला तर अ-ब होतो, परंतु इतकेच केल्याने वजाबाकीची कृति पुरी झाली नाही, का की ब, यात क मिळविला पाहिजे, आणि नंतर यांची बेरीज अ यांतून वजा केली पाहिजे. यामुळे कही वजा केला पाहिजे, तेणेकरून हे रूप होईल अ-ब-क, अथवा

$$अ-(ब+क)=अ-ब-क. \dots\dots\dots (३)$$

अ यांतून ब-क वजा कर, ब वजा केला, तर अ-ब होईल, परंतु केवळ असे केल्याने क अधिक वजा केला असे झाले; अथवा खरे किमतीपेक्षा अ-ब, हा क याणे उणा आहे. यामुळे, खरी किमत अ-ब+क ही आहे, अथवा

$$अ-(ब-क)=अ-ब+क. \dots\dots\dots (४)$$

वरचे गोष्टीप्रमाणे, ही पुढील किलेक उदाहरणे आहेत.

$$अ-(क-अ)=अ-क+अ=२अ-क$$

$$अ-(अ-क)=अ-अ+क=क$$

$$३अ+ब-(२अ-ब)=३अ+ब-२अ+ब=अ+२ब$$

$$अ+ब-(अ-ब)=अ+ब-अ+ब=२ब$$

$$मक्ष-(क-३मक्ष)=मक्ष-क+३मक्ष=४मक्ष-क$$

कुंडलींत अनेक पदे असतील, आणि कुंडलीचे बाहेर - चिन्ह असेल तर कुंडलीतील सर्व पदांचीं चिन्हे बदल केलीं, ह्यणजे + यास - केलें, आणि - यास + केलें, तर ती कुंडली पुसून टाकितां येईल.

ही गोष्ट (३) आणि (४) यांपासून उघडी स्पष्ट होती.

ही वर सांगितलेली रीति मनांत पक्की ठेविली नाही, तर, ती अनास्था चूक करण्याचें कारण होईल; तर ही चूक नवे शिकणारेच करितात असें नाही, परंतु अधिक शिकलेलेहि करितात. ह्यणून लक्षांत येण्याकरितां ती रीति मोठे अक्षरानें वर लिहून दाखविली आहे. आणि नवे शिकणाराचे मनांत ही गोष्ट अधिक ठसायासार्थी, यास कळलें पाहिजे कीं या रीतीची अनास्था करणें ह्यणजे वेडेपणाचा पुढील गोष्टी कबूल केल्याप्रमाणें होतील; ह्यणजे, सर्व कर्जे मिळकती आहेत असें होईल, आणि सर्व प्राप्ती तोटा असें होईल; कर्ज सोडणें ह्यणजे उपद्रव देणें, आणि जसा जसा मनुष्यास लुटावा तसा तसा तो द्रव्यवान होतो; आणि याप्रमाणें मिथ्या वेड्या वेड्या दुसऱ्या हजारों गोष्टी होतील.

मागील रीतीचा दुसरा ताळा पुढें सांगतों. जर पुढील पद्धति काय आहे; हें जाणण्याची इच्छा असेल ह्यणजे,

$$अ-(ब+क-प-क) \dots \dots \dots (अ)$$

तर भलतीं दोन परिमाणें एकसारखींच दाखविलीं, तरी त्यांचा वजाबाकी, पहिल्या शुद्ध परिमाणाचे वजाबाकी बरोबर होईल हें स्मरणांत ठेविलें पाहिजे. याप्रमाणें अ+क्ष आणि ब+क्ष यांची वजाबाकी अ आणि



व यांचे वजावाकी बरोबर आहे. वरचे उदाहरणांत असे दाखविले कीं, अ यांतून,

व+क-प-क वजा कराचे आहेत.

अ आणि व+क-प-क, यांशीं (प+क) वेगवेगळे मिळून, याप्रमाणें होईल. अ+(प+क) उणें

(व+क-प-क)+(प+क)

अथवा व+क-प-क+प+क अथवा व+क

ह्मणजे अ-(व+क-प-क) बरोबर

अ+प+क-(व+क) अथवा अ+प+क-व-क

अथवा अ-व-क+प+क. . . . . (ब)

(अ) आणि (ब) ह्या खुणांचा वरचा दोन पद्धती ताडून पाहतां ही रीति खरी आहे असे स्पष्ट दिसते.

वजावाकीची रीति या पुढीलप्रमाणें आहे.

रीति. जी पद्धती वजा करायाची आहे, तिचे प्रथम पदास+ हे चिन्ह आहे, असे मनांत आण; नंतर त्याच पद्धतीचे दुसऱ्या सर्व पदांचीं चिन्हे बदल कर, ह्मणजे + यास - कर, आणि - यास+ कर, नंतर जिचीं चिन्हे अशीं बदल केलीं ती पद्धति जा पद्धतीतून वजा करायाची आहे तिशीं जोड; नंतर होईल तितका संक्षेप कर.

अ+ब-क-क्ष+२ज्ञ+३अब-१४ यांतून

क-२अ+क्ष+ज्ञ-४अब+३ $\frac{१}{२}$  हे वजा कर

३अ+ब-२क-२क्ष+ज्ञ+७अब-१६ $\frac{१}{२}$  ही बाकी

अ+क क्ष+य-३-अ अ-ब +क-ड+ई यांतून

२क-अ क्ष-य+३-अ अ-२ब+क+ड-ई हे वजा कर

२अ-क २य-६ व-२ड+२ई ही बाकी

$$\begin{aligned} & \text{अ+व+२क+३ड+४ई-५फ-६ग यांतून} \\ & \text{१२ड+४ई-३क+२अ+व-ग+फ हे वजा कर} \\ & \hline & \text{५क-९ड-६फ-५ग-अ बाकी} \end{aligned}$$

अ-(व-(क+क्ष))+(व-(क्ष-२व)) हें काय आहे ?

कुंडली काढून टाकण्याची जी रीति सांगितली तिजपासून,

अ-व+(क+क्ष)+व-(क्ष-२व) हें रूप होते.

याच रितीनें, याचाहि रूपभेद होतो.

ह्मणजे अ-व+क+क्ष+व-क्ष+२व=अ+क+२व

हीं पुढील उदाहरणें करून दाखीव.

$$\text{अ}-\{\text{अ}-(\text{अ}-(\text{अ}-\text{क्ष}))\}=\text{क्ष}$$

$$\text{अ}-\{\text{व}-(\text{अ}-(\text{व}-\text{क्ष}))\}=२\text{अ}-२\text{व}+\text{क्ष}$$

पूर्वीं, जें वर सर्व सांगितलें, त्यावरून समजांत आलें कीं, बीजगणित पद्धतीची मिळवणी आणि वजाबाकीचीं, वेगळालीं पदे, कशींहि मांडलीं, तरी त्यांत कांहीं अंतर पडत नाहीं; तर या पुढील पद्धतीचें शक्य अथवा अशक्यरूप आहे किंवा नाहीं, याविषयीं कांहींच लक्षांत आणा-याची गरज नाहीं. १२ आणि १३ वें पृष्ठ पाह्या ह्मणजे समजेल; परंतु शक्य किंवा अशक्य रूपें हीं दोन्हीं सारिखांच असें मानितां येईल. जसें, ३-७+८, यांत जी वजाबाकी करायाची आहे, ती पहिल्यानेंच अगत्य करावी असें नाहीं, आणि यासाठीं अशी पद्धति अशक्य रूपाची ह्मणून कामांत घेऊं नये, असेंहि मनांत आणणार नाहीं; परंतु पदांचा क्रम कसाहि मांडला तरी कांहीं चिंता नाहीं; यावरून, वरचें उदाह-रण ३+८-७ असें आहे; याप्रमाणें ही गोष्ट दुसरे सर्व पद्धतीस सा-धारण आहे. जर मिळवणी आणि वजाबाकीचे कृतीसाठीं पदांचे रचनेचे शक्यपणाविषयीं कांहीं अगोघर विचार करायाचें प्रयोजन असेल, तर असें करवत नाहीं, वरची अशक्य रूपाची पद्धति ह्मणजे ३-७+८ ही १२ तून वजा केली तर याप्रमाणें होईल.

$$१२-(३-७+८)=१२-३+७-८=८$$

शक्य रूपानें पदें मांडिलीं असतां त्यांचें उत्तर वरचाप्रमाणें होईल ;  
जसे,

$$१२-(३+८-७)=१२-३-८+७=८$$

### गुणाकार आणि भागाकार.

बीजगणिताचे पदांशी गुणाकार आणि भागाकार करतेसमयी, नेहमी लक्षांत ठेवावें, कीं जीं अक्षरे कामांत घेतात, तीं पूर्ण किंवा अपूर्णांक दाखवितान्त. अपूर्णांक गणितामध्ये जाचे अंश आणि छेद वेगवेगळे पूर्णांक आहेत, त्यांचे मिलवणी इत्यादिकांचे रितीविषयीं अंकगणितांत जें सांगितलें आहे तें प्रथम येथें दाखवितों.

जेव्हां अ आणि ब हे पूर्णांक आहेत, तेव्हां पुढील सर्व प्रश्न एकच अर्थाचे आहेत आणि त्यांचें उत्तर  $\frac{अ}{ब}$  आहे.

१. जर एक एक ब समभागांत विभागिला, आणि त्या भागांतून अ भाग घेतले, तर ते किती एक किंवा एकचे भाग होतील ?

२. अ याचे ब भागांत किती एक किंवा एकचे भाग आहेत ?

३. अ यामध्ये ब किती वेळा किंवा वेळेचे भाग वेळा जातो ? याप्रमाणें  $\frac{३}{४}$  ह्याजें एकचा एक सप्तमांश तीन वेळा घेतला आहे, तर तीन यांचा सातवा भाग काय आहे ! आणि तीन यामध्ये सात एका वेळेचे किती भाग वेळा जातात ! या दोन प्रश्नांचें उत्तर  $\frac{३}{४}$  आहे.

जेव्हां अपूर्णाकाचे अंश आणि छेद हे दोनहि अपूर्णांक आहेत, तेव्हां वर सांगितल्याप्रमाणें त्या अपूर्णाकाचा अर्थ बोलण्याचे रितीप्रमाणें सांगायला कठीण पडतें. उदाहरण, जेव्हां अ=३ आणि ब=७, आहेत, तेव्हां यास  $\frac{३}{७}$  असे रूप देऊन सांगण्यास, कठीण पडत नाही ; परंतु अ=२ $\frac{१}{२}$  आणि ब=२ $\frac{१}{२}$  असे असून अपूर्णाकाचे रूप  $\frac{अ}{ब}$  असे असले,

तर भाषेने त्याचा अर्थ सांगायला कठीण पडते. कल्पना कर, की कांहीं विशेष एक एक, जसे, १ कोस घेतला आहे, तर

कोसाचे  $\frac{3}{4}$  काय आहेत?

कोसाचे  $\frac{2\frac{1}{2}}{\frac{4}{1}}$  काय आहेत?

उत्तर, एक कोस सात समभागांत विभागून यातून तीन भाग.

उत्तर; (एक कोस  $\frac{4}{1}$  समभागांत विभागून) या भागांचे  $2\frac{1}{2}$ .

दुसऱ्या उदाहरणाचे उत्तरांत जे शब्द मोठ्या अक्षरांनी लिहिले ते असमजुतीचे आहेत, आणि जरी त्यांना अर्थ नाही; तथापि त्यांस समजायाजोगा कांहीं एक अर्थ देता येईल. जेव्हां ७ यांचा ठिकाणी  $\frac{4}{1}$  आणि ३ यांचा ठिकाणी  $2\frac{1}{2}$  मांडिले, तेव्हां वरचे दोन उदाहरणांतून प्रथम उदाहरणाचा अर्थ फिरविल्यावांचून, उच्चारण्याची रीति मात्र बदल केल्याने, समजुतींत येई अशी बोलण्याची रीति निघेल. जसे,

अशी एक लांबी घे, की ती ७ वेळा घेतली असता एक कोस होईल, नंतर ती प्रथम घेतलेली लांबी ३ वेळा घे.

अशी एक लांबी शोधून घे, की ती एक वेळेचे  $\frac{4}{1}$  वेळा घेतली असता एक कोस होईल, नंतर ती प्रथम घेतलेली लांबी  $2\frac{1}{2}$  वेळा घे.

आतां  $2\frac{1}{2} \div \frac{4}{1} = \frac{5}{2}$  कोस, अथवा  $2\frac{1}{2}$  कोस होतात, जी घेतलेली लांबी तिचे नऊ भाग करून, यांतले चार भाग घेतले असता एक कोस बरोबर असेल, तर ती पहिली घेतलेली लांबी  $2\frac{1}{2}$  वेळा घेतली, तर  $5\frac{1}{2}$  कोस होतील; हे गणित रितीने शिकणारास स्पष्ट समजेल. आणि जर याप्रमाणे प्रश्न केला की,  $2\frac{1}{2}$  यामध्ये  $\frac{4}{1}$  किती वेळा किंवा वेळेचे भाग वेळा आतात, तर त्याचे उत्तर  $5\frac{1}{2}$  आहे.

बीजगणितांत अक्षरांविषयी बोलण्याची जी रीति कामांत आणतात, ती पूर्णांकांचा कल्पनेवरून निघते; परंतु पूर्ण किंवा अपूर्णाकांचे स्थळी अक्षरेच मांडितात, ह्याने अपूर्णाकांविषयी असे बोलण्याचे रितीचा फलितार्थ नसल्यास तशी बोलण्याची रीति फारच संकोचित आहे. जसे,

जर क्ष विध्यांची किंमत य रुपये आहे, तर एक विध्याची किंमत काय आहे? असा प्रश्न केला असता याप्रमाणे सर्वदा उत्तर देतात, य यास क्ष समभागांत विभाग; नंतर प्रत्येक भागामध्ये जितके रुपये आहेत तितके रुपये एक विध्याची किंमत होईल. झणून जर १८ विध्यांची किंमत ३६ रुपये आहे तर ३६ सांचा १८ वा भाग २ रुपये आहे, याजकरिता एक विध्याची किंमत २ रुपये आहे. परंतु जर एक विध्याचा  $\frac{१}{२}$  याची किंमत  $२\frac{१}{२}$  रुपये आहे, आणि जर असें झटलें कीं  $२\frac{१}{२}$  यांस  $\frac{१}{२}$  समभागांत भागायाचे, तर त्याचा अर्थ खचित याच बोलण्याप्रमाणे आहे, कीं  $२\frac{१}{२}$  यांस २ वेळा घे, अथवा गणित रितीप्रमाणे  $२\frac{१}{२}$  यांस  $\frac{१}{२}$  यांणीं भाग. आतां, भलतें काहीं परिमाण  $\frac{१}{१०}$  समभागांनीं भाग, आणि त्याच परिमाणास १० वेळा घे, हीं दोन्ही एकच आहेत, असें झणजे, पहिल्या लक्ष्यानें जरिं उपहास्य दिसतें, तथापि काहीं परिमाण १० समभागांत भागून त्यांतून एक भाग घेजे, आणि तेंच परिमाण  $\frac{१}{१०}$  यांणीं गुणजे हीं दोन्ही एकच आहेत; या गोष्टीसारखें वर काहीं लिहिलें आहे ही गोष्ट स्मरणांत ठेविली पाहिजे, आणि याशिवाय दुसरी ही पुढील गोष्ट स्मरणांत ठेविली पाहिजे, कीं जर क्ष विध्यांचा य रुपये पडतात असें जेव्हां झणतो, तेव्हां य यास क्ष समभागांत भागिल्यानें एक विध्याची किंमत सांपडती, तेणेंकरून वरचें उपहास्य नाहीं असें होतें. कां कीं, पूर्णांकाचे किंवा अपूर्णांकाचे स्वळीं अक्षरे मांडितात.

अपूर्णांकाचे आश्रयानें त्रिराशींतील अनेक प्रश्न शिकणारानें उलगडून काढावे, हें काम त्यास फार उपयोगी आहे; झणून पहिल्यानें अपूर्णांकाचे प्रश्न पूर्णांकाचे आश्रयानें पडताळून पाहावे. मग नुसते आपल्ये विचारानें सिद्ध करावे.

१. जर ६ गजांची किंमत ७ रुपये आहे तर ५ गजांस काय किंमत पडेल ?

जर एक गजाचे  $\frac{३}{२}$  यांची किंमत एक रुपयाचे  $\frac{१}{२}$  आहे, तर एक गजाचे  $\frac{१}{२}$  यांची किंमत काय असेल ?

जसे ६ गज, ५ गजांस आ-  
हेत, तसे ७ रुपये  $\frac{७ \times ५}{६}$  अथवा  
 $५\frac{५}{६}$  रुपयांस आहेत. हे उत्तर.

जसे एक गजांचे  $\frac{३}{४}$  एक ग-  
जाचे  $\frac{४}{९}$  शांस आहेत, तसे एक  
रुपयाचे  $\frac{५}{९}$  यांस  $\frac{५ \times ४}{९}$  अथवा, एक  
रुपयाचे  $\frac{१०}{९}$  आहेत. हे उत्तर.

२. जर, एक गजाचे  $\frac{३}{४}$  यांची किंमत एक रुपयाचे  $\frac{५}{९}$  असेल तर . .  
जर, २ गजांची किंमत एक रुपयाचे  $\frac{५}{९} \times २$  अथवा  $\frac{१०}{९}$  असेल तर . .  
जर, १ गजाची किंमत एक रुपयाचे  $\frac{१०}{९} \div २$  अथवा  $\frac{५}{९}$  असेल तर . .  
जर, ४ गजांची किंमत एक रुपयाचे  $\frac{५}{९} \times ४$  अथवा  $\frac{२०}{९}$  असेल तर . .  
जर, एक गजाचे  $\frac{४}{९}$  यांस एक रुपयाचे  $\frac{३०}{९} \div ९$  अथवा  $\frac{१०}{२९}$  असेल तर . .

जा रिती पूर्णांकांचे संबंधाने अपूर्णाकांविषयी लागतात, त्या शिक-  
णारास पूर्वीच माहीत झाल्या आहेत; तर याच रिती आतां बीजरूपाने  
मांडितो. पहिल्याने, पूर्णांकांचे स्थळीं अक्षरे घेतलीं, असे मानून

$\frac{अ}{ब} = \frac{मअ}{मब}$	$\frac{अ}{ब} + \frac{क}{ड} = \frac{अड+बक}{बड}$
$अ + \frac{ब}{क} = \frac{अक+ब}{क}$	$\frac{अ}{ब} - \frac{क}{ड} = \frac{अड-बक}{बड}$
$अ - \frac{ब}{क} = \frac{अक-ब}{क}$	$\frac{अ}{ब} - \frac{क}{ड} = \frac{अड-बक}{बड}$
$\frac{अ}{ब} \times क = \frac{अक}{ब}$	$\frac{अ}{ब} \times \frac{क}{ड} = \frac{अक}{बड}$
$\frac{अ}{ब} \div क = \frac{अ}{बक}$	$क \div \frac{अ}{ब} = \frac{बक}{अ}$
$\frac{अ}{ब} \div \frac{क}{ड} = \frac{अ}{ब} \times \frac{ड}{क} = \frac{अड}{बक}$	

शिकणाराने वरचे प्रत्येक समीकरणाची ओळख करून घेतली पा-  
हिजे, आणि जर शिकणारा अपूर्णाकांचे वेगळ्याने कृतींशीं माहित  
असेल, तर खाला तीं समीकरणें समजण्यास सोपे पडेल. जसे वा  
पुढील उदाहरणांत  $\frac{अ}{ब} \times \frac{क}{ड} = \frac{अक}{बड}$ , यावरून शिकणारास अपूर्णाक गणि-

तांतील रितीची ओळख येईल; एक अपूर्णांक दुसऱ्या अपूर्णांकाने गुणा-  
याचा असल्यास, अंश अंशांनी गुणून नवे अंश होतील, आणि  
छेद छेदांनी गुणून नवे छेद होतील.

जेव्हा अक्षरे, अपूर्णांकांचे ठिकाणी कामांत घेतली आहेत, तेव्हा  
वरची रीति लावरहि लागू पडेल. हें दाखविण्यासाठी एक उदाहरण  
करून दाखवितों.  $\frac{अ}{ब} = \frac{मअ}{मब}$  आतां, अ चे ठिकाणी  $\frac{प}{क}$ , ब चे ठि-  
काणी  $\frac{र}{स}$  आणि म चे ठिकाणी  $\frac{क्ष}{य}$  घे, आणि असे मनांत आण कीं, प,  
क; र, स, क्ष, आणि य, हे सर्व पूर्णांकांचे ठिकाणी आहेत. तर

$$(\text{मणित रीतीने}) \frac{अ}{ब} = \frac{\frac{प}{क}}{\frac{र}{स}} = \frac{पस}{कर}$$

$$मअ = \frac{क्ष}{य} \times \frac{प}{क} = \frac{क्षप}{यक} \quad मब = \frac{क्ष}{य} \times \frac{र}{स} = \frac{क्षर}{यस}$$

$$\frac{मअ}{मब} = \frac{\frac{क्षप}{यक}}{\frac{क्षर}{यस}} = \frac{क्षपस}{क्षयकर}$$

$$\text{परंतु } \frac{क्षपस}{क्षयकर} = \frac{(\text{क्षय}) \times पस}{(\text{क्षय}) \times कर} = \frac{पस}{कर}$$

हणून  $\frac{मअ}{मब} = \frac{अ}{ब}$  : या उदाहरणांत अ, ब, म, हे सर्व अपूर्णांक आहेत.  
पूर्वी गणितांत सांगितलें आहे, कीं, पूर्णांकांचे किंवा अपूर्णांकांचे  
उदाहरणांत, फळांत अंतर पडल्याशिवाय, गुणाकार, किंवा, भागाकार  
यांचे क्रम फिरवितां येतात. जेव्हा गुणाकार आणि भागाकार, या  
दोहोंविषयी, बोलायाचें आहे, तेव्हा त्यांचे भेदावर लक्ष्य ठेवण्याचें प्रयो-  
जन नाहीं; कां कीं अ, याणें भागावें आणि  $\frac{१}{अ}$  याणें गुणावें हीं दोन्ही  
एकसारखींच आहेत. या पुढील उदाहरण समुदायावर लक्ष्य ठेविलें  
पाहिजे, आणि वेगवेगळाले गुणाकार पर्यायानें पुनःपुनः करून सिद्ध  
केले पाहिजेत.

१. अ, ब, क, आणि ड, यांचा गुणाकार; २. अब आणि कड,  
यांचा गुणाकार; ३. अक आणि बड, यांचा गुणाकार; ४. अड  
आणि बक, यांचा गुणाकार; ५. अवक आणि ड, यांचा गुणाकार;  
६. अवड आणि क, यांचा गुणाकार; ७. अकड आणि ब, यांचा



गुणाकार ; ८. बकड आणि अ, यांचा गुणाकार ; यांत कोणत्याही क्रमाने अक्षरे मांडिलीं तरी त्या सर्वांचा गुणाकार अबकड या पदाबरोबर आहे.

एकेरी पदांचे गुणाकार करून त्या गुणाकारपदांचीं अक्षरे पाहिजे त्या क्रमाने मांडितां येतात, आणि जर त्या पदांस कांहीं गुणकांक असेल तर ते अंक परस्पर गुणून गुणाकार मांडावा. नुसते दोन अंक असल्यास त्यांचा मध्ये  $\times$  हें चिन्ह करावें. जसे. २अब  $\times$  ४कड, हे या पुढील वेगळाल्ये रितीने मांडतां येतात ;

२अब४डक २ $\times$ ४अबकड ८अकबड ८अबकड, इत्यादि.

पदांचे आरंभीं गुणकांक मांडावे हें सोयीचें आहे, आणि पदांचीं एक जातीचीं अक्षरे एकत्र मांडावीं हेंहि सोईवार पडतें. ह्मणून

२अअब $\times$ ३अबबक, हे, ६अअबबबक. याप्रमाणें मांडितात.

१२अबक्ष $\times$  ४अबक्षक्ष = ४८अअबबक्षक्ष, ३अबक $\times$  २अब = ६अअबबक.

जेव्हां अपूर्णांक परस्परांचे जवळजवळ, किंवा एका अक्षराजवळ मांडिले असतात, तेव्हां परस्परांचा गुणाकार आहे असे ते जाणवितात, जसें,

२ $\frac{३}{४}$ क  $\frac{३}{४}$  यांचा अर्थ, २  $\times$   $\frac{३}{४}$   $\times$  क  $\times$   $\frac{३}{४}$  अथवा, २  $\frac{३}{४}$ क आहे.

जरी अ, अब, अबक इत्यादि, यांस पूर्ण, आणि  $\frac{३}{४}$ ,  $\frac{३}{४}$ ,  $\frac{३}{४}$ , इत्यादि, यांस अपूर्ण पदे ह्मणतात तरी ते ह्मणणें त्यांचे अंकगणित गुणाविषयीं नाहीं, परंतु बीजगणित गुणाविषयीं आहे; कीं कीं, अपूर्णाकाचे ठिकाणीं अक्षरे मांडितात, ह्मणून जें बीजरूपानें मनन केलें असतां पूर्ण होतें, तेंच अंकगणितरूपानें मनन केलें असतां अपूर्ण होतें; आणि याप्रमाणें याचे उलटेंहि होतें. उदाहरण, अशी कल्पना कर, कीं अ हा  $\frac{१}{२}$  याचे ठिकाणीं घेतला, आणि ब हा  $\frac{१}{४}$  याचे ठिकाणीं घेतला, तर बीजरूपानें अपूर्ण पद आहे, तोच गणित रूपानें  $\frac{१}{२}$  अपूर्ण पद होतो; परंतु,  $\frac{३}{४}$  हें बीजरूपानें जें अपूर्ण पद ते अंकगणितरूपानें  $\frac{१}{२} \div \frac{१}{४} = २$ , पूर्ण पद होतें.

यामुळें, पूर्ण किंवा अपूर्ण पदांविषयीं बोलणें पडलें, त त्याचे बीजरूपावर लक्ष्य ठेवावें, त्यांचे गणित किमतीच करूं नये.

या पुढील समीकरणांमध्ये जी रीति लक्षांत येती, ती रीति त्या पदांचा गुणाकाराचा आधार आहे ;

$$म (अ+ब) = मअ+मब$$

$$म (अ-ब) = मअ-मब$$

पहिल्यानें, हेंच केलें पाहिजे कीं, अ+ब यांस म वेळा घेवळ म वेळा अ घेतला, तर स्पष्ट दिसतें, कीं अ जितक्या वा वेळेचे भाग वेळा घेतला, तितके वेळा ब किंवा बचे भाग राहिले. यामुळें मअ हा मब इतक्यानें उणा आहे, ह्मणून हा इच्छिला गुणाकार आहे.

दुसऱ्यानें, याप्रमाणें केलें पाहिजे, कीं अ-ब यास म वेळा घेवळ अ हा म वेळा घेतला, तर स्पष्ट दिसतें, कीं अ वेळा किंवा वेळेचा भाग वेळा घेतला, तितक्यानें ब किंवा अधिक घेतला. यामुळें मअ हा मब इतक्यानें अधिक आ मअ-मब हा इच्छिला गुणाकार आहे.

यावरून हें पुढील समीकरण सिद्ध होतें.

$$म(अ+ब-क-ड)=मअ+मब-मक-मड$$

ह्मणून, अ+ब, यांचे ठिकाणीं, प घे ; आणि क+ड, यांचे क घे ; तर अ+ब-क-ड हे प-क आहे. २३ आणि २४

$$\text{आणि } म(अ+ब-क-ड)=म(प-क)=मप-मक$$

$$\text{परंतु, मप}=मअ+मब \text{ आणि } मक=मक+मड$$

$$\text{तेव्हां, मप-मक}=मअ+मब-(मक+मड)$$

$$=मअ+मब-मक-मड$$

या पुढील उदाहरणांस मागील सांगितलेल्या रिती लागू होतात ;

$$३(अ+ब)=३अ+३ब$$

$$३\frac{१}{२}(अ-ब)=३\frac{१}{२}अ-३\frac{१}{२}ब$$

$$अब(अ-ब)=अअब-अबब$$

$$२अ(अ-अअ)^{*}=२अअ-२अअअ$$

$$३अबक(अब-अक+४)=३अअबबक-३अअबकक+१२अबक$$

$$२(\frac{क्ष}{२} + \frac{क्ष}{३})=क्ष + \frac{२क्ष}{३}$$

$$६(\frac{क्ष}{२} + \frac{क्ष}{३})=३क्ष+२क्ष$$

$$४०(\frac{१}{२}-क्ष)=२०-४०क्ष$$

$$अ(\frac{३}{४}+ब)=\frac{३}{४}अ+अब$$

$$\frac{अ}{ब}(\frac{ब}{अ}+ब)=\frac{अ}{ब}\frac{ब}{अ}+\frac{अ}{ब}ब=१+अ$$

$$\frac{क्षय}{ज्ञ}(क्षज्ञ+१)=\frac{क्षक्षयज्ञ}{ज्ञ}+\frac{क्षय}{ज्ञ}=क्षक्षय+\frac{क्षय}{ज्ञ}$$

$$\frac{अ}{अ+ब}\{क+ड-ई\}=\frac{अक}{अ+ब}+\frac{अड}{अ+ब}-\frac{अई}{अ+ब}$$

$$पक्करस(\frac{१}{५}+\frac{१}{६}+\frac{१}{८}-\frac{१}{५६८})=क्करस+परस+पक्कस-स$$

अ+ब यांस क+ड यांणी गुणायासाठी, क्षणमात्र, अ+ब यांचे ठिकाणी प, घे. तर प, हा क+ड यांणी गुणिला, आणि क+ड हा, प यांणी गुणिला हीं एकच आहेत, म्हणजे, पक+पड आहे,

$$(अ+ब)(क+ड)=(अ+ब)क+(अ+ब)ड$$

$$\text{परंतु } (अ+ब)क=अक+बक \text{ आणि } (अ+ब)ड=अड+बड$$

$$\therefore (अ+ब)(क+ड)=(अक+बक)+(अड+बड)$$

$$=अक+बक+अड+बड.$$

अ+ब यांस क-ड यांणी गुणायाचें असेल, तेव्हां अ+ब=प, घे, तर प(क-ड)=पक-पड हें होतें, अथवा

\* या उदाहरणांत पद्धति शक्य किंवा अशक्यरूपाची आहे कीं नाहीं, ही गोष्ट एथें लक्षांत आणिली नाहीं.

$$\begin{aligned}
 (अ+ब)(क-ड) &= (अ+ब)क-(अ+ब)ड \\
 &= (अक+बक)-(अड+बड) \\
 &= अक+बक-अड-बड
 \end{aligned}$$

अ-ब यांस क-ड यांणी गुण्याचाचें असेल, तेव्हां अ-ब=प, घे, तर  
 प(क-ड) = पक- पड, अथवा

$$\begin{aligned}
 (अ-ब)(क-ड) &= (अ-ब)क-(अ-ब)ड \\
 &= (अक-बक)-(अड-बड) \\
 &= अक-बक-अड+बड
 \end{aligned}$$

वरची कृति करण्याचा दोन रिती आहेत, परंतु शिकणारानें सदाः  
 पहिल्या रितीवर लक्ष्य द्यावें.

पहिली रीति. अ+ब-२क या गुण्यास ड-अ-क या गुणकानें गु-  
 णायाचें.

एथें, गुण्य ड वेळा घेऊन, त्या गुणाकारांतून, तो गुण्य अ वेळा,  
 आणि क वेळा घेऊन, एकाभायें एक वेगवेगळे वजा केलें पाहिजेत ;  
 ह्मणजे गुण्य अ+क वेळा घेऊन, ड वेळांतून वजा करायाचा आहे.

$$\text{गुण्य ड वेळा} = अड + बड - २कड$$

$$\begin{aligned}
 \text{यांची } \left\{ \begin{array}{l} \text{गुण्य अ वेळा} = अअ + अब - २अक \\ \text{बेरीज } \left\{ \begin{array}{l} \text{गुण्य क वेळा} = अक + बक - २कक \end{array} \right. \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

$$\text{ह्मणजे, गुण्य, अ+क वेळा} = अअ+अक+अब+बक-२अक-२कक, हे$$

$$\begin{aligned}
 \text{गुण्य ड वेळांतून } \left\{ \begin{array}{l} \text{अड + बड + २अक + २कक - २कड} \\ \text{वजाकरून बाकी } \left\{ \begin{array}{l} -अअ - अक - अब - बक \end{array} \right. \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

दुसरी रीति. वरची उदाहरणें पाहिलीं असतां उघड दिसतें, कीं  
 गुणाकाराची रीति या पुढीलप्रमाणें आहे ; गुण्यगुणकांचीं पहिलीं  
 पदे यांस + हे चिन्ह आहे असें मनांत आण ; नंतर गुण्याचे प्रत्येक

पदाला अनुक्रमें गुणकांचे प्रत्येक पदानें गुण, आणि पदें एक जातीचे चिन्हाचीं असतील, त्यांचे गुणाकाराचे पूर्वी + हें चिन्ह कर, आणि जीं पदें भिन्न चिन्हांचीं असतील, त्यांचे गुणाकारापूर्वी - हें चिन्ह कर. मागील उदाहरण एथें शिरस्त्राप्रमाणें वरचे रितीवरून वेगळ्या पदापुढें योग्य चिन्हे मांडून, करून दाखविलें आहे.

अ+ब-२क

ड-अ-क

ड याणें गुणून . . .	$\cdot$ अड+बड-२कड	} हा इच्छिला गुणाकार आहे.
अ याणें गुणून . . .	$\cdot$ अअ-अब+२अक	
क याणें गुणून . . .	$\cdot$ अक-बक+२कक	

जेव्हां वेगवेगळ्या ओळीमध्ये एकसारखीं पदें येतात, तेव्हां मागून त्यांचा संक्षेप करायासाठी, एक जातीचीं पदें एकाखाली एक लिहायास सोईस पडतें, जसें या पुढील उदाहरणांत,

क्षक्ष-२क्ष+१ यांस

क्ष-४ यांणीं गुण

क्ष याणें गुणून . .	$\cdot$ क्षक्षक्ष-२क्षक्ष+क्ष	} हा इच्छिला गुणाकार आहे.
४ याणीं गुणून . .	$\cdot$ -४क्षक्ष+८क्ष-४	
$\cdot$ क्षक्षक्ष-६क्षक्ष+९क्ष-४		हा अतिसंक्षेपरूप आहे.

परंतु सद्यः वरचा रितीपेक्षा ही पुढील रीति बरी आहे ;

क्षक्ष-२क्ष+१ यांस

क्ष-४ यांणीं गुण

क्षेवळा गुणून यांतून . .	$\cdot$ क्षक्षक्ष-२क्षक्ष+क्ष	} पहिले ओळीतून दुसरी ओळ वजा कर
४ वेळा गुणून वजा कर.	$\cdot$ ४क्षक्ष-८क्ष+४	
$\cdot$ क्षक्षक्ष-६क्षक्ष+९क्ष-४		हा इच्छिला गुणाकार झाला.

हीं पुढील तीन उदाहरणें, मोठ्या उपयोगाचीं आहेत, यासाठीं शिकणारानें तीं आणि त्यांसारिखीं दुसरीं उदाहरणें पहातांच मांडावीं.

अ+व यांस

अ+व यांणीं गुण

अअ+अव यांशिं

अव+वव यांस मेळीव

अअ+२अव+वव हा गुणाकार आहे

अ-व यांस

अ-व यांणीं गुण

अअ-अव यांतून

अव-वव यांस वजा कर.

अअ-२अव+वव हा गुणाकार आहे }

अ+व यांस

अ-व यांणीं गुण

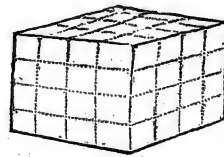
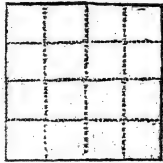
अअ+अव यांतून

अव+वव यांस वजा कर

अअ-वव हा गुणाकार

ह्या पुढील व्याख्या एथें सांगायास योग्य आहेत.

चौरस ह्मणजे चार बाजूंची आकृति आहे, त्या चार बाजूंची लांबी बरोबर आहे, आणि जवळ जवळचा बाजू परस्परांवर लंब आहेत.



घन ह्मणजे भरीव आकृति आहे, जिचा मर्यादा साहा समचौरसें आहेत, जसा घडलेला चौरस दगड जाची लांबी, रुंदी, आणि जाडी बरोबर आहे.

जें चौरस चार इंच लांबीचें आहे, त्यामध्ये एक एक इंच लांबीचीं

४×४ इतकी चौरसें आहेत, जें चौरस क्ष इंच लांबीचें आहे, त्यामध्ये एक इंच लांबीची, अशीं क्षक्ष चौरसें आहेत. चौरस इंचांचा क्ष ओळी आहेत, आणि प्रत्येक ओळीमध्ये क्ष चौरसें आहेत.

जो घन चार इंच लांबीचा आहे, त्यामध्ये एकेक इंच लांबीचे, असे,  $8 \times 8 \times 8$  इतके घन आहेत; जो घन क्ष लांबीचा आहे, त्यामध्ये एकेक इंच लांबीचे क्षक्ष घन आहेत. घन इंचांचे क्ष थर आहेत, आणि प्रत्येक थरामध्ये क्षक्ष घनइंच आहेत.

वर दाखविलें कीं, क्ष एकं लांबीचा रेघेवर चौरस केले असतां क्षक्ष असें ह्मणतात, आणि क्ष एकं लांबीचा रेघेवर घन केला असतां, क्षक्षक्ष असें ह्मणतात ; अशा संबंधामुळे, क्षक्ष यांस क्ष यांचे चौरस, अथवा वर्ग, आणि क्षक्षक्ष यांस क्षचा घन, असें ह्मणण्याची नेहमीं रीति पडली आहे. परंतु क्षक्षक्षक्ष यांस क्षचा चतुर्घात, आणि क्षक्षक्षक्षक्ष यांस क्षचा पंचघात, इत्यादि ह्मणण्याची रीति आहे. अशाच क्ष नुसता असला तर त्यास क्षचा प्रथम घात, आणि क्षक्ष यांस क्षचा द्वितीय घात, आणि क्षक्षक्ष यांस क्षचा तृतीयघात परंतु वर्ग आणि घन, हे दोन शब्द द्वितीय आणि तृतीय घात यांचे ठिकाणीं झटव्यानें, सोडवार पडते, यासाठीं असें ह्मणण्याची चाल सोडीत नाहीं.

वरचा तीन उदाहरणांचे गुणाकार या पुढीलप्रमाणे मांडितात.

१.  $(a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$

अथवा, दोन परिमाणांचे बेरिजेचा वर्ग, त्या दोन परिमाणांचे वर्गांची बेरीज, त्याच दोन परिमाणांचे गुणाकाराचे दुपटीने अधिक वाढविली, इतक्या बरोबर आहे.

$$२. (अ-ब)(अ-ब) = अअ - २अब + बब$$

अथवा, दोन परिमाणांचे वजाबाकीचा वर्ग, त्या दोन परिमाणांचे वर्गांची बेरीज त्याच दोन परिमाणांचे गुणाकाराचे दुपटीने उणी केली, इतक्या बरोबर आहे.



$$३. (अ+ब)(अ-ब)=अअ-बब$$

अथवा दोन परिमाणांचे बेरिजेस, त्याच परिमाणांचे वजावाकीने गुणिले, तर तो गुणाकार त्या दोन परिमाणांचे वर्गांचे वजावाकी बरोबर आहे.

आतां. अब आणि २अ हीं दोन परिमाणें आहेत, असें मनांत आण. तर वर सांगितल्यावरून याप्रमाणें होईल.

$$अब \times अब = अअबब, \text{ आणि } २अ \times २अ = ४अअ$$

$$२(अब \times २अ) = ४अअब$$

$$(अब+२अ)(अब+२अ) = अअबब + ४अअब + ४अअ$$

$$(अब-२अ)(अब-२अ) = अअबब - ४अअब + ४अअ$$

$$(अब+२अ)(अब-२अ) = अअबब - ४अअ$$

हीं पुढील उदाहरणें शिकणाराचे अभ्यासाकरितां फार उपयोगी आहेत.

$$(अ \pm \frac{१}{अ}) \text{ यांचा वर्ग } = *अअ \pm २ + \frac{१}{अअ}$$

$$(अ + \frac{१}{अ})(अ - \frac{१}{अ}) = अअ - \frac{१}{अअ}$$

$$(२अक्ष+ब)यांचा वर्ग = ४अअक्षक्ष \pm ४अवक्ष + बब$$

$$(२अक्ष+ब)(२अक्ष-ब) = ४अअक्षक्ष - बब$$

$$(अ+ब+क)यांचा वर्ग = (अ+ब)(अ+ब) + २(अ+ब)क + कक \\ = अअ + बब + कक + २अब + २बक + २कअ$$

\* समीकरणांत  $\pm$  अशीं चिन्हें समीकरणांत, वारंवार आलीं, तर दोन समीकरणें एक ठिकाणीं जोडिलेलीं आहेत असें जाणवें. वरचें चिन्ह घेण्याचा अनुक्रम धरिला तर दोर-उपर्यंत वरचें चिन्ह घ्यावें, आणि खालचाचा अनुक्रम धरिला तर दोरउपर्यंत खालचें चिन्ह घ्यावें, जसें,

$$अ+ब=क+उ$$

हें  $अ+ब=क-उ$  अथवा  $अ-ब=क+उ$  याप्रमाणें होईल.

शिकणारानें अशा द्विरूप चिन्हांनीं काम करूं नये, परंतु या पुस्तकास अशीं वारंवार येतात झणून त्यांचा अर्थ कळण्यासाठीं मात्र एथें दाखविलीं आहेत.

$$\begin{aligned}
 (अ+ब+क)(अ+ब-क) &= (अ+ब)(अ+ब)-कक \\
 &= अअ+बब-कक+२अब \\
 (क+अ-ब)(ब+क-अ) &= (क+अ-ब)(क-अ-ब) \\
 &= कक-(अ-ब)(अ-ब) \\
 &= २अब+कक-अअ-बब \\
 &= २अब-(अअ+बब-कक)
 \end{aligned}$$

वरचे दोन शेवटील उदाहरणांवरून, या पुढील चार पद्धतींचा गुणा-  
कार कर.

अ+ब+क, अ+ब-क, ब+क-अ, क+अ-ब,  
२अअबब+२बबकक+२ककअअ-अअअअ-बबबब-कककक, हा गुणा-  
कार आहे.

खालचे उदाहरणाचे साहाय्याने वरची उदाहरणे करून दाखीव  
आणि खालचेंहि उदाहरण कर.

$$(प+क-र) याचा वर्ग = पप+कक+रर+२पक-२कर-२पर$$

हीं पुढील अनेक प्रकारचीं गुणाकाराचीं उदाहरणे, अभ्यासाकरितां  
केवळ तोंडाने सांगितलीं पाहिजेत.

$$\begin{aligned}
 (अ+बक्ष)(अ+कक्ष) &= अअ+अबक्ष+अकक्ष+बकक्षक्ष \\
 (क्ष+अ)(क्ष+ब) &= क्षक्ष+अक्ष+बक्ष+अब \\
 (क्ष-अ)(क्ष-ब) &= क्षक्ष-क्षक्ष-बक्ष+अब \\
 (क्ष+१)(क्ष-३) &= क्षक्ष-२क्ष-३ \\
 (क्ष-१)(क्ष-३) &= क्षक्ष-४क्ष+३ \\
 (२क्ष+१)(क्ष-१) &= २क्षक्ष-क्ष-१
 \end{aligned}$$

हीं पुढील कसे शिकणाराचे अभ्यासाकरितां लिहिलीं आहेत.

१. जर अ आणि ब हीं भलतीं दोन परिमाणें असतील, आणि यांत  
बपेक्षा अ मोठा असेल, आणि जर, स यांचे बेरिजेचा वर्ग, ड याचे

वजावाकीचा वर्ग, प यांची बेरीज आणि वजावाकी यांचा गुणाकार असेल तर याप्रमाणे होईल;

$$स+ड=२(अ+बब)$$

$$स-ड=४अब$$

$$स+प=२अ(अ+ब)$$

$$स-प=२ब(अ+ब)$$

$$ड+प=२अ(अ-ब)$$

$$प-ड=२ब(अ-ब)$$

२. जर दोन अंकांची वजावाकी केवळ एक एक आहे, तर त्या अंकांचे वर्गांची वजावाकी, त्या अंकांचा बेरिजेबरोबर आहे, आणि जर दोन वेगळाले अपूर्णांक एकत्र मिळून पूर्ण एक एक होईल, जसे  $\frac{1}{४}$  आणि  $\frac{३}{४}$ , तर त्यांची वजावाकी त्यांचे वर्गांचे वजावाकी बरोबर आहे.

३. क्षय-यय आणि रक्षय या दोन पद्धतींचे वर्गांची बेरीज, क्षय-यय यांचे वर्गाबरोबर आहे.

रितीप्रमाणे, अ-ब याचा वर्ग आणि ब-अ याचा वर्ग हे दोन्ही बरोबर आहेत; कां कीं अ-ब याचा वर्ग अअ-२अब+बब आणि ब-अ याचा वर्ग बब-२बअ+अअ हे दोन्ही बरोबर आहेत हे स्पष्ट दिसते, १४ व्या पृष्ठावर पहा, जेव्हां अ बरोबर ब असेल, तेव्हां ब-अ किंवा अ-ब शून्य आहे; परंतु असे नसेल तर अ-ब अथवा ब-अ, या दोहोतील एक तरी अशक्य असावे; कां कीं तसे नसतां अ-ब अथवा ब-अ अशा उदाहरणामध्ये लाहानां-तून मोठे वजा करायाचे अगत्य पडेल. परंतु त्याच कारणावरून, ब-अ अथवा अ-ब या दोहोतून एक तरी अगत्य शक्य असावे; यामुळे त्यांतील शक्य पद्धतीचा वर्ग, अअ+बब-२अब, हाही अगत्य शक्य असावा. म्हणून, जर अ अथवा ब या दोहोतून एक दुसऱ्यापेक्षा अधिक आहे, तर २अब यापेक्षां अअ+बब अगत्य अधिक असावा. जरी बीज कृतीवरून समजण्याजोगे उत्तर निघते तरी ती कृति समजायाजोगी असावी, असा निश्चय करवत नाहीं हेही नजरेस येते. (३-७) अशक्यरूप आहे तथापि (३-७) × (३-७) यांचा गुणाकार आणि (७-३)(७-३) यांचा गुणाकार बीजांतील गुणाकार रितीप्रमाणे सारखा आहे. म्हणजे १६. हा दोष बरा आहे, परंतु त्याचा उपाय पुढे सांगण्यांत येईल; आणि या

ग्रंथांत एथपर्यंत सांगितलें, त्यांत असें पाहण्यांत येतें, कीं ज्ञोपर्यंत कृतीवरून अव्यक्त पद सांपडून त्याचा किमतीनें कृतीची तपासणी पुनः होई, तोंपर्यंत अव्यक्त परिमाणाची किमत काढायास ती कृति खरी आहे किंवा नाही, हें जाणवत नाही.

### भागाकार.

जे भागाकार करायास उघडे, व जे भागाकार करायास उघडे नाहीत, अशा दोन प्रकारांनीं सद्यः बीजांतील भागाकार सांगतो. उदाहरण. अब यास अ याणें भाग, ह्यणजे, अब यांत अ किती वेळा जातो, हें विचारिलें तर, बअ ह्यणजे अब अथवा ब वेळा अ घेतला हें उत्तर आहे; त्या कारणास्तव अब यांत अ हा ब वेळा जातो; यामुळे अब हा अने भागिला तर भागाकार ब आहे. या प्रकारांत भागाकार करण्याची ही पुढील सांगितलेली रीति सर्वापेक्षां सोपी आहे; जेव्हां भाज्यांत, भाजकांतील अक्षरें गुणक असतील तेव्हां तीं अक्षरें दोहोंकडे छेकावीं ह्यणजे भागाकार होतो.

या पुढील उदाहरणांत ही रीति उघड दिसती.

भाज्य	भाजक	भागाकार	भाज्य	भाजक	भागाकार
अब	अ	ब	१२अअक्ष	६अअक्ष	२
अबक	अब	क	२ $\frac{१}{२}$ बयज्ञ	$\frac{१}{४}$ बय	१०ब
२अबक्ष	२क्ष	अब	अअअअ	अअअ	अ
अअबबक्ष	अब	अबक्ष	अअअअ	अअ	अअ
६अबकक	३अबक	२क	क्षयज्ञ	क्षयज्ञ	१

वजाबाकी आणि भागाकार यांचे कल्पनेचे धांदलीमुळे, नवे शिकणारे, ० आणि १ या दोहोंचे गुणांविषयीं बहुतकरून भुक्ततात. हें बहुतकरून भाषेचे फेरफारानें होतें. जर नवे शिकणारास असें विचारिलें कीं ७ यामध्ये ७ किती वेळा जातात, तर तो निःसंशय उत्तर देईल कीं कांहीं वेळा जात नाही; आणि हें उत्तर

एक अर्थी खरेंच आहे, कां कीं ७ मध्ये ७ अनेक वेळा जात ना-  
हींत परंतु, केवळ एक वेळ जातात. आतां बीजांत ही गोष्ट सर्व-  
दां लक्षांत ठेविली पाहिजे कीं वेळा झटल्या असतां, एक वेळा,  
किंवा अनेक वेळा, किंवा एक वेळेचा भाग, किंवा एक वेळा आणि  
एक वेळेचा भाग, किंवा अनेक वेळा, आणि एक वेळेचा भाग,  
हा अर्थ वेळा या शब्दाचा आहे. यामुळे, जरी

क्ष यास क्ष याणें उणा केला असतां शून्य होतें,  
तथापि क्ष यास क्ष याणें भागिला असतां एक होतो,

अ आणि म<sup>अ</sup> हे सारखेच आहेत, असा अपूर्णाकांतील सिद्धांत वर  
सांगितलेल्या उदाहरणास अनुसरून जवळ जवळ आहे. कां कीं अ यास  
म याणें गुणिला असतां म<sup>अ</sup> होतो, आणि म<sup>अ</sup> यास म याणें भागिला  
असतां म<sup>अ</sup> होतो. परंतु गुणक आणि भाजक बरोबर असतील, तर  
गुणाकार करून लागलाच भागाकार केला असतां कोणतेंहि परिमाण  
पहिल्याच रूपासारखें राहातें.

जर अनेक पदांची एक पद्धति आहे, आणि त्यांतील प्रत्येक पदां  
मध्ये एक किंवा अनेक अक्षरें साधारण आहेत, तर गुणाकाराचा रिती  
वरून दुसरी एक पद्धति त्याच साधारण एक अक्षरानें अथवा त्या अक्ष-  
रांचा गुणाकारानें गुणिली इतकी आहे हें स्पष्ट आहे. जसें, अव+अक  
ही व+क गुणिला अ याचे बरोबर आहे; आणि अव-अक ही  
अ-क गुणिला अव याचे बरोबर आहे. यावरून, जेव्हां भलत्ये पद्ध-  
तीस एक किंवा अनेक अक्षरांचे गुणाकारानें भागायाचें आहे, तेव्हां  
भाज्याचे प्रत्येक पदांतून तीं अक्षरें छेकून टाकावीं. परंतु जेथें कोण-  
त्या एक पदाचीं सर्व अक्षरें छेकलीं जातात, त्या ठिकाणीं १ हा अंक  
लिहिण्याचें पकें स्मरण ठेविलें पाहिजे. उदाहरण, अ+अव, भागिला  
अ झणजे १+व याचे बरोबर आहे. आणि अक-अक+अकक, भा-  
गिला अक झणजे १-अ+क यांचे बरोबर आहे.

या गोष्टीविषयीं ही पुढील उदाहरणें, वरचे उदाहरणाप्रमाणें, मां-  
डिलीं आहेत.

भाज्य	भाजक	भागाकार
२अव-२वक+४अवक	२व	अ-क+२अक
अअअ-अअ+अ	अ	अअ-अ+१
६अव-३अ+३व	३	२अव-अ+व
अअव-अवव	अव	अ-व
अक्षक्षय-क्षक्षक्षयय	क्षक्षय	अ-क्षय

अव यांस अ याणें भागायाचें असल्यास या पुढील कृतीनें करावें. अशा कृतीचें फळ  $\frac{अव}{अ}$  हा अपूर्णांक होतो; जाचे, अंश आणि छेद यांस अ याणें भागिलें असतां त्यांचे किमतींत अंतर पडत नाहीं. परंतु त्याचा रूपभेद  $\frac{व}{१}$  ह्मणजे व हा होतो.

वरचे उदाहरणांत अशी कृति अनुपयोगी आहे; परंतु असें मनांत आण, कीं अव यास अक यांणीं भागायाचें आहे. या उदाहरणांत अ, व, आणि क, हे कोणत्या अंकस्थानीं घेतले आहेत, हें कळल्याशिवाय यांचा भागाकार पूर्ण होण्यास अशक्य. परंतु त्या भागाकाराचें रूप  $\frac{अव}{अक}$  अशा चिन्हांनें दाखवितात. वरचे रितीप्रमाणें  $\frac{व}{क}$  असें संक्षेपरूप होतें. या ठिकाणीं भागाकार पूर्ण होत नाहीं, परंतु त्यास संक्षेप देऊन भागाकार अधिक सरळ केला आहे.

$$\frac{२व}{२क} = \frac{व}{क} \quad \frac{अअव}{अक्ष} = \frac{अव}{क्ष} \quad \frac{३अममन}{६अमम} = \frac{मन}{२अ}$$

$$\frac{५}{५क} = \frac{१}{क} \quad \frac{३अव}{अअव} = \frac{३}{अ} \quad \frac{२१विवव}{२८क्षव} = \frac{३विव}{४क्ष}$$

एक पदानें भागिलेल्या अनेक पदांचा पद्धतीस संक्षेपरूप देतां येतें. उदाहरण, क्षय+यज्ञ-ज्ञक्ष यांस क्षयय यांणीं भागिलें असतां या पुढील प्रमाणें होईल.

$$\frac{क्षय}{क्षयय} + \frac{यज्ञ}{क्षयय} - \frac{ज्ञक्ष}{क्षयय} \text{ अथवा } \frac{१}{य} + \frac{ज्ञ}{क्षय} - \frac{ज्ञ}{यय}$$

$$\frac{२वि-क्षक्ष+विक्ष}{विक्ष} = \frac{२}{क्ष} - \frac{क्ष}{वि} + १$$

$$\frac{अ+व+क}{अवक} = \frac{१}{वक} + \frac{१}{अक} + \frac{१}{अव}$$

$$\frac{अ+व}{अअ} = \frac{१}{अ} + \frac{व}{अव} \quad \frac{अअ+१}{अ} = अ + \frac{१}{अ}$$

$$\frac{क्ष+४य-३ज्ञ+२}{६} = \frac{क्ष}{६} + \frac{२य}{३} - \frac{ज्ञ}{२} + \frac{१}{३}$$

वर जें सांगितलें आहे त्यांत भागाकाराचा उघड प्रकार आहे. जांची उत्तरे काढण्यास अधिक कृति केली पाहिजे, त्यांतील एक उदाहरण सांगतों; क्षक्षक्ष + ययय, यांमध्ये क्ष + य किती वेळा जातात? कांहीं वेळपर्यंत अशा कृतीची गरज लागणार नाही, यास्तव ती तकुव ठेऊन तिचे योग्य जागीं पुढें सांगण्यांत येईल. तथापि कांहीं जातीचे उदाहरणांचीं उत्तरे मागील गुणाकाराचे कृत्वांपासून एकदांच निघतील. ३५ आणि ३६ पृष्ठ पाहा. उदाहरण, उघड दिसतें कीं, क्षक्ष-९ यांमध्ये क्ष+३ हे क्ष-३ वेळा जातात.

किसेक अपूर्णाकांस नुसत्या दृष्टीनें संक्षेप देतां येतो त्याविषयीं हीं पुढील उदाहरणें पाहा.

$$\frac{अ+अव}{अ-अव} = \frac{१+ब}{१-ब}$$

$$\frac{अ-अअ}{२अ+अअ} = \frac{१-अ}{२+अ}$$

$$\frac{३क्ष+६क्षक्ष}{९क्षय-३क्ष} = \frac{१+२क्ष}{३य-१}$$

$$\frac{अव+१२अ}{ब+१२} = \frac{अ+३ब}{ब+१२}$$

बीजाचा पद्धतीस कांहीं मिळवून तें लागलेंच वजा केलें; आणि तीस कांहीं अंकानें गुणून तितक्यानें लागलेंच भागिलें; तसेंच जितकें वजा केलें, तितकें लागलेंच मिळविलें. आणि जितक्यानें भागिलें, तितक्यानें लागलेंच गुणिलें; अशा उलटसुलट कृतींनीं किंमत बदलल्यावांचून, बीजाचा पद्धती फिरवून निरनिराळ्या रूपांनें मांडाव्या लागतात. जो क्ष खालीं चार प्रकारांनीं लिहिला आहे त्यावरून ही वरची कृति समजेल.

$$\text{क्ष+अ-अ} \quad \text{क्ष-अ+अ} \quad \frac{\text{अक्ष}}{\text{अ}} \quad \frac{\text{क्ष}}{\text{अ}} \times \text{अ}$$

$$\text{जसें } अ+क्ष = २अ+क्ष-अ = (१+\frac{\text{क्ष}}{\text{अ}})अ$$

$$\text{अअ+२अव-क} = \text{अअ+२अव+बव} - (\text{क+बव})$$

$$= (अ+ब)(अ+ब) - (\text{क+बव})$$

$$\text{बव-४अक} = \text{बव}(१-\frac{४अक}{बव}) = \text{अवक}(\frac{ब}{अक} - \frac{४}{ब})$$

$$म+न = म\text{न}(\frac{१}{न}+\frac{१}{म}) = न(\frac{म}{न}+१) = म(१+\frac{न}{म})$$

$$\frac{\text{क्ष}}{\frac{१}{क्ष}} = \frac{१+क्ष}{\frac{१}{क्ष}(१+क्ष)} = \frac{१+क्ष}{१+१}$$

५ आणि ६ वे पृष्ठ पाहा.



अपूर्ण बीजाचा संक्षेप करण्याचा वेगळ्या रीती जा पुढे येणार त्यांविषयी खाली उदाहरणे लिहिली आहेत. अंकगणितांत अपूर्णाकां-  
विषयी जा रीती सिद्ध झालेल्या आहेत, त्या बीजांतल्या मिलावणी इत्या-  
दिकांचे रीतीसहित लाविल्या आहेत. पुढील उदाहरणे चार प्रकारा-  
नीं दाखविली आहेत आणि प्रत्येक प्रकाराचे आरंभीं एक एक सोपे  
उदाहरण लिहिलेले आहे. आणि त्या उदाहरणाचा उलगाडण्यास  
जी कृति लागती ती बाकी राहिलेल्या उदाहरणांवर लागू होईल.  
प्रथम प्रकार.

$$\frac{अ}{व} = \frac{मअ}{मव}$$

$$\frac{१ + \frac{१}{क्ष}}{१ + \frac{१}{क्षक्ष}} = \frac{(१ + \frac{१}{क्ष})क्षक्ष}{(१ + \frac{१}{क्षक्ष})क्षक्ष} = \frac{क्षक्ष + क्ष}{क्षक्ष + १}$$

$$\frac{वि + \frac{१}{२}}{\frac{२}{३}वि + \frac{१}{४}} = \frac{(वि + \frac{१}{२})१२}{(\frac{२}{३}वि + \frac{१}{४})१२} = \frac{१२वि + ६}{८वि + ३}$$

$$य = \frac{य(य-१)}{य-१} = \frac{यय-य}{य-१} \quad \frac{क्ष}{अ} = \frac{क्षक्ष + अक्ष}{अक्ष + अअ}$$

$$\frac{१}{अ+व} = \frac{अ-व}{अअ-वव} = \frac{अ+व}{अअ+२अव+वव} = \frac{४}{४अ+४व}$$

$$\frac{क्ष-४}{२\frac{१}{२}} = \frac{२क्ष-८}{५} = \frac{४क्ष-१६}{१०} = \frac{२अक्ष-८अ}{५अ}$$

$$\frac{७क्ष-४}{१०} = \frac{\frac{१}{२}(७क्ष-४)}{\frac{१}{२}(१०)} = \frac{३\frac{१}{२}क्ष-२}{५}$$

$$\frac{\frac{१}{अ} + \frac{१}{अव}}{व-अ + \frac{१}{व}} = \frac{अव(\frac{१}{अ} + \frac{१}{अव})}{अव(व-अ + \frac{१}{व})} = \frac{व+१}{अवव-अअव+अ}$$

दुसरा प्रकार.

$$अ + \frac{क्ष}{व} = \frac{अय+क्ष}{य} \quad अ - \frac{क्ष}{व} = \frac{अव-क्ष}{य} \quad \frac{क्ष}{य} - अ = \frac{क्ष-अय}{य}$$

$$१ - \frac{१}{क्ष} = \frac{क्ष-१}{क्ष} \quad \frac{क्ष-१}{क्ष} = \frac{क्षक्ष-१}{क्ष}$$

$$\begin{aligned}
 २ - \frac{य-१}{य+१} &= \frac{२य+२-(य-१)}{य+१} = \frac{य+३}{य+१} \\
 अ - \frac{अअ}{अ+व} &= \frac{अव}{अ+व} & अ - \frac{अव}{अ+व} &= \frac{अअ}{अ+व} \\
 अ+व - \frac{अअ-२अव}{अ+व} &= \frac{४अव+वव}{अ+व} \\
 अ+व + \frac{अअ-२अव}{अ+व} &= \frac{२अअ+अव}{अ+व} \\
 \frac{य+१}{य-१} + \frac{य+१}{य+१} &= \frac{य+यय}{य-१} = य \frac{य+१}{य-१} \\
 \frac{अ+व-क}{अ-क} - २ &= \frac{व-अ+क}{अ-क} & \frac{क्ष-क्ष}{य-य} &= \frac{क्ष-क्षय}{य} \\
 \frac{अव+वक+कअ}{अ+व+क} - क &= \frac{अव-कक}{अ+व+क}
 \end{aligned}$$

तिसरा प्रकार.

$$\begin{aligned}
 \frac{अ}{व} + \frac{क्ष}{य} &= \frac{अय+वक्ष}{वय} & \frac{अ}{व} - \frac{क्ष}{य} &= \frac{अय-वक्ष}{वय} \\
 \frac{अ+व}{अ-व} - \frac{अ-व}{अ+व} &= \frac{(अ+व)(अ+व) - (अ-व)(अ-व)}{(अ-व)(अ+व)} = \frac{४अव}{अअ-वव} \\
 \frac{१}{क्ष} + \frac{१}{य} &= \frac{क्ष+य}{क्षय} & \frac{क्ष}{य} + \frac{य}{क्ष} &= \frac{क्षक्ष+यय}{क्षय} \\
 \frac{अ+व}{क+उ} - \frac{अ}{क} &= \frac{कव-अउ}{कक+कउ} & \frac{अ-व}{क-उ} - \frac{अ}{क} &= \frac{अउ-वक}{कक-कउ} \\
 \frac{क्ष}{क्ष+य} - \frac{य}{क्ष-य} &= \frac{क्षक्ष-२क्षय-यय}{क्षक्ष-यय} & \frac{प}{क} + \frac{क}{पप} &= \frac{पपप+कक}{पपक}
 \end{aligned}$$

चवथा प्रकार.

$$\begin{aligned}
 \frac{अ}{व} \times \frac{क्ष}{य} &= \frac{अक्ष}{वय} & \frac{अ}{व} \div \frac{क्ष}{य} &= \frac{अय}{वक्ष} \\
 \frac{क्ष-१}{क्ष+१} \times \frac{क्ष+२}{क्ष-१} &= \frac{(क्ष-१)(क्ष+२)}{(क्ष+१)(क्ष-१)} = \frac{क्ष+२}{क्ष+१} \\
 \frac{२अव}{अ+व} \div \frac{अ-व}{३अ} &= \frac{६अव}{अअ-वव} & \frac{३अक्ष}{यय} \times \frac{यवि}{२क्ष} &= \frac{३अवि}{२य} \\
 \frac{म}{अन} \div \frac{२म}{३वन} &= \frac{३व}{२अ} & \frac{पक}{ककई} \times \frac{३कक}{कई} &= \frac{३पक}{कई}
 \end{aligned}$$

वर चार प्रकारांनीं जितकीं उदाहरणे सांगितलीं आहेत, त्यांचा नव्या शिकणारांनीं स्वतां दृढ अभ्यास करून, खांशीं अगळ पक्ष माहित व्हावे; सद्यः यापेक्षां अधिक उदाहरणांचा अभ्यास करण्याचे

प्रयोजन नाही ; कां कीं दुसरे उदाहरणाविषयीं यापेक्षां चांगली रीति पुढें येईल.

वर जें सांगितलें, तें केवळ निखालस अंकगणितानुरूप आहे, जीं अक्षरें घेतलीं तीं केवळ अंकांचीं संक्षेप चिन्हे आहेत असें मानावें, आणि सर्व एकरूप समीकरणें हीं केवळ गणितांतील प्रतिज्ञांचीं संक्षेपरूपें आहेत, असेंहि मानावें. असें,

$$(अ+ब)(अ+ब)=अअ+२अब+बब$$

ही पद्धति या पुढील वाक्याचा अर्थ दाखविती ; जर दोन अंकांची मिळवणी घेतली, आणि ती त्याच बेरिजेनें गुणली तर जें फळ उत्पन्न होतें, तें आणि प्रत्येक अंक त्यांणीं तेच गुणावे आणि त्या गुणाकारांचे बेरिजेस त्या अंकांचे गुणाकाराची दुप्पट मिळवावी, हीं दोन्हीं बरोबर आहेत.

जर कांहीं अंक देऊन, त्यांशीं कांहीं एक कृति करायास सांगितली असेल, तर त्यास अंकगणितानुरूप कृत्य ह्मणतात ; ह्मणजे कांहीं दिलेल्या अंकांशीं सांगितलेली कृति केली, तर काय अंक उत्पन्न होईल. असें २५ आणि ३०० यांचे गुणाकाराचा पंनासावा भाग काय आहे.

बीज गणितानुरूप कृत्यांत अंक दिलेले असतात, अथवा दिले आहेत अशी कल्पना असती हें पुढें समजण्यांत येईल ; आणि त्यांत असा प्रश्न असतो जाचें इच्छाफळ कोणते कृतीवरून उत्पन्न होईल. हें एकदांच लक्षांत येत नाही, तसे जातीचा प्रश्न एथें खालीं सांगितला आहे ; ३, आणि, १७ हे दोन अंक दिलेले आहेत ; तर तो अंक काय आहे, कीं जितक्यानें त्याचें अर्ध ३ पेक्षां अधिक आहे, तितक्यानें त्याची दुप्पट १७ पेक्षां उणी आहे ? या उदाहरणांत हे पुढील प्रश्न केले आहेत. १. असा अंक आहे कीं काय ? २. जर आहे, तर ३ आणि १७ यांशीं कोणती कृती केल्यानें तो अंक निघेल ? ३. त्या कृतीचें फळ अथवा इच्छिलेला अंक काय आहे ? पुढें शिकणाराचे लक्षांत येईल, कीं त्या प्रश्नांस ही उत्तरे आहेत, कीं असा अंक आहे खरा, आणि तो ३ आणि १७ यांचे बेरिजेचे दोन पंचमांश घेतल्यानें सांपडतो, आणि यामुळे तो अंक ८ आहे.

जर पहिल्या दोन प्रश्नांनींच निर्वाह झाला असता, तर प्रश्नांमध्ये ३ आणि १७ हे दोन अंक आहेत, असें सांगण्याचें प्रयोजन पडलें

नसतें; कारण कीं, तेंच कृत्य कोणत्याहि दुसऱ्या अंकावर लावतां आले असतें; आणि ते अंक कोणतेहि असोत, ते उलगडण्याची रीति एकसारिखीच रहाती, हें पुढें दिसेल, ह्मणजे जर हा पुढील प्रश्न केला; अ आणि ब, हे दोन अंक दिले आहेत, त्यांत ब मोठा आणि अ लहान, तर तो अंक काय आहे, कीं जितक्यानें त्याचें अर्ध अपेक्षां अधिक आहे तितक्यानें त्याची दुप्पट ब पेक्षां उणी होईल? याचें उत्तर  $\frac{2}{3}$  (अ+ब) आहे, आणि याचा ताळा या पुढीलप्रमाणें आहे.

$\frac{2}{3}$  (अ+ब) याची दुप्पट  $\frac{4}{3}$  (अ+ब), अथवा  $\frac{4}{3}$  अ +  $\frac{4}{3}$  ब याचे बरोबर आहे. हें ब पेक्षां ब - ( $\frac{4}{3}$  अ +  $\frac{4}{3}$  ब) इतक्यानें उणें आहे, अथवा ब -  $\frac{4}{3}$  अ -  $\frac{4}{3}$  ब, अथवा  $\frac{1}{3}$  ब -  $\frac{4}{3}$  अ राहातात; परंतु  $\frac{2}{3}$  (अ+ब) याचें अर्ध  $\frac{1}{3}$  (अ+ब) आहे, हें अहून  $\frac{1}{3}$  (अ+ब) - अ इतक्यानें अधिक आहे, अथवा  $\frac{1}{3}$  अ +  $\frac{1}{3}$  ब - अ, अथवा  $\frac{1}{3}$  ब -  $\frac{4}{3}$  अ राहातात, हें,  $\frac{2}{3}$  (अ+ब) याची दुप्पट जितक्यानें ब पेक्षां कमी आहे, तितक्याबरोबर आहे हें सिद्ध. आतां, पहा, कीं बरोबर उदाहरणावरून हें कृत्य उलगडण्याची सामान्य रीति कळेल असेंच केवळ नाहीं, तर तें उदाहरण, कोणकोणत्या पक्षांनीं अशक्य आहे, हेंहि सापसून कळतें; कारण कीं, जर  $\frac{1}{2}$  ब हा  $\frac{4}{3}$  अ यापेक्षां अधिक किंवा उणा तरी नसला, ह्मणजे जर ब हा, ४अ, यापेक्षां अधिक नसला, तर बरोबर उत्तर  $\frac{1}{2}$  ब -  $\frac{4}{3}$  अ हें, बरोबर मोष्टीचा अधिकपणा किंवा उणेपणा दाखवितें, तेव्हां तें विरुद्ध आहे. जेथें ब बरोबर १७, आणि अ, बरोबर ३ घेतले, तेथेंच अशी विरुद्ध मोष्ट घडली जर असें नसेल तर हें कृत्य अशक्य आहे, असें जाणावें; उदाहरण, शिकणारानें शोधून पहावें, कीं असा कांहीं पूर्ण किंवा अपूर्ण अंक आहे कीं काय, कीं जाची दुप्पट ११ हून जितक्यानें कमी आहे, तितक्यानें त्याचें अर्ध ३ पेक्षां अधिक आहे. या कृत्यांत विरोध अगत्य असावा; विरोध खचित कळल्यानंतर, तो कसकसा घडतो याचा विचार केला, तर या पुढील रितीनें स्पष्ट दिसतें; शिष्टिलेव्या अंकाचें अर्ध ३ यापेक्षां अधिक असतें, ह्मणून तो, ६ पेक्षां अधिक असतना. आणि त्याची दुप्पट ११ हून उणी असावी ह्मणजे ती संख्या  $\frac{5}{2}$  पेक्षां उणी होत नाही; परंतु जी संख्या ६ पेक्षां अधिक आहे, ती  $\frac{5}{2}$  पेक्षां उणी होत नाही; यामुळे दोन भागांत परस्पर विरोध येतो.

यावरून समजण्यांत येतें, कीं जें कांहीं कृत्य सांगण्यांत येईल, तें अशक्य किंवा विरुद्ध असतें किंवा त्यास उलगडवत नाहीं. परंतु, दुसऱ्या पक्षां, असें कृत्य सांगण्यांत येतें, कीं जाचीं अनंत उत्तरें असतात ह्मणून अशांस अनंत कृत्यें ह्मणतात. अशक्य कृत्यांमध्ये, कित्येक अशीं येतात, कीं त्यांचा अशक्यपणा उघड असतो; जसें याप्रमाणें, असा पूर्णांक काढ कीं जो ७ यांचे अर्धा बरोबर होईल; परंतु दुसरीं उदाहरणें अशीं आहेत, कीं जांचा अशक्यपणा शोधून काढावा लागतो; जसें, १० यांस पूर्ण किंवा अपूर्ण भागांत विभाग, असें कीं त्या भागांचा गुणाकार ३० होईल. तसें अनंत कृत्यांमध्ये अशीं असतात, कीं त्यांचे उत्तरांचा अनंतपणा उघड असेल, आणि दुसऱ्यामध्ये त्यांचा अनंतपणा उघड दिसत नाहीं. उदाहरण, असे दोन विषय अंक काढ कीं जांची बेरीज सम अंक होईल! याचें उत्तर कोणतेहि दोन विषय अंक, हें उघड आहे; आणि ते दोन अंक काय आहेत, कीं जांचे बेरीजेचें अर्ध त्यांचे वजावाकीचे अर्धाशीं मिळविले असतां, मोठे अंकाबरोबर होईल. याचें उत्तर जरी पहिल्याप्रमाणें स्पष्ट नाहीं, तरी कोणतेहि दोन अंक, हें उत्तर आहे. कृत्यांचे, वरचे सांगितले दोन प्रकारांमध्ये, असे जातीचीं कृत्यें असतील, कीं कित्येकांस १००० उत्तरें, दुसऱ्यांस, ९९९ इत्यादि, उतरत उतरत, एक उत्तरपर्यंत असतील, अशी गोष्ट मनांत आणतां येईल. आणि एकादें कृत्य अशक्य आहे, असें जाणल्यावर त्याचा अशक्यपणा कां होतो, हें विचारायास आपणास योग्य दिसेल! कृत्यांतील कोणते दोन भाग परस्परांस विरुद्ध आहेत, आणि त्यांचा विरोध कशामुळे येतो? ह्मणजे कृत्यास, शक्यरूप देण्यासाठीं, संकेतांमध्ये कोणकोणत्या तऱ्हेचा, आणि किती रूपभेद करावा लागेल!

ह्या सर्व प्रश्नांस, अंकगणितांनै उत्तर देण्यास कांहींच साधन नाहीं; याजकरितां, अंकगणिताहून बीजगणित भिन्न जातीची विद्या आहे, असें मानावें लागतें, आणि बीजांत जे विषय आहेत, ते अंकगणितांत नाहीत; यामुळे बीजगणितांमधील बोलण्याची सरणी, आणि कृत्य करण्याची रीति, आणि अर्थ सांगण्याची चाल, हीं तीनहि अंकगणितांत नाहीत.

शिकणारा, जासमयीं बीजगणित विद्या शिकायास आरंभ करितो, त्यासमयीं, किंवा त्याचे अगोदर त्याणें भूमितिविद्येचा थोडा अभ्यास

केला असतां, बरें पडेल. असें केल्यानें त्यास हें समजेल, कीं भूमितीचे सर्व प्रश्न, अगोदरच, त्यासाठीं तयार केलेले आहेत, ह्मणजे, सर्व कारणां, इत्यादि, त्याचे दृष्टीपुढेंच ठेविलेलीं आहेत, आणि क्रमाक्रमानें प्रश्न पक्का समजून कबूल करावा, इतकेंच मात्र त्यास करावें लागेल. यास एकीकरण, ह्मणजे, एकत्र करण्याची रीति; आणि त्या रीतीचे विपरीत कृतीस, पृथक्करण, ह्मणजे वेगळेंवेगळें करण्याची रीति ह्मणतात. पृथक्करण ह्मणजे कृत्याचे अवयव वेगळेवेगळे करणें, ह्मणजे सर्व कृत्याचें मनन करून, त्याचीं पदे अधिक अधिक सरळ रूपांत आणून, शेवटीं तें कृत्य उलगडण्यास, किंवा त्याचे सखतेचा ताळा पाहाण्यास, कोण-कोणत्या कल्पना केल्या पाहिजेत, हा विचार करावा लागतो.

आतां पृथक्करण रूपानें बीजगणिताचीं मूळ प्रकरणें, किंवा सिद्धता स्थापून दाखविण्याविषयीं पुढें चालवितों; बीजाची रचना नवीं नावें, किंवा, नवीं मुळें घेऊन, सदाः करावी; त्याचे जागीं जें अंकगणित आपणास माहित आहे, त्यापासून आरंभ करितों; आणि जोंपर्यंत दुसरे सर्व विचारांचे कामाची गरज पडे, तोंपर्यंत त्यांस सोडून देतों. यापासून पाहाण्यांत येईल, कीं, जे पहिल्यानें कर्धाहि मनांत आले नवते, असे एकामागें एक नवे नवे निश्चितार्थ उत्पन्न होतील, आणि तेणेंकरून एक नवी भाषा बोलण्याची गरज पडेल, आणि चिन्हांस नवे नवे अर्थ द्यावे लागतील, हें कसें करावें, आणि तें कोणत्या परिणामास जाईल, हें समजण्याविषयीं, शिकणारानें पुढील प्रथम अध्याय शिकावा; या-शिवाय दुसरा कांहीं मार्ग दाखवितां येत नाहीं.

# बीजगणित मूळ पीठिका.

## पहिला अध्याय.

### एकवर्ण समीकरणांविषयीं.

आतां एकवर्ण समीकरणें उलगाडण्याची रीति दाखवितों. एकवर्ण समीकरण काय आहे, त्याचा अर्थ अगोदर सांगितला पाहिजे.

बहुतकरून, पदाचा वर्ण जाणायास, त्या पदांतील अक्षरें मोज. जसें, अबक, हें पद तीन वर्णांचें आहे; अबक, हें पद चार वर्णांचें आहे; कां कीं, जरी त्यांत केवळ तीन वेगळाल्या जातीचीं अक्षरें आहेत, तथापि त्यांतलें एक अक्षर दोन वेळा येतें. हीं पुढील उदाहरणें आहेत;

अ, ब, क, क्ष, ज्ञ, य, इत्यादि, एकवर्णांचीं पदे आहेत.

अअ, बब, कक्ष, बक, यज्ञ, इत्यादि, दोन वर्णांचीं पदे आहेत.

अअअ, अबब, अबब, अबक, पअक, इत्यादि, तीन वर्णांचीं पदे आहेत. आणि याप्रमाणें पुढेंहि.

कोणत्याहि सांगितलेल्या अक्षरांविषयीं, पदाचा वर्ण काढायाचा असल्यास, केवळ तींच अक्षरें मोज. जसें ३अअक्षक्षय, हें पांच वर्णांचें पद, क्ष आणि य, या दोन अक्षरांविषयीं, तीन वर्णांचें आहे; अ आणि क्ष, यांविषयीं, चार वर्णांचें आहे, नुसते क्ष याविषयीं दोन वर्णांचें आहे, नुसते य विषयीं, एक वर्णांचें आहे, आणि याप्रमाणें पुढेंहि. जर कांहीं एक पदांत क्ष अगदी नाहीं, तर तें पद, क्ष विषयीं, काहींच वर्णांचें नाहीं, ह्मणजे क्षचे संबंधांचून आहे.



समीकरणाचा कोणत्याही पदामध्ये जा एके अक्षराचा मोठा वर्ण असेल, त्या अक्षराविषयी, त्या समीकरणाचाही वर्ण, तोच आहे. जसे हें पुढील समीकरण.

$$\text{क्षक्ष}-\text{ज्ञक्षक्ष} = \text{यज्ञ}-\text{ययक्ष}$$

हें समीकरण क्षविषयी तीन वर्णांचें, यविषयी दोन वर्णांचें, आणि ज्ञविषयी एक वर्णांचें आहे.

संकेत समीकरण उलगडण्याचें हें पुढील कृत्त्य आहे; एक संकेत समीकरण दिलें आहे, त्यांत एक अक्षराची किंमत अव्यक्त आहे; जा अंकाचा स्थळीं तें अव्यक्त अक्षर आहे, तो अंक कोणता; असा कीं तें समीकरण खरें होईल? असे एकापेक्षां अधिक अंक आहेत कीं काय? जर आहेत, तर ते किती, आणि कोणकोणते? अथवा असा अंक नाहीं कीं काय, ह्मणजे, तें समीकरण अशक्य आहे कीं काय? अशक्य असलें, तर त्याचा अशक्यपणा कशानें कळेल?

काहीं उदाहरणांवासून या गोष्टीची अटकळ चांगली समजण्यांत येईल, जांचा खरेपणा शिकणारानें ताडून पाहावा.

$$२\text{क्ष}-१=५\text{क्ष}-१९$$

जेव्हां  $\text{क्ष}=६$  असतील, तेव्हांच मात्र हें समीकरण खरें आहे.

$$२\text{क्ष}-१=५\text{क्ष}+१२$$

यांत क्ष कोणत्याही अंकस्थळीं असला तर हें समीकरण खरें होऊ शकत नाहीं.

$$१६\text{क्ष}=४\angle+\text{क्षक्ष}$$

हें समीकरण जेव्हां  $\text{क्ष}=४$  असतील, तेव्हां खरें आहे, आणि  $\text{क्ष}=१२$  असतील, तेव्हांही खरें आहे; परंतु दुसऱ्या कोणत्याही पक्षीं खरें नाहीं.

$$१२क्ष = ४८ + क्षक्ष$$

यांत क्षची किंमत कोणताहि अंक असो, तरी हें समीकरण खरें होऊं शकत नाहीं.

$$क्षक्ष + ११क्ष = ६क्ष + ६$$

जेव्हां क्ष=१, किंवा २, किंवा ३, असें असेल, तेव्हां हें समीकरण खरें आहे; परंतु दुसऱ्या कोणत्याहि पक्षां खरें नाहीं.

खरेपणा जाणायासाठीं वरचे उदाहरणांत, क्ष=४, असें समजून उलगाडून पहा. तर

$\begin{array}{r} क्षक्ष = ६४ \\ ११क्ष = ४४ \\ \hline क्षक्ष + ११क्ष = १०८ \end{array}$	$\begin{array}{r} ६क्ष = ९६ \\ + ६ = ६ \\ \hline ६क्ष + ६ = १०२ \end{array}$
---	--

परंतु  $१०८ = १०२$  हें खरें नाहीं; यास्तव क्षक्ष+११ ही पद्धति ६क्ष+६ यांबरोबर नाहीं; ह्मणून क्ष=४ हे या समीकरणास स्थापीत नाहींत.

आतां कांहीं उघड खऱ्या गोष्टी सांगतो;

१. बरोबर अंकांशीं बरोबर अंक मिळविले असतां, त्यांची बेरीज बरोबर होईल. ह्मणजे जर अ=ब आणि क=ड, तर अ+क=ब+ड. जर अ=ब-क, आणि क्ष=प-क, तर अ+क्ष=(ब-क)+(प-क)=ब+प-क-क. जर अ=क्ष-य, आणि ब=क्ष+य, तर अ+ब=(क्ष-य)+(क्ष+य)=क्ष-य+क्ष+य=२क्ष. जर अ=ब+क, तर अ+ब=ब+क+ब.

२. बरोबर अंकांतून बरोबर अंक वजा केले, तर, त्यांची वजाबाकी बरोबर होईल. ह्मणजे, जर अ=ब आणि क=ड, तर अ-क=ब-ड. जर अ=प-क आणि ब=प-२क, तर अ-ब=(प-क)-(प-२क)=प-क-प+२क=क. जर अ=ज्ञ+य, तर अ-म=ज्ञ+य-म.

३. बरोबर अंक बरोबर अंकांनीं गुणिले, तर, त्यांचे गुणाकार बरोबर होतील. ह्मणजे, जर  $अ=ब$  आणि  $क=ड$ , तर  $अक=बड$ . जर  $अ=ब+क$  आणि  $ज्ञ=न$  तर,  $अज्ञ=न(ब+क)=नब+नक$ . जर  $ड=ल-व$ , तर  $२ड=२ल-२व$ .

$$\text{जर } \frac{क्ष}{२} + \frac{क्ष}{३} = १$$

$$\text{तर } २\frac{क्ष}{२} + २\frac{क्ष}{३} = २, \text{ अथवा } क्ष + २\frac{क्ष}{३} = २$$

$$३क्ष + २\frac{२क्ष}{३} = ६$$

$$\text{अथवा } ३क्ष + २क्ष = ६$$

४. बरोबर अंक बरोबर अंकांनीं भागिले, तर त्यांचे भागाकार बरोबर होतील. ह्मणजे, जर  $अ=ब$  आणि  $क=ड$ , तर  $\frac{अ}{क} = \frac{ब}{ड}$ . जर  $म=न$ , तर  $\frac{म}{उ} = \frac{न}{उ}$ . जर  $अ=ब-क$  आणि  $प+क=ज्ञ$ , तर  $\frac{अ}{प+क} = \frac{ब-क}{ज्ञ}$ . जर  $७क्ष=१४$ , तर  $\frac{७क्ष}{७} = \frac{१४}{७}$  अथवा  $क्ष = २$ .

समीकरणें उलगडतेसमयीं वारंवार मिळवणी, वजाबाकी, इत्यादि करायास सांगण्याचें प्रयोजन पडेल, ह्मणून संक्षेपानें दाखविण्यासाठीं या पुढीलप्रमाणें चिन्हे करितात.

(+)अ याचा अर्थ हाच, कीं वरील समीकरणाचे दोन्ही बाजूंस अ मिळवायाचा आहे.

(-)अ याचा अर्थ हाच, कीं वरील समीकरणाचे दोन्ही बाजूंतून अ वजा करायाचा आहे.

(×)अ याचा अर्थ हाच, कीं वरील समीकरणाचे दोन्ही बाजूंस अने गुणायाचें आहे.

(÷)अ याचा अर्थ हाच आहे, कीं वरील समीकरणाचे दोन्ही बाजूंस अ याणें भागायाचें आहे.

(+)(-)(×) आणि (÷) जेव्हां यांतील नुसतें एक चिन्ह अक्षरावांचून मांडिलें असेल, तेव्हां त्याचा अर्थ हाच होईल, कीं वरचे दोन समीकरणांची, मिळवणी, वजाबाकी, इत्यादि करायाची आहे.

वर सांगितलेले संक्षेप या पुढील उदाहरणावरून समजतील.

## एकवर्ण समीकरण.

५५

१.  $अ = ब - क$   $अ - ब = क + क्ष$

(+) क  $अ + क = ब$  (+) ब  $अ = क + क्ष + ब$

२.  $क - ड = ल - म$   $२क्ष - ३ = ९$

(+) ड + म  $क + म = ल + ड$  (+) ३  $२क्ष = १२$

३.  $प + क = अ - ब$   $११क्ष + १८ = १००$

(-) क  $प = अ - ब - क$  (-) १८  $११क्ष = ८२$

४.  $प + क - ज्ञ = ३अ + ४$

(-) क - ज्ञ  $प = ३अ + ४ - क + ज्ञ$

५.  $\frac{क्ष}{२} - \frac{क्ष}{३} + \frac{२७}{४} = \frac{७क्ष}{६} - \frac{५क्ष}{१२} + \frac{३}{४}$

(x) १२  $\frac{१२क्ष}{२} - \frac{१२क्ष}{३} + \frac{३२४}{४} = \frac{८४क्ष}{६} - \frac{६०क्ष}{१२} + \frac{३६}{४}$

अथवा  $६क्ष - ४क्ष + ८१ = १४क्ष - ५क्ष + ९$

६.  $अक्ष = ब$   $(अ + ब)क्ष = क$

(÷) अ  $क्ष = \frac{ब}{अ}$  (÷)  $\overline{अ + ब}$   $क्ष = \frac{क}{अ + ब}$

७.  $अ - ब + २क - ३ड = क्ष - अ + ब$

$ब + ३क - २ड = ४क्ष - अ - २ब$

(+)  $अ + ५क - ५ड = ५क्ष - २अ - ब$

८.  $२अक्ष = ब - ज्ञ$

$अ = \frac{ब - ज्ञ}{२}$

(÷)  $२क्ष = \frac{ब - ज्ञ}{ब + ज्ञ}$

(५१ आणि ५२) या दोन पृष्ठांतील गोष्टी आणि वर सांगितलेल्या कृती यांवरून, एक अव्यक्त पदाचा एकवर्ण समीकरणाचें उलगडणें सांगतों.

१. या समीकरणाचा खरेपणा स्थापायास, क्षची किंमत काय असावी.

$$\begin{aligned} 3x-7 &= x+19 \\ (+)7 \quad 3x &= x+26 \\ (-)x \quad 2x &= 26 \\ (\div)2 \quad x &= 13 \end{aligned}$$

તાલ્યા જર  $x = 13$ , તર  $3x-7 = 32$   
 $x+19 = 32$

૨.  $3x+16 = 10x+9$   
 $(-)3x \quad 16 = 7x+9$   
 $(-)9 \quad 7 = 7x$   
 $(\div)7 \quad 1 = x$

તાલ્યા જર  $x = 1$  તર  $3x+16 = 19$   
 $10x+9 = 19$

૩.  $20x-13 = 102\frac{1}{2}-x$   
 $(+)1x \quad 20x = 119\frac{1}{2}-x$   
 $(+)x \quad 21x = 119\frac{1}{2}$   
 $(\div)21 \quad x = \frac{239}{42} = 5\frac{1}{2}$

તાલ્યા જર  $x = 5\frac{1}{2}$  તર  $20x-13 = 107$   
 $102\frac{1}{2}-x = 107$

૪.  $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 1 - \frac{x}{4}$   
 $(\times)2 \quad x + \frac{2x}{3} = 2 - \frac{x}{2}$   
 $(\times)2 \quad 2x + \frac{4x}{3} = 4 - x$   
 $(\times)3 \quad 6x + 4x = 12 - 3x$   
 $(+)3x \quad 10x + 4x + 3x = 12$

છાળજે  $13x = 12$   
 $(\div)13 \quad x = \frac{12}{13}$

ताळा जर क्ष =  $\frac{12}{13}$  तर,  $\frac{क्ष}{2} + \frac{क्ष}{3}$  अथवा  $\frac{५}{६} क्ष = \frac{12}{13}$  चे  $\frac{५}{६} = \frac{10}{13}$   
 आणि  $१ - \frac{क्ष}{४} = १ - (\frac{12}{13} \text{ चे } \frac{१}{४}) = १ - \frac{3}{13} = \frac{10}{13}$

या समीकरणाचे दोन्ही बाजूस २, ३, ४, या अंकांचे कोणत्याही साधारण गुणाकाराने गुणिले असता, सहज उलगडा होतो. याविषयी लघुतम गुणाकार फार उपयोगी आहे. ही गोष्ट समजण्यासाठी मागले उदाहरण करून पाहिले असता, ध्यानांत येईल;

$$\frac{क्ष}{2} + \frac{क्ष}{3} = १ - \frac{क्ष}{४}$$

आतां २, ३, आणि ४, यांचा साधारण गुणाकार ३६ आहे.

$$(\times) ३६ \quad \frac{३६क्ष}{२} + \frac{३६क्ष}{३} = ३६ - \frac{३६क्ष}{४}$$

$$\text{अथवा } १८क्ष + १२क्ष = ३६ - ९क्ष$$

$$(+ ) ९क्ष \quad १८क्ष + १२क्ष + ९क्ष = ३६$$

$$\text{ह्मणजे, } ३९क्ष = ३६$$

$$(\div) ३९ \quad क्ष = \frac{३६}{३९}$$

$$\text{अतिसंक्षेपेकरून } क्ष = \frac{12}{13}$$

आतां लघुतम गुणाकाराने कृति करून पहा.

२, ३, ४, यांचा लघुतम गुणाकार १२ आहे.

$$\frac{क्ष}{२} + \frac{क्ष}{३} = १ - \frac{क्ष}{४}$$

$$(\times) १२ \quad \frac{१२क्ष}{२} + \frac{१२क्ष}{३} = १२ - \frac{१२क्ष}{४}$$

$$\text{अथवा } ६क्ष + ४क्ष = १२ - ३क्ष$$

$$(+ ) ३क्ष \quad ६क्ष + ४क्ष + ३क्ष = १२$$

$$१३क्ष = १२$$

$$(\div) १३ \quad क्ष = \frac{12}{13}$$

८

यांत वरप्रमाणे संक्षेपकरण्याचें प्रयोजन नाहीं.

५.

$$अब+अ-ब=१$$

या उदाहरणांत, आणि वरचे सर्व उदाहरणांत, भेद हाच आहे, कीं वरचांत एक अव्यक्त परिमाण आहे, आणि यांत दोन अव्यक्त परिमाणें आहेत. याचें खरें उत्तर हेंच, कीं या समीकरणास स्थापित करायसाठीं, अ आणि ब यांचा पुष्कळ किमती आहेत. ब ची भलती किंमत घेतली, तर त्या घेतलेले किमतीचे सहाय्यानें, अची किंमत काढितां येईल. या दोन किमतीनीं, हें समीकरण स्थापिलें जाईल. जसें,  $ब=१२$  असें होऊं शकतें कीं नाहीं ? असें विचारिलें तर वरचे समीकरणांत बचे स्थळीं १२ मांडून पहा, तेव्हां याप्रमाणें होईल.

$$१२अ+अ-१२=१$$

$$\text{अथवा } १३अ-१२=१$$

$$(+)१२$$

$$१३अ=१३$$

$$(\div)१३$$

$$अ=१$$

उत्तर हेंच, कीं, जर  $अ=१$ , तर  $ब=१२$  होऊं शकतात. यापक्षीं  $अब=१२$ . आणि  $१२+१-१२=१$ .

ब ची कांहीं विशेष किंमत घेतल्याशिवाय, मनांत आणावें, कीं त्याची किंमत दिलेली आहे; तर समीकरणाचे पहिले बाजूचा व्यक्त ब त्याच समीकरणाचे दुसरे बाजूस व्यक्त एक आहे, त्याशीं कशे तऱ्हेनें संयोग करावा, ह्मणजे बला भलती कांहीं विशेष किंमत दिल्यावर, अची किंमत काढायाची रीति समजेल. वरचें समीकरण पुनः मांड.

$$अब+अ-ब=१$$

$$(+)\text{ब}$$

$$अब+अ=१+ब$$

परंतु,  $अब+अ$  हे, अ एक अधिक ब वेळा घेतला, याचे बरोबर आहेत; ह्मणजे  $अब+अ=(१+ब)अ$ .



याजकरिता,  $(१+ब) अ=१+ब$

$$(\div) १+ब$$

$$अ = \frac{१+ब}{१+ब} = १$$

तर, उत्तर हेंच, कीं,  $अ=१$  असें असेल, तर बची किंमत हवी ती होईल.

ताळा

जर  $अ = १$ , तर

$$अब+अ-ब = ब+१-ब = १.$$

जांची अगा नसत्ये, अशीं फलें बीजगणित रितीनें, किती त्वरेनें उत्पन्न होतात, तीं दाखविण्यासाठीं, हें उदाहरण दिलेलें आहे. आज पुढें एक दुसरे उदाहरण देतो.

६.

$$क्षय = क्ष+य+१$$

यांत यची किंमत व्यक्त आहे, असें जाणून, क्षची किंमत काढायाची आहे.

$(-)$ क्ष

$$क्षय-क्ष = य+१$$

परंतु, क्षय-क्ष ही पद्धति क्ष, य-१ एक वेळा घेतला, इतकी आहे; अथवा

$(य-१)क्ष$ . याजकरितां  $(य-१)क्ष = य+१$

$$(\div) य-१$$

$$क्ष = \frac{य+१}{य-१}$$

विशेषपक्ष.

$$य = ५ \text{ हे घे, तर}$$

$$क्ष = \frac{५+१}{५-१} = \frac{६}{४} = \frac{३}{२}$$

ताळा

$$क्षय = \frac{३}{२} \times ५ = \frac{१५}{२}$$

$$क्ष+य+१ = \frac{३}{२} + ५ + १ = \frac{३}{२} + \frac{१०}{२} + \frac{२}{२} = \frac{१५}{२}$$

सामान्य ताळा क्ष =  $\frac{य+१}{य-१}$  तर क्षय =  $\frac{य.य+१}{य-१}$

$$\begin{aligned}
 क्ष+य+१ &= \frac{य+१}{य-१} + य+१ \\
 &= \frac{य+१}{य-१} + \frac{य.य-१}{य-१} + \frac{य-१}{य-१} \\
 &= \frac{(य+१)+य(य-१)+(य-१)}{य-१} \\
 &= \frac{य+१+यय-य+य-१}{य-१} \\
 &= \frac{यय+य}{य-१} = \frac{य(य+१)}{य-१}
 \end{aligned}$$

७. दोन मजुरांतून, एकजण एक शेत ४ दिवसांत, आणि दुसरा ७ दिवसांत, कापितो. यांणीं तें शेत बरोबर कापायास आरंभ केल्यावर दुसरे दिवशीं तिसरा मजूर त्या कामांत झाला, तो एकदा तें शेत १० दिवसांत कापील असा होता. तो मजूर त्या दोन मजुरांचे संगतीं कांहीं वेळ काम करून, त्यांस सोडून गेला; सोडितेसमयीं असें कळलें, कीं त्या शेताचे चार पंचमांश कापले गेले. तेव्हां झालेल्या कामास किती दिवस लागले ?

अंकगणितांतील कठीण उदाहरणें, बीजगणिताचे चिन्हांनीं उलगडायास, केवढें सोपें पडतें, हें दाखवायासाठीं हें उदाहरण घेतलें आहे.

प्रथम आणि दुसरा मजूर, यांणीं जे शेताचे अंश एक दिवसांत कापिले, ते  $\frac{१}{४}$  श आणि  $\frac{१}{७}$  आहेत. तर दिवसांची संख्या दाखविण्यासाठीं क्ष घे, अथवा, दिवस अव्यक्त आहेत, हागून ते व्यक्त होतपर्यंत त्यांचे ठिकाणीं क्ष मांड. आतां पहिला मजूर, एक दिवसांत, एक चतुर्थांश कापितो, दोन दिवसांत दोन चतुर्थांश कापितो, इत्यादि, तर तो क्ष दिवसांत क्षचा चतुर्थांश कापील, अथवा सर्व शेताचे  $\frac{क्ष}{४}$  इतके कापील. तितकेच वेळांत दुसरा मजूर  $\frac{क्ष}{७}$  इतके कापील; परंतु तिसरा मजूर, एक दिवस उणें काम करतो, आणि तो एक दिवसांत शेताचा एक दशांश कापितो, तर, तो आपले वेळांत  $\frac{क्ष-१}{१०}$  इतके कापील. याबुलें, तिघां मिळून झालेलें काम या पुढीलप्रमाणें आहे,

परंतु, प्रश्नाचे संकेताप्रमाणें, वरचे तिघांचें सर्व काम मिळून, शेताचे  $\frac{४}{५}$  कापले गेले, तर,

$$\frac{क्ष}{४} + \frac{क्ष}{७} + \frac{क्ष-१}{१०} = \frac{४}{५}$$

४, ७, १०, ५, या अंकांचा लघुतम गुणाकार १४० आहे

$$(\times) १४० \quad \frac{१४० \times क्ष}{४} + \frac{१४० \times क्ष}{७} + \frac{१४० \times (क्ष-१)}{१०} = \frac{४ \times १४०}{५}$$

$$\text{अथवा} \quad ३५ \times क्ष + २० \times क्ष + १४(क्ष-१) = ११२$$

$$\text{अथवा} \quad ३५ \times क्ष + २० \times क्ष + १४ \times क्ष - १४ = ११२$$

$$\text{यामुलें,} \quad ६९ \times क्ष - १४ = ११२$$

$$(+ ) १४ \quad ६९ \times क्ष = १२६$$

$$(\div) ६९ \quad क्ष = \frac{१२६}{६९} = \frac{४२}{२३} = १ \frac{१९}{२३}$$

ताळा. एक दिवसांत आणि एक दिवसाचे  $\frac{१९}{२३}$  शांत, पविले मजूरानें शेताचे  $\frac{१}{४}$  आणि  $\frac{१}{७}$  चे  $\frac{१९}{२३}$  श कापले, अथवा  $\frac{१}{४}$  चे  $\frac{४२}{२३}$ , अथवा शेताचे  $\frac{२१}{४६}$  कापले; दुसरे मजूरानें  $\frac{१}{७}$  शाचे  $\frac{४२}{२३}$  श अथवा  $\frac{४२}{२३}$ , ह्यागून शेताचे  $\frac{४२}{२३}$  श कापले; आणि तिसरा मजूर, जाणें दुसरे दोघांपेक्षां १ दिवस उगे काम केलें, अथवा  $\frac{१९}{२३}$  श दिवस काम केलें, त्याणें त्या वेळांत  $\frac{१}{१०}$  चे  $\frac{१९}{२३}$  श अथवा  $\frac{१९}{२३०}$ , ह्यागजे  $\frac{३८}{२३०}$  शेताचे कापणीचें काम केलें. तर सर्वांचें काम याप्रमाणें शालें,

$$\frac{२१}{४६} + \frac{१२}{४६} + \frac{३८}{४६०} = \frac{३६०}{४६०} = \frac{४}{५} \text{ संकेताप्रमाणें.}$$

$$८. \quad \frac{क्ष-३}{२२} - \frac{क्ष-४}{६३} = ३ - \frac{क्ष+१}{५}$$

$२\frac{१}{२}$  आणि  $६\frac{१}{३}$ , यांचा साधारण गुणाकार ५७० आहे यांत  $२\frac{१}{२}$  हे २२८ वेळा जातात, आणि त्यांत  $६\frac{१}{३}$  हे ९० वेळा जातात. हें ५ चांचें

गुणित आहे. परंतु ५७० हा लघुतम गुणाकार नव्हे, तर यांचा लघुतम गुणाकार ९५ आहे, हा घेऊन शिकणारानें उदाहरण उलगाडवें, परंतु ५७०, या साधारण गुणाकारानें, हें उदाहरण उलगाडितों.

$$(x) ५७० \quad \frac{५७०}{२\frac{१}{२}}(क्ष-३) - \frac{५७०}{६\frac{१}{३}}(क्ष-४) = १७१० - \frac{५७०}{५}(क्ष+१)$$

$$\text{अथवा } २२८(क्ष-३) - ९०(क्ष-४) = १७१० - ११४(क्ष+१)$$

$$\text{परंतु } २२८(क्ष-३) = २२८क्ष - ६८४ \text{ इत्यादि}$$

$$\text{यामुळे } (२२८क्ष - ६८४) - (९०क्ष - ३६०) = १७१० - (११४क्ष + ११४)$$

$$\text{अथवा } २२८क्ष - ६८४ - ९०क्ष + ३६० = १७१० - ११४क्ष - ११४$$

$$(+) ६८४ + ११४क्ष - ३६० \text{ तर } २२८क्ष - ९०क्ष + ११४क्ष = १७१० - ११४ + ६८४ - ३६०$$

$$\text{अथवा } २५२क्ष = १९२०$$

$$(\div) १२$$

$$२१क्ष = १६०$$

$$(\div) २१$$

$$क्ष = \frac{१६०}{२१} = ७ \frac{१३}{२१}$$

$$\text{ताळा जर } क्ष = \frac{१६०}{२१} \text{ तर}$$

$$\frac{क्ष-३}{२\frac{१}{२}} = \frac{\frac{१७}{२१}}{२\frac{१}{२}} = \frac{\frac{१७}{२१}}{\frac{५}{२}} = \frac{१९४}{१०५} = \frac{१९४}{५ \times २१}$$

$$\frac{क्ष-४}{६\frac{१}{३}} = \frac{\frac{७६}{२१}}{\frac{१९}{३}} = \frac{२२८}{३९९} = \frac{२२८}{१९ \times २१}$$

$$\frac{क्ष-३}{२\frac{१}{२}} - \frac{क्ष-४}{६\frac{१}{३}} = \frac{१९४}{५ \times २१} - \frac{२२८}{१९ \times २१} = \frac{२५४६}{५ \times १९ \times २१} = \frac{१३४}{५ \times २१}$$

$$\frac{क्ष+१}{५} = \frac{\frac{१८१}{२१}}{५} = \frac{१८१}{५ \times २१}$$

$$३ - \frac{क्ष+१}{५} = \frac{१३४}{५ \times २१} \text{ हें बरचे बरोबर आहे.}$$

समीकरणांतील अपूर्णपदांचा अपूर्णपणा काढायाचा असेल, तर सर्व पदांचे छेदांचा कोणत्याहि साधारण गुणाकाराने समीकरणाचा दोनहि बाजू गुण; बहुतकरून या कृतीस, लघुतम गुणाकार, दुसरे सर्व साधारण गुणाकारांपेक्षां, सोईस पडतो.

ही वरची रीति या पुढील उदाहरणावर लागू करून दाखवितो.

$$\frac{अ}{व} = \frac{क}{ड} (\times) वड \quad \frac{अवड}{व} = \frac{कवड}{ड}, \text{ अथवा } अड = वक$$

या समीकरणापासून शिकणाराने ही पुढील समीकरणे उलगडावीं.

$$\begin{aligned} अ &= \frac{कव}{ड}, & व &= \frac{अड}{क}, & क &= \frac{अड}{व}, & ड &= \frac{वक}{अ} \\ \frac{१}{अ} &= \frac{ड}{कव}, & \frac{१}{व} &= \frac{क}{अड}, & \frac{१}{क} &= \frac{व}{अड}, & \frac{१}{ड} &= \frac{अ}{वक} \end{aligned}$$

या पुढील समीकरणांतले, पहिले समीकरणावरून, शिकणाराने दुसरीं सर्व समीकरणे उलगडावीं.

$$\begin{aligned} \frac{अव}{क्षय} &= \frac{कड}{पक}, & अ &= \frac{कडक्षय}{पकव}, & क्ष &= \frac{अवपक}{कडय}, & य &= \frac{कडक्ष}{पकव}, \\ \frac{अव}{क} &= \frac{डक्षय}{पक}, & अवपक &= \frac{क्षयकड}{य}, & व &= \frac{कक्ष}{अपक}, \end{aligned}$$

२. समीकरणांतील कोणतेहि पद, एका बाजूतून काढून, दुसरे बाजूस त्याचें चिन्ह बदल केल्याने नेता येते. यास स्थलांतर करणे झणतात. ही गोष्ट जर वरचे उदाहरणापासून आढळली नसली, तर या पुढे लिहिल्यावरून स्पष्ट कळेल.

$$अ + व = क + ड - ई$$

(-) व

$$अ = क + ड - ई - व$$

(+) ई

$$अ + ई = क + ड - व$$

समीकरणांतील अपूर्ण पदांचा अपूर्णपणा काढण्याकरितां रीति लावतेस. यां, संज्ञांलें पाहिजे कीं, छेद काढल्यावर, जें चिन्ह पूर्वी अपूर्ण पदाचे पुढें असतें, तें अंशांचें चिन्ह होतें; यामुलें तें अंशपद कुंडलीमध्ये ठेविणें पाहिजे, नाहीं तर लागलीच झिळवणी किंवा वजाबाकी करून मांडलें पाहिजे. या सांगण्याचा अर्थ या पुढील उदाहरणावरून समजेल.

$$\text{क्ष} + \frac{\text{क्ष-अ}}{\text{व}} - \frac{\text{क+क्ष}}{\text{अ, व}} = \text{ड} - \frac{\text{क्ष-ई}}{\text{अ}}$$

$$(\times) \text{अव} \quad \text{अवक्ष} + \text{अ(क्ष-अ)} - (\text{क+क्ष}) = \text{अवड} - \text{व(क्ष-ई)}$$

$$\text{अथवा} \quad \text{अवक्ष} + (\text{अक्ष-अअ}) - (\text{क+क्ष}) = \text{अवड} - (\text{वक्ष-वई})$$

$$\text{अथवा} \quad \text{अवक्ष} + \text{अक्ष-अअ} - \text{क-क्ष} = \text{अवड} - \text{वक्ष+वई}$$

नवा शिकणारा, अशी चूक बहुतकरून करितो. ह्मणजे, -क-क्ष यांचे स्थळीं आणि -वक्ष+वई यांचे स्थळीं -क+क्ष आणि -वक्ष-वई, असें लिहितो.

वरचा दुसऱ्या रितीवरून उदाहरण,

$$\text{अवक्ष} + \text{अक्ष} + \text{वक्ष} - \text{क्ष} = \text{अवड} + \text{अअ} + \text{क} + \text{वई}$$

$$\text{अथवा } (\text{अव} + \text{अ} + \text{व} - १) \text{क्ष} = \text{अवड} + \text{अअ} + \text{क} + \text{वई}$$

$$(\div) \frac{\text{अव} + \text{अ} + \text{व} - १}{\text{क्ष}} = \frac{\text{अवड} + \text{अअ} + \text{क} + \text{वई}}{\text{अव} + \text{अ} + \text{व} - १} \dots \dots (१)$$

$$\begin{aligned} \text{ताळा} \quad \text{क्ष-अ} &= \frac{\text{अवड} + \text{अअ} + \text{क} + \text{वई}}{\text{अ, व} + \text{अ} + \text{व} - १} - \text{अ} \\ &= \frac{\text{अवड} + \text{अअ} + \text{क} + \text{वई} - \text{अ(अव} + \text{अ} + \text{व} - १)}{\text{अव} + \text{अ} + \text{व} - १} \\ &= \frac{\text{अवड} + \text{अअ} + \text{क} + \text{वई} - \text{अअव} - \text{अअ} - \text{अव} + \text{अ}}{\text{अव} + \text{अ} + \text{व} - १} \\ &= \frac{\text{अवड} + \text{अ} - \text{अव} - \text{अअ} + \text{क} + \text{वई}}{\text{अव} + \text{अ} + \text{व} - १} \end{aligned}$$

$$\frac{\text{क्ष-अ}}{\text{व}} = \frac{\text{अवड} + \text{अ} - \text{अव} - \text{अअ} + \text{क} + \text{वई}}{\text{व(अव} + \text{अ} + \text{व} - १)} \dots \dots (२)$$

आणि तशाच रितीप्रमाणें

$$\frac{क+क्ष}{अव} = \frac{अवक+अक+वक+अवड+अअ+वई}{अव(अव+अ+व-१)} \dots \dots \dots (३)$$

$$\frac{क्ष-ई}{अ} = \frac{अवड+अअ+क-अवई-अई+इ}{अ(अव+अ+व-१)} \dots \dots \dots (४)$$

(१)(२)(३) आणि (४) या सर्वांस समछेद कर. ते याप्रमाणें होतील, (१) याचे अंश आणि छेद अव यांणीं गुण, (२) याचे अंश आणि छेद अने गुण, (४) याचे अंश आणि छेद वने गुण. नंतर हें समीकरण करून मांड

$$क्ष + \frac{क्ष-अ}{व} - \frac{क+क्ष}{अव}, \text{ अथवा } (१)+(२)-(३)$$

अशी कृति केल्याने याप्रमाणें निघेल

$$\frac{अअववड+अअवड+अववई+अवई-अअव-अवड-वक-वई}{अव(अव+अ+व-१)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{अथवा याचे अंश आ-} \\ \text{णि छेद वने भागून} \end{array} \right\} = \frac{अअवड+अअड+अवई+अई-अअ-अड-क-ई}{अ(अव+अ+व-१)}$$

तसे रितीनेहि,

$$ड - \frac{क्ष-ई}{अ} \text{ अथवा } ड - (४), \text{ वरचे } (१)+(२)-(३) \text{ याचे किमती वरोबर होईल.}$$

नवे शिकणारानें वरचीं समीकरणे कागदावर पुस्तकावांचून उलगडून मांडण्याविषयीं निपुण व्हावें.

मनांत आण, कीं वरचे समीकरणांत, क आणि ई, हीं दोन्ही शून्य आहेत, तर त्या समीकरणाचें याप्रमाणें रूप होईल

$$क्ष + \frac{क्ष-अ}{व} - \frac{क्ष}{अव} = ड - \frac{क्ष}{अ}$$



यावरून क्षची किंमत पुढील आहे.

$$\text{क्ष} = \frac{\text{अवड} + \text{अअ}}{\text{अव} + \text{अ} + \text{व} - १}$$

आणि यावरून मागे काढिलेली समीकरणाचा दोन बाजूंची किंमत

$$\frac{\text{अअवड} + \text{अअड} - \text{अअ} - \text{अड}}{\text{अ}(\text{अव} + \text{अ} + \text{व} - १)}$$

$$\text{अथवा अंश आणि छेद अने भागून} = \frac{\text{अवड} + \text{अड} - \text{अ} - \text{ड}}{\text{अव} + \text{अ} + \text{व} - १}$$

या सर्व पद्धती शिकणाराने समीकरणापासून काढाव्या.

वर सामान्य कृतीविषयी सांगितले. आतां कांहीं विशेष कृती-विषयी शोध केला पाहिजे; ह्मणून त्या समजायासाठी, कसे कसे अर्थ केले पाहिजेत त्याचा आतां विचार करितों. पूर्वी मनांत आलीं नवतीं अशीं तऱ्हेतऱ्हेचीं उदाहरणे पहाण्यांत येतील, आणि हरएक उदाहरण उलगडून सांगतां येईल, आणि जी गोष्ट हरएक उदाहरणांत अगोदर पहाण्यांत नाहीं, तिचें कारण दाखविण्याविषयी, हरएक उदाहरणास एक एक कृत्त लाविले आहे.

१ उलटा विषय. अ=२, व=३, ड=  $\frac{१}{६}$ , असें असले तर वरचे समीकरण याप्रमाणें होतें

$$\text{क्ष} + \frac{\text{क्ष}-२}{३} - \frac{\text{क्ष}}{६} = \frac{१}{६} - \frac{\text{क्ष}}{२}$$

$$\text{तर क्ष} = \frac{२ \times ३ \times \frac{१}{६} + २ \times २}{२ \times ३ + २ + ३ - १} = \frac{५}{१०} = \frac{१}{२}$$

वरचे समीकरणाचा ताळा पाहिला असतां, विपरीत गोष्ट त्वरेनें नजरेंत येती. या उदाहरणांत क्ष =  $\frac{१}{२}$  आहे, आणि समीकरणाचे दुसरे पदामध्ये क्ष-२, ह्मणजे  $\frac{१}{२}$  उणें २ करायास अशक्य. यावरून असें दिसून येतें, कीं समीकरणाचें उत्तर शक्य निघून त्या उत्तराने त्याचा ताळा पाहूं गेल्यास, तें समीकरण त्या रितीनें अशक्य, असें

दृष्टीस येतें. तर हाच प्रश्न केला पाहिजे, कीं कांहीं कृत्यापासून असें समीकरण उत्पन्न होऊं शकतें कीं काय? जर होऊं शकतें, तर तें कृत्यच खोटें आहे, अथवा उलगाडण्याची रीति खोटी आहे? उलगाडण्याची रीति खोटी असल्यास ती नीट कशी करावी?

दृष्टान्तार्थ उदाहरण. बशीं अ याप्रमाणें करार करितो, कीं तुझी सर्व मालमत्ता घेऊन, तुझें सर्व कर्ज मी चुकवीन, मग दैवगतीनें नफा होऊं, किंवा तोटा होऊं. शोध केल्यावर असें समजण्यांत आलें, कीं ब ची मालमत्ता, कर्जसहित, अचे मालमत्तेचे बरोबर आहे, आणि ब दुसरे पुरुषाशीं भागीदार आहे, आणि ब आणि त्याचा भागीदार, या दोघांनीं मिळून, तिसरे क पुरुषाशीं, वरप्रमाणेंच, करार केला होता. नंतर कचें सर्वस्व तपासल्यावर, असें समजण्यांत आलें, कीं तो १०० रुपयांचा कर्जदार आहे. या सर्व व्यवहाराचा सारांश हाच कीं, अची मुळची मालमत्ता होती, ती दुप्पट होण्यास ७५ रुपये उणे आहेत. तेव्हां अची मुळची मालमत्ता काय होती?

अची असलची मालमत्ता दाखविण्यासाठीं क्ष घे; तर ब आणि त्याचा सर्कती यांची मालमत्ता, कचे व्यवहारसंबंधी जो त्यांचा भाग, तो खेरीजकरून, अचे मालमत्ते बरोबर आहे. या वरचे उदाहरणाचे शेवटील गोष्टी वरून असें मानलें पाहिजे कीं या व्यवहारापासून अला नफा झाला. तो असा कीं ब आणि त्याचा सर्कती यांनीं कशीं करार केल्यावरून जो तोटा होणार, त्यापेक्षां त्यांचे क्ष रुपये अधिक आहेत. ती गोष्ट तशीच आहे, असें मनांत आण; तर ब आणि त्याचा सर्कती यांस क्ष-१०० रुपये राहातात; हणून ब याचा भाग  $\frac{1}{2}(\text{क्ष}-१००)$  आहे. हा संकेताप्रमाणें ब कडून अचेकडे गेला, हणून अचे जवळ या बरोबर होईल,

$$\text{क्ष} + \frac{\text{क्ष}-१००}{२}$$

हे अचे मालमत्तेचे दुप्पटी बरोबर होण्यास, ७५ रुपयांनीं उणें आहे, यास्तव हे २क्ष-७५ यांचेही बरोबर आहेत.

$$\text{यामुळे } \text{क्ष} + \frac{\text{क्ष}-१००}{२} = २\text{क्ष}-७५$$

$$(x) २ \quad २\text{क्ष} + \text{क्ष} - १०० = ४\text{क्ष} - १५०$$

$$४\text{क्ष} - २\text{क्ष} - \text{क्ष} = १५० - १००$$

$$\text{क्ष} = ५०$$

जा उलट्या विषयाचा विचार चालला आहे, तोच अशांना या समीकरणांत येतो; कां की  $\frac{५०-१००}{२}$  हे अशक्य आहे. आणि क्ष हा १०० पेक्षा अधिक आहे, या कल्पनेवरून ते निघाले; त्या कल्पनेस विरोध येतो. यामुळे अशे उलगाडण्यावर कांहीं भरंवसा ठेवत नाही. तर दुसरी कल्पना कर, झणजे १०० यांपेक्षा क्ष अधिक नाही. असे असता, व आणि त्याचा सर्कती यांस १०० रुपये द्यावे लागतील. परंतु त्यांतून त्यांचे क्ष रुपये मात्र रहातील; बाकी अथवा १०० - क्ष यांतून अला बचा भाग अथवा  $\frac{१}{२}(१०० - \text{क्ष})$  इतके मिळेल. तो भाग अने बला करारा प्रमाणे द्यावा; झणून अला इतका तोटा होईल; अजवळ पहिले क्ष रुपये होते, तर इतका तोटा झाल्याने.

$$\text{क्ष} - \frac{१०० - \text{क्ष}}{२} \text{ इतके राहिल;}$$

हे तरी अची मालमत्ता दुप्पट करण्यास ७५ रुपयांनी कमी असावे. असे बोलले असता उदाहरणाचा एक भाग दुसरे भागास विरोध आणि तो. तर याचप्रमाणे झटले पाहिजे, की अचे पहिल्या मालमत्तेचे दुप्पटांत ७५ कमी इतकी त्याजवळ हल्ली झाली.

$$\text{झणून } \text{क्ष} - \frac{१०० - \text{क्ष}}{२} = २\text{क्ष} - ७५$$

$$(x) २ \quad २\text{क्ष} - (१०० - \text{क्ष}) = ४\text{क्ष} - १५०$$

$$\text{अथवा } २\text{क्ष} - १०० + \text{क्ष} = ४\text{क्ष} - १५०$$

$$\text{अथवा } २\text{क्ष} + \text{क्ष} - १०० = ४\text{क्ष} - १५०$$

हेही वरचे समीकरणाचे बरोबर आहे, तथापि या रूपाने खोटे नाही; कां, जरी यापासून क्ष = ५० असे निघते, आणि याप्रमाणे

क्ष-१०० अशक्य आहेत, तथापि २क्ष+क्ष-१०० हें शक्य आहे. यावरून असें दिसते, कीं क्ष- $\frac{1}{2}$  (१००-क्ष) याचे ठिकाणीं खोटे कल्पनेवरून, क्ष+ $\frac{1}{2}$  (१००-क्ष) याप्रमाणें लिहिलें, त्यापासून जो खोटा परिणाम होणार, तो समीकरण उलगाडल्यावर नाहींसा होतो, आणि नीट रितीनें केल्याप्रमाणें उत्तर निघते.

असा उलटा विषय या जातीचे चुकीनें उत्पन्न होतो. जर कपेक्षां ब मोठा असेल, तर स्पष्ट आहे, कीं,

$$अ-(ब-क) = अ-ब+क$$

परंतु जर अ-ब+क अशी पद्धति असेल, आणि जर असें इच्छिलें, कीं ब आणि क एकत्र करून कुंडलीत यावे तर, ब आणि क यांत मोठा कोणता, तो समजेपर्यंत त्यास शुद्ध रितीनें मांडवत नाहीं. ब मोठा असला तर वरची पद्धति याप्रमाणें होईल.

$$अ-(ब-क);$$

परंतु क मोठा असला, तर याप्रमाणें होईल,

$$अ+(क-ब);$$

जेव्हां ब=क आहे, तेव्हां एक पक्षीं अ-० होतें, आणि दुसरे पक्षीं अ+० होतें, अथवा दोहोंपक्षीं अ मात्र राहतो, असें नसल्यास त्या दोहोंतून एक तरी खर्चीत अशक्य होईल.

वर सांगितल्या गोष्टीवरून हेंच दिसते, कीं जर अ-ब+क या पद्धतीचें अ+(क-ब) हें शुद्धरूप चुकून, त्याचे ठिकाणीं अ-(ब-क) असें लिहिलें असतां, शेवटले उत्तरांत कांहीं अंतर पडत नाहीं. एथें खालीं व्यासारीखींच दोन उदाहरणें लिहून दाखवितों

$$क्ष - \frac{अ-क्ष}{ब} = क + \frac{क्ष-ब}{ब}$$

$$क्ष + \frac{क्ष-अ}{ब} = क - \frac{ब-क्ष}{ब}$$

$$बक्ष-(अ-क्ष) = बक+(क्ष-ब)$$

$$बक्ष+(क्ष-अ) = बक-(ब-क्ष)$$

$$बक्ष-अ+क्ष = बक+क्ष-ब$$

$$बक्ष+क्ष-अ = बक-ब+क्ष$$

या दोन्ही उदाहरणांचे उलगडणे जे बाकी राहिले ते एकसारि-  
खेच आहे. हणून

$$वक्ष = वक + अ - व$$

$$क्ष = \frac{वक + अ - व}{व}$$

२ उलटा विषय.

उदाहरण

$$अक्ष + व = कक्ष + ड$$

$$अक्ष - कक्ष = ड - व$$

$$(अ - क)क्ष = ड - व$$

$$क्ष = \frac{ड - व}{(अ - क)}$$

मनांत आण, कीं व पेक्षां ड उणा आहे, परंतु क पेक्षां अ अधिक आहे. जसा या उदाहरणांत

$$३क्ष + ४ = २क्ष + १$$

तर उत्तराचे अंशस्थळीं अशक्यरूप वजावाकी आहे; आणि दुसरे का-  
रणास्तव स्पष्ट आहे, कीं हें समीकरण अशक्यरूप आहे; कां कीं जर  
क पेक्षां अ अधिक आहे तर कक्ष पेक्षां अक्ष अधिक आहे; त्यावरून, जर  
ड पेक्षां व अधिक आहे, तर अक्ष + व ही पद्धति कक्ष + ड यापेक्षां अगत्य  
अधिक असावी, हणून त्या परस्पर बरोबर होऊं शकत नाहींत.

१. कृत्य. सन् १८३० या वर्षांत, अर्चे वय ५० होते आणि बचे  
वय ३५ होते. तर अर्चे वय बचे वयाचे दुप्पट असण्याचा समय सांग.  
तर ही गोष्ट सन् १८३० यांचे पूर्वी किंवा यानंतर असावी. यांत दुस-  
रा पक्ष पहा, हणून इच्छिला समय १८३० + क्ष होईल असे मनांत  
आण.

$$\begin{aligned} \text{तर } ५० + \text{क्ष} &= २(३५ + \text{क्ष}) \\ \text{अथवा } ५० + \text{क्ष} &= ७० + २\text{क्ष} \\ २\text{क्ष} - \text{क्ष} &= ५० - ७० \end{aligned}$$

या उदाहरणांत अशक्य रूपाची वजाबाकी दिसती. आणि स्पष्ट आहे, कीं  $२\text{क्ष} + ७०$  ही पद्धति  $\text{क्ष} + ५०$  हिजपेक्षा अधिक आहे. आतां  $१८३०$  यांचे पूर्वीचा समय पहा ह्मणजे  $१८३० - \text{क्ष}$

$$\begin{aligned} \text{तेव्हां } ५० - \text{क्ष} &\text{ हें अर्चे वय होतें,} \\ ३५ - \text{क्ष} &\text{ हें बर्चे वय होतें,} \\ \text{तर } ५० - \text{क्ष} &= २(३५ - \text{क्ष}) \\ \text{अथवा } ५० - \text{क्ष} &= ७० - २\text{क्ष} \\ २\text{क्ष} - \text{क्ष} &= ७० - ५० \\ \text{क्ष} &= २० \end{aligned}$$

हें स्पष्ट खरें उत्तर आहे; कां कीं  $१८३० - २०$ , अथवा  $१८१०$ , या समयांत अर्चे वयाचीं वर्षे  $३०$  होतीं आणि बर्चे वयाचीं वर्षे  $१५$  होतीं. यावरून दिसतें, कीं भलते कांहीं सांगितले सनाचा नंतरचा समय घेतला, तर, ही अशक्य रूपाची वजाबाकी होती, ह्मणून त्याचे पूर्वीचा समय असावा हें खरें आहे, अथवा याचे उलटेंहि होतें.

२. कृत्य. अ आणि ब यांचें परस्पर खातें आहे. त्याची स्थिती अशी आहे, कीं अचा खात्याची रकम त्यांचे परस्परांचे व्यवहारांत,  $५००$  रुपयांचे किमतीची व्हावयास, जें लागेल त्याचें अर्ध अला आणि  $१००$  रुपये बला देऊन, परस्परांचे खात्याभा फडशा केल्यानंतर, प्रत्येकाजवळ ऐवज बरोबर होईल. तर त्यांचें खातें कसें आहे ?

शिलक बाकी, बला किंवा अला घेणें असेल. मनांत आण, कीं



अला घेणें आहे, आणि त्यास क्ष रुपये घ्यावयाचे, तर या व्यवहारापासून अचे जवळ ५००-क्ष, हे ५०० रुपयांचे किमतीचे बरोबर करतील, कां कीं

$$\text{क्ष} + (५०० - \text{क्ष}) = ५००$$

यांतील  $\frac{१}{२}(५०० - \text{क्ष})$  एवढे अला दे. नंतर ब याणें शिलक बाकी पैका दिल्यावर, अ जवळ याप्रमाणें होईल

$$\text{क्ष} + \frac{५०० - \text{क्ष}}{२}$$

आतां, बला १०० रुपये मिळाल्यानंतर, अ यास क्ष रुपये शिलक बाकी द्यावे लागतील, हणून, त्याजवळ  $(१०० - \text{क्ष})$  एवढे रुपये होतील. परंतु असें खातें चुकल्यावर प्रत्येकाजवळ ऐवज बरोबर होईल; यामुळें

$$\text{क्ष} + \frac{५०० - \text{क्ष}}{२} = १०० - \text{क्ष}$$

$$(x) २ \text{क्ष} + ५०० - \text{क्ष} = २०० - २\text{क्ष}$$

$$\text{अथवा } २\text{क्ष} + ५०० - \text{क्ष} = २०० - २\text{क्ष}$$

$$२\text{क्ष} + २\text{क्ष} - \text{क्ष} = २०० - ५००$$

$$\text{अथवा } ३\text{क्ष} = २०० - ५००$$

हें अशक्य आहे. आतां दुसरा पक्ष पहा, हणजे असें मनांत आण कीं शिलक बाकी बला घेणें आहे, आणि त्यास क्ष रुपये घ्यावे लागतात, तर अजवळ ५०० रुपये असावयासाठी, अगोदर बची शिलक बाकी चुकविली पाहिजे, आणि याशिवाय त्याजवळ ५०० रुपये झाले पाहिजेत; हणजे, त्याला  $५०० + \text{क्ष}$  इतके मिळाले पाहिजेत. परंतु यांतून केवळ अर्धें मिळयाचे, अथवा  $\frac{१}{२}(५०० + \text{क्ष})$  यांतून बला क्ष रुपये दिल्यानंतर, त्याजवळ याप्रमाणें राहील

$$\frac{५०० + \text{क्ष}}{२} - \text{क्ष}$$



आतां बला १०० रुपये, आणि याशिवाय अ पासून शिलक बाकी क्ष रुपये एवढे मिळतात, यामुळे त्याजवळ १००+क्ष रुपये होतील. असें झाल्यावर दोघांचा एवज बरोबर आहे.

$$\text{हणून} \quad \frac{५००+क्ष}{२} - क्ष = १००+क्ष$$

$$(\times) २ \quad ५००+क्ष-२क्ष = २००+२क्ष$$

$$२क्ष+२क्ष-क्ष = ५००-२००$$

$$\text{अथवा} \quad ३क्ष = ३०० \text{ आणि } क्ष = १००$$

यामुळे अ याणें बचे १०० रुपये शिलक बाकी देणें आहे हें खरें उत्तर आहे.

३. कृत्य. कोणी एक वाटसरू रस्त्यानें पुढें चालत आहे, त्या रस्त्यावर, जागोजागीं निरनिराळ्या अंतरानें दिक्दर्शन खांब\* होते, त्यांतील किलेक खांबांवर उत्तरदिशा दाखविणाऱ्या, व किलेकांवर दक्षिणदिशा दाखविणाऱ्या खुणा होत्या. तो वाटसरू पहिल्या खांबाशीं पोंचल्यावर, त्या खांबावरचे दाखविल्या खुणेप्रमाणें जात असतां, दुसरे खांबाशीं पोंचतो. याप्रमाणें पुढेहि. तो निघाल्यापासून उत्तरेकडे १६ मैल चालल्यावर तो पहिल्या दिक्दर्शन खांबाशीं पोंचला, आणि पहिले दिक्दर्शन खांबाशीं पोंचल्यानंतरां बाकीचे प्रत्येक खांबाशीं चालण्याची दिशा फिरता असें त्यास कळलें; प्रत्येक दोन खांबांचें अंतर त्याचे पूर्वीचे खांबाचे अंतराचे दुप्पट आहे, आणि पांचव्या खांबाशीं पोंचल्यावर, तो आपले निघालेल्या स्थळापासून, उत्तर दिशेस, ८६ मैल दूर गेला, हेंहि त्यास कळलें. तर त्या खांबांची रचना आणि स्थिति कशी आहे.

उत्तरेकडे १६ मैल चालून, तो पहिल्या खांबाशीं पोंचतो, परंतु तेथें,

\* किलेक प्रांतांमध्ये रस्त्यावर जागोजागीं दगडी, किंवा लांकडी खांब असतात, जांवर गांवोगांवे रस्त्याचा दिशा, व त्यांचीं अंतरे वाटसरूस कळण्यासाठीं लिहिलीं असतात.

† पहा या कृत्यामध्ये पहिल्या खांबाशीं पोंचल्यानंतर, त्याचे चालण्याची दिशा फिरता किंवा नाहीं, हें काहीं सांगितलें नाहीं.

पोंचल्यावर, त्या दिशेस पुढे चालायाचें, किंवा मार्गे फिरायाचें, तें सांगितलें नाहीं. मनांत आण कीं पुढें उत्तरेकडे चालायाचें आहे, आणि पहिल्या आणि दुसऱ्या खांबाचें अंतर दाखविण्यासाठीं क्ष घे, तर दुसऱ्या खांबाशीं पोंचल्यावर तो त्याचे पहिल्या स्थितीपासून १६+क्ष मैल उत्तरेकडे होईल. दुसऱ्या खांबापासून तिसऱ्याखांबाशीं पोंचल्यास त्याला मार्गे दक्षिणेकडे २क्ष मैल जावें लागतें. या कल्पनेपासून दोन पक्ष उत्पन्न होतात. जर २क्ष, हे १६+क्ष, यांपेक्षां उणें असतील, तर तिसरा खांब त्याचे निघालेल्या स्थळापासून उत्तरेकडेस १६+क्ष-२क्ष एवढे मैल होईल; परंतु जर २क्ष हे, १६+क्ष, यांपेक्षां अधिक असतील, तर तिसरा खांब, त्याचे निघालेल्या स्थळापासून दक्षिणेकडेस २क्ष-(१६+क्ष) मैल होईल. मनांत आण, कीं पहिला पक्ष आहे; तिसऱ्या खांबापासून चौथ्या खांबाशीं पोंचल्यास, त्याला उत्तरेकडे ४क्ष मैल जावें लागतें, झणून चौथा खांब, निघालेल्या स्थळापासून, उत्तरेकडे, १६+क्ष-२क्ष+४क्ष, इतके मैल आहे. चौथ्या खांबापासून, दक्षिणेकडे फिरून, ८ क्ष मैल चालल्यावर, पांचव्या खांबाशीं पोंचतो, १६+क्ष-२क्ष+४क्ष-८क्ष एवढे मैल पांचव्या खांबापावेतो तो चालला. हें अंतर, कृत्याचे संकेताप्रमाणें, निघालेल्या स्थळापासून उत्तरेकडे ८६ मैल असावें. यामुळे

$$१६+क्ष-२क्ष+४क्ष-८क्ष = ८६$$

$$\text{अथवा} \quad ८क्ष-४क्ष+२क्ष-क्ष = १६-८६$$

$$\text{अथवा} \quad ५क्ष = १६-८६$$

यावरून, ही अशक्यरूप वजावाकी आहे. आतां दुसरा पक्ष तपासून पाहा, आणि मनांत आण, कीं वाटसरू पहिल्या खांबाशीं पोंचल्यावर, त्याची दिशा मार्गे फिरण्याची आहे, झणून त्याला दक्षिणेकडेस क्ष मैल, जावें लागतें. जर क्ष हा १६ पेक्षां उणा असेल, तर दुसरा खांब, त्याचे निघालेल्या स्थळापासून उत्तरेकडे १६-क्ष मैल होईल. जर क्ष, हा १६ पेक्षां अधिक असेल, तर दुसरा खांब, त्याचे निघालेल्या स्थळापासून, दक्षिणेकडे, क्ष-१६ मैल, होईल. कृत्याचे संकेतावरून, याप्रमाणें समीकरण होईल.

$$१६ - क्ष + २क्ष - ४क्ष + ८क्ष = ८६$$





$$८क्ष - ४क्ष + २क्ष - क्ष = ८६ - १६$$




$$५क्ष = ७०$$

$$क्ष = १४$$

यामुळे खांबांची स्थिति या पुढीलप्रमाणे आहे.

दक्षिण ————— उत्तर

(४) 	(२) 	 (१)	 (३)	(५)
२६	+	२	१६	३०
				८६

 निघाले-  
 स्थल.  


वाटसरू निघालेले स्थळापासून, प्रत्येक खांबांचे अंतराचे मैल त्या त्या खांबाखाली लिहिले आहेत.

मागील तीन कृथांतील खरे आणि खोटी समीकरणे, एकापुढे एक मांडून पाहिली असता, पुढीलप्रमाणे होईल;

१. कृत्य.

खोटे समीकरण,  $५० + क्ष = २(३५ + क्ष)$  अथवा  $क्ष = ५० - ७०$  वर्षे सन्

१८३० याचे नंतर.

खरे समीकरण,  $५० - क्ष = २(३५ - क्ष)$  अथवा  $क्ष = ७० - ५०$  वर्षे सन्

१८३० याचे पूर्वी.

२. कृत्य.

खोटे समीकरण,  $\frac{५०० - क्ष}{२} + क्ष = १०० - क्ष$  अथवा  $क्ष = \frac{२०० - ५००}{३}$  ब याणे

बला दावे.

खरे समीकरण,  $\frac{५०० + क्ष}{२} - क्ष = १०० + क्ष$  अथवा  $क्ष = \frac{५०० - २००}{३}$  अ याणे

बला दावे.

## ३. कृत्य.

खोटे समीकरण,  $१६ + क्ष - २क्ष + ४क्ष - ८क्ष = ८६$  अथवा  $क्ष = \frac{१६-८६}{५}$  मैल  
उत्तरेकडे.

खरें समीकरण,  $१६ - क्ष + २क्ष - ४क्ष + ८क्ष = ८६$  अथवा  $क्ष = \frac{८६-१६}{५}$  मैल  
दक्षिणेकडे.

वरचे, आणि त्यासारखे दुसरे उदाहरणापासून, ही पुढील गोष्ट स्पष्ट होती ;

काहीं समीकरणे उलगाडल्यावर, जर क्षचा किमतीत अशक्यरूप वजाबाकी असेल, तर ते समीकरण आणि क्षचा अर्थ हीं दोन्हीं समजांत आलीं नाहीत असे जाणावे, तर त्यांस फिरवून तीं नीट केलीं पाहिजेत.

१. समीकरणास खरें रूप द्यावयासाठी, याप्रमाणें केलें पाहिजे, जा पदामध्ये क्ष नुसता एक वर्ण येतो, त्या प्रत्येक पदाचीं चिन्हे बदल कर.

जा समीकरणांचा पूर्वी विचार झाला, तीं सर्व एकवर्ण समीकरणे आहेत, याजकरितां जा समीकरणांमध्ये, क्षक्ष, क्षक्षक्ष, इत्यादि येतात, त्यांविषयीं ही गोष्ट लागू नाही, असे शिकणारानें पक्कें ध्यानांत ठेवावे.

२. समीकरणाचे उत्तराला खरें रूप द्यावयासाठी, याप्रमाणें केलें पाहिजे. अशक्यरूप वजाबाकीचीं पदे फिरवून, उलटीं मांड, झणजे जसें ५०-७० हे, ७०-५० असे मांड, आणि जो गुण खोऱ्या रीतीने उत्तरामध्ये येतो, त्याचा उलटा अर्थ कर. जसें जीं वर्षे नंतरचीं आहेत, तीं पूर्वीचीं असे मान ; जो ऐवज घेणें आहे तो देणें असे मान ; जा दिशेस जाण्याचें आहे, ती दिशा उलटी असे मान ; याप्रमाणें पुढें-हि. झणून क्षचे किमतीचे कल्पनेविषयीं, कितीहि पक्ष असोत, आणि जर त्यांतून एक पक्ष दुसऱ्याचे विरुद्ध आहे, तर त्या पक्षांतून, जर एकाचे उत्पन्नावरून क्षची किमत अशक्यरूप वजाबाकी होत आहे, तर असे जाणावे, कीं दुसरा पक्ष स्वीकारायास योग्य आहे.

कृत्वाचा अर्थ त्याचे शब्दावरून जो मनांत येतो, त्यामध्ये सर्व अर्थांची एकरूपता नसती, असे वारंवार घडतें, झणून, कोणतेहि कृत्य त्याचे

केवळ शब्दाचे सरळ अर्थाने समजांत येत नाही, यामुळे कृत्प्रश्नाचा अर्थ अधिक विस्ताररूपाने कल्पिला पाहिजे.

मागल्ये कृत्प्रश्नाचे प्रश्न सांगण्यांत अशी तजवीज ठेविली आहे, कीं प्रश्नाचे सर्व शक्यरूप पक्षांतून, पाहिजे तो पक्ष घेण्यास मोकळा मार्ग ठेविला आहे. ह्मणजे, प्रथम कृत्यामध्ये असे शब्द आहेत कीं, अर्चे वय बचे वयाचे दुप्पट असण्याचा समय सांग. परंतु अर्चे वय बचे वयाचे दुप्पट कोणत्या समयां होईल ? असे शब्द नाहीत. अशा शब्दांनीं मनांत अशी कल्पना येती, कीं, ही गोष्ट पुढे येण्याची आहे; परंतु समीकरणाने शोध केला असता, असे कळते कीं ही गोष्ट पूर्वी घडून गेली ; आणि प्रश्न असे शब्दांनीं सांगितला, ही चूक आहे. या प्रश्नाची खरी आणि खोटी सांगण्याची रीति खाली लिहून दाखवितो.

#### खरी रीति.

सन् १८३० या वर्षांत अर्चे वय ५० होते, आणि वयाचे वय ३५ होते. तर अर्चे वय बचे वयाचे दुप्पट असण्याचा समय सांग,

#### उत्तर.

सन् १८३० याचे पूर्वी २० वर्षे अथवा सन् १८१० त.

#### खोटी रीति.

सन् १८३० या वर्षांत अर्चे वय ५० होते, आणि वयाचे वय ३५ होते. तर अर्चे वय बचे वयाचे दुप्पट केव्हां होईल ?

#### उत्तर.

या पुढे कधीही होणार नाही; परंतु २० वर्षांपूर्वी अर्चे वय बचे वयाचे दुप्पट होते.

वरचा प्रश्न या दोनही रितीने सांगितल्याने, अशक्यरूप वजावाकी होण्याची संभावना घडेल ; परंतु पहिल्या तऱ्हेचे सांगण्यावरून, शिकणारापुढे मोहगम प्रश्न टाकिला आहे, तेव्हां कदाचित् तो खोटाही पक्ष स्वीकारील ; आणि दुसरे तऱ्हेचे सांगण्याने, अशक्यरूप वजावाकी होण्याचे कारण हेंच, कीं कृत्प्रश्नांत त्याच शब्दांचे सरळ अर्थ-वरून खोटा पक्ष शिकणाराचे मनांत सहज येतो.

कृशांत किती पक्ष आहेत, हे बहुतकरून सहज समजण्यांत येते; परंतु, ते जर न येई, तर ते समजायास त्यांस, बहुतकरून, समीकरण साधन होतें.

### ३ उलटा विषय

#### उदाहरण.

$$३क्ष-१० = २क्ष-८$$

$$३क्ष-२क्ष = १०-८$$

$$क्ष = २$$

वरचा समीकरणाची सत्यता जाणल्यावरून, असें दिसतें, कीं, त्याचे प्रत्येक बाजूस अशक्य वजावाकी आहे, ह्मणजे  $३क्ष-१०$  हे  $६-१०$  आहेत, आणि  $२क्ष-८$  हे  $४-८$  आहेत. मागील उदाहरणांविषयीं कांहीं जें लिहिलें आहे त्यानंतर या पक्षां एथें फार सांगण्याचें प्रयोजन नाहीं. पुढें या समीकरणासारखें कृत्य सांगितलें आहे. उत्तर अपूर्णाक असेल, तर त्याचे अंश आणि छेदांमध्ये, अशक्य वजावाकी जा कृतीनें येती, त्या कृतींत वरचे सारिखी कांहीं चूक असती. जर  $अक्ष+ब = कक्ष+ड$ , हे याप्रमाणें उलगडलें ह्मणजे,  $अक्ष-कक्ष = ड-ब$ , अथवा  $क्ष = \frac{ड-ब}{अ-क}$  असें रूप होतें, त्यानंतर असें कळतें, कीं कपेक्षां अ उणा आहे, आणि बपेक्षां ड उणा आहे, तर यापासून अशी सूचना होती कीं, याचे उलगडण्याचे रितींत चूक झाली, आणि नीट उलगडण्याची रीति हीच आहे, ह्मणजे  $कक्ष-अक्ष = ब-ड$ . वरची चूक केवळ कृतीचे क्रमांत आहे, आणि कृत्याचे कल्पनेंत कांहीं चूक नाहीं.

कृत्य. १३ या अंकाचे दोन भाग कर, अशे रितीनें कीं, पहिल्या भागाची तिप्पट जितक्यानें दुसऱ्या भागाचे अर्धपेक्षां अधिक आहे, तितक्यानें पहिला भाग ४ पेक्षां अधिक असावा.

असें सांगितल्यावरून, जर पहिला भाग क्ष असेल, तर हे पुढील समीकरण होतें.

$$३क्ष - \frac{१३-क्ष}{२} = क्ष-४$$

यास उलगाडून, क्ष=१ निघतो, यामुळे १३ चे दोन भाग, १ आणि १२ असावे. परंतु अशे तऱ्हेने, हे कृत्य अशक्य आहे, कां की पहिल्याची तिप्पट दुसऱ्याचे अर्धापेक्षा अधिक नाही. परंतु कृत्यामध्ये सर्व ठिकाणी, अधिक या शब्दाचे स्थळी, उणे मांडिले, तर या पुढील-प्रमाणे समीकरण होईल,

$$\frac{१३-क्ष}{२} - ३क्ष = ४-क्ष$$

या समीकरणाचे उत्तर पूर्वीचे समीकरणाचे बरोबर आहे, क्षणजे, क्ष=१, आणि कृत्य शक्यरूप आहे; कां की ३क्ष अथवा ३ हे,  $\frac{१}{२}(१३-क्ष)$ , अथवा ६, यापेक्षा जितक्याने उणे आहेत तितक्याने क्ष अथवा १, हा ४ पेक्षा उणा आहे.

आतां विचार केला पाहिजे, कीं समीकरणास उलगाडून उत्तर सत्यरूप धरितें, परंतु त्या उत्तरानें तपासून, समीकरणाचा असत्यपणा प्रगट होतो, तर ही गोष्ट कशी घडती? आणि जौपर्यंत समीकरणास उत्तरानें तपासून त्याची सत्यता स्थापिली जाई, तौपर्यंत कोणतेंहि उत्तर त्याला स्थापीत नाही, असें समजावें कीं काय? बरचा उलट्या विषयाचे पहिले रूप पहा. समीकरण हेंच आहे,

$$३क्ष-१० = २क्ष-८$$

याचे उत्तर क्ष=२. हें समीकरणांत लावले असतां,

$$६-१० = ४-८$$

समीकरणाचे उलगाडण्याचे रितीवरून हीच गोष्ट घडती कीं, या पुढील दोन समीकरणांचे उत्तर एकच आहे;

$$३क्ष-१० = २क्ष-८$$

$$१०-३क्ष = ८-२क्ष$$



ही गोष्ट कशी घडती, हें, या पुढील, उदाहरणापासून दिसेल ;

$$\text{अक्ष-ब} = \text{कक्ष-ड} \quad \text{ब-अक्ष} = \text{ड-कक्ष}$$

$$\text{अक्ष-कक्ष} = \text{ब-ड} \quad \text{ब-ड} = \text{अक्ष-कक्ष}$$

$$\text{क्ष} = \frac{\text{ब-ड}}{\text{अ-क}} \text{ हें दोहोंचें उत्तर आहे.}$$

यावरून, जेव्हां अक्षे उलटो जातीचा विषय आढळतो, तेव्हां असें जाणावें, कीं कृत्याचे पहाण्याचे शुद्ध रितीची उलटी समजूत आहे, परंतु अक्षे उलटो समजुतीपासून उत्तरामध्ये कांहीं फेर पडत नाही.

४ उलटा विषय.

उदाहरण.

$$\text{अक्ष+ब} = \text{कक्ष+ड} \text{ यास उलगडण्यानें}$$

$$\text{क्ष} = \frac{\text{ड-ब}}{\text{अ-क}}$$

उलगडते समयां दृष्टी चुकून, असें जर घडलें, कीं अ=क अथवा अ-क=०, तर या पुढील रूपाचें उत्तर सांपडेल.

$$\text{क्ष} = \frac{\text{ड-ब}}{०}$$

असें उत्तर समजाया जोगें नाही; कां कीं ड-ब यामध्ये ० किती वेळा जातें, असे प्रश्नांस कांहीं उत्तर देवत नाही. जर कांहीं उत्तर दिलें, तर तें हेंच आहे कीं, शून्य कितीहि वेळा वारंवार घेतलें, तथापि कांहीं होत नाही; यामुलें ड-ब या बरोबर होण्यासाठीं, ० वारंवार घेतलें, तरी पुरत नाही. समीकरणावर पुनः लक्ष्य ठेव; जर अशी कल्पना केली, कीं अ=क, तर अक्ष=कक्ष होईल; ह्मणून, जेव्हां ब=ड, तेव्हां हें समीकरण नेहेमी खरें आहे; परंतु ब आणि ड बरोबर नसले, तर हें समीकरण, कधीहि, खरें होऊं सकत नाही. परंतु जा कृत्यापासून अक्षे

तुज्यां रीतीची मनांत आणिली पाहजे. त्या रीतीची सत्यता स्पष्ट आहे.

वरचे समीकरणामध्ये अशी कल्पना केली की,  $a=k$ , ह्यानून अशे तऱ्हेचे कल्पनेपासून, जर, चालते रीतीचीं उत्तरे समजायाजोगीं नसतील, तर  $a$  केवळ  $k$ चे बरोबर करूं नये, परंतु फार जवळ जवळ करून, उलगाडून, त्याचें उत्तर पहावें; नंतर  $a$  पूर्वीपक्षां  $k$ चे किमतीचे अधिक, जवळ जवळ, आहे असे मनांत आणावें, याप्रमाणें पुढें. या वेगळाले उत्तरावरून  $a=k$  अशे कल्पनेचे उत्तराचा खरा अर्थ आहे कीं नाहीं, हें समजण्यांत येईल. जामध्ये अशी अवघड गोष्ट आहे, त्या जातीचें एक कृत्य तपासून पहातों.

कृत्य. व्यापाराचा तीन मंडळ्या आहेत, आणि त्यांतील एकेक मंडळीचा ४०००, ५०००, आणि ९००० याप्रमाणें पांढ्या आहेत, ह्या तीन मंडळ्यांचा व्यापार एकदांच बंद झाला असतां, ते आपआपल्या पांढ्यांविषयी वांटे बरोबर करतील; परंतु जर दुसऱ्यांत प्रत्येक पांढीदारानें आपआपले पांढीविषयी, मंडळीचे पुंजीला १० रुपये प्रमाणें अगाऊ पैसा भरला असेल, आणि याप्रमाणें तिसऱ्यांत प्रत्येक पांढीदारानें १२ रुपये प्रमाणें अगाऊ दिले असतील, तर बंद होते समर्थी पहिले आणि दुसरे मंडळीचा ऐवज, एकत्र मिळून, तिसऱ्या मंडळीचे ऐवजाचे बरोबर होईल; असें झालें, तर प्रत्येक मंडळींतल्या प्रत्येक पांढीचे बांध्यास काय मिळेल ?

प्रत्येक पांढीचे बांध्याचे रुपये दाखविण्यासाठीं क्ष घे. तेव्हां, कृत्याचे कल्पनेप्रमाणें अगाऊ पैसा भरल्यावर, ह्या तीन मंडळ्यांनीं आपआपल्या पांढीदारास पांढीचा वांटा याप्रमाणें देऊं सकतात, ह्याने पहिली मंडळी, एकएक पांढीस, क्ष रुपये देऊं सकेल, दुसरी मंडळी,  $\text{क्ष}+१०$  रुपये, देऊं सकेल, आणि तिसरी मंडळी,  $\text{क्ष}+१२$  रुपये, देऊं सकेल; तर वेगळाल्या मंडळ्यांचे पांढीची संख्या नजरेत आणून, या वरचे कल्पनेनें  $४०००\text{क्ष}, ५०००(\text{क्ष}+१०)$ , आणि  $९०००(\text{क्ष}+१२)$ , हे त्यांचे वेगवेगळाले ऐवज आहेत; तर कृत्याचे शेवटील, संकेताप्रमाणें, हें पुढील समीकरण होतें,



$$४०००क्ष + ५०००(क्ष + १०) = ९०००(क्ष + १२)$$

$$(\div) १००० \quad ४क्ष + ५(क्ष + १०) = ९(क्ष + १२)$$

$$\text{अथवा} \quad ९क्ष + ५० = ९क्ष + १०८$$

या कलमामध्ये उलटे विषयाविषयी जी गोष्ट सांगितली, तो उलटेपणा यांत दिसतो ७५ आणि ७६ व्हे कृष्णावर जी गोष्ट सांगितली, कीं कृष्णाचे शब्दाचा अर्थ बरोबर समजला नसेल, ही गोष्ट या उदाहरणाचे अशक्यतेविषयी लाक्षां येत नाही, कां कीं अशे गोष्टीवरून अशी कल्पना केली पाहिजे, कीं व्यापार बंद होण्याचे समर्थी, तिन्ही मंडळ्या नादार आहेत, आणि प्रत्येक पांतीविषयी कर्जदारहि आहेत; अशी कल्पना केली असतां, प्रत्येक पांतीचे कर्ज दाखविण्यासाठीं क्ष घे; तर पूर्वी पाहिल्याप्रमाणे, शेवटचे समीकरण या पुढीलप्रमाणे होईल. शि-  
कणाराने यास मांडून उलगडून पहावे.

$$५० - ९क्ष = १०८ - ९क्ष$$

हेहि समीकरण पूर्वीप्रमाणेच अशक्य आहे. तर आतां, वर सांगितल्या वरून, कृष्णाचे संकेतामध्ये, किंचित् भेद करून, त्याचे उत्तर पहा. अशी कल्पना कर, कीं तिसऱ्या मंडळींत ९००० एवढ्या पांत्या ना-  
होंत, परंतु ८९९९ मात्र पांत्या आहेत. अशी कल्पना केली असतां, समीकरण याप्रमाणे होईल.

$$४०००क्ष + ५०००(क्ष + १०) = ८९९९(क्ष + १२)$$

$$\text{अथवा} \quad ४०००क्ष + ५०००क्ष + ५०००० = ८९९९क्ष + १०७९८८$$

$$\text{अथवा} \quad ४०००क्ष + ५०००क्ष - ८९९९क्ष = ५७९८८$$

अथवा

$$क्ष = ५७९८८$$

यामुळे उत्तर हेंच, कीं आरंभी प्रत्येक मंडळी, पांतीप्रमाणे, ५७९८८ इतके रुपये देऊं शकली. आतां वरपेक्षां अणखी थोडा भेद कर,

आणि अशी कल्पना धर, कीं तिसऱ्या मंडळीचा ९००० पांत्यांमध्ये, केवळ एक पांतीचा एक शंभरांश कमी आहे, ह्मणजे, असें समजावें कीं त्या मंडळींत  $८९९९\frac{९९}{१००}$  इतक्या पांत्या आहेत. तर समीकरण याप्रमाणें होईल.

$$४०००क्ष + ५०००(क्ष + १०) = ८९९९\frac{९९}{१००}(क्ष + १२)$$

$$४०००क्ष + ५००० + ५०००० = ८९९९\frac{९९}{१००}क्ष + ८९९९\frac{९९}{१००} \times १२$$

$$४०००क्ष + ५०००क्ष - ८९९९\frac{९९}{१००}क्ष = ८९९९\frac{९९}{१००} \times १२ - ५००००$$

$$\frac{१}{१००}क्ष = \frac{८९९९९९}{१००} \times १२ - ५००००$$

$$(\times) १००$$

$$क्ष = ८९९९९९ \times १२ - ५००००००$$

$$क्ष = ५७९९९८८$$

अथवा, प्रत्येक मंडळी दरपांतीस ५७९९९८८ इतके रुपये देऊं शकेल. अशाच रितीनें, जर तिसऱ्या मंडळीचा  $८९९९\frac{९९९}{१०००}$  इतक्या पांत्या असल्या, तर, समीकरणापासून करपेक्षां अधिक मोठें उत्तर निघेल, आणि याप्रमाणें पुढेहि. ४००० आणि ५००० पांत्यांचे मंडळ्यांतील एकाची पांती वाढविली असतां, वर सांगितल्याप्रमाणें उत्तरें येतील. यामुळें, वरचे प्रश्नाचें उत्तर हेंच आहे, कीं प्रश्नाचे संकेत स्थापायासाठीं, कितीहि मोठे अंक घेतले, तरी संकेतास पुरत, असे होत नाहीं; परंतु संकेतांमध्ये किंचित् फेर केला असतां, उत्तर सांपडेल, आणि तो फेर जसा जसा कमी कमी करावा, तसे तसे उत्तराचे अंक अधिक वाढत जातील. बीजगणित लागू केल्यानें, वरचा सारिखे उलटेविषय उत्पन्न होतात, ते कळायासाठीं, एथें वरचें कृत्य घेतलें आहे. तर आतां ही गोष्ट सोडून देऊन वरचे सारिखे समीकरणाचा कांहीं विचार करितों.

उदाहरण.

$$अक्ष = वक्ष + क$$

यास उलगाडून

$$क्ष = \frac{क}{अ-व}$$

यांत, अ = व असे झाले, तर उत्तर ० होईल. हे समजायाजोगे नाही, आणि समीकरण अशक्य आहे, कां की त्याचे हे पुढील रूप होते.

$$\text{अक्ष} = \text{अक्ष} + \text{क}$$

परंतु जर व पेक्षा अ अति लहान परिमाणाने मोठा असला, तर ते समीकरण आणि त्याचे उत्तर, हीं दोन्ही खरी होतील. ते लहान परिमाण दाखविण्यासाठी  $\frac{1}{m}$  हे घे, तर समीकरण याप्रमाणे होईल,

$$\left(v + \frac{1}{m}\right)\text{क्ष} = \text{वक्ष} + \text{क}$$

अथवा

$$\text{वक्ष} + \frac{\text{क्ष}}{m} = \text{वक्ष} + \text{क}$$

(-) वक्ष

$$\frac{\text{क्ष}}{m} = \text{क}$$

(×) m

$$\text{क्ष} = \text{मक}$$

ही क्षची किंमत वरचे उत्तरापासून हि निघेल, कां की

$$\text{अ} = \frac{\text{क}}{\text{अ-व}} = \frac{\text{क}}{\frac{1}{m}} = \text{मक}$$

व पेक्षा अ कांहीं लहान परिमाणाने अधिक करायासाठी  $\frac{1}{m}$  हा लहान असला पाहिजे, झणून, म मोठा असला पाहिजे; या रितीने एक समीकरण उत्पन्न होईल, जाचे उत्तर इच्छेप्रमाणे मोठे होईल. उदाहरण, क = १ असे घे आणि मनांत आण, की वरचे रूपाचे समीकरण पाहिजे, जाचे उत्तर १०००००० इतके होईल.  $m = \frac{1}{10000000}$  असे घे. तर क्ष = १००००००० असे उत्तर या पुढचे सारिखे समीकरणापासून निघेल.

$$\frac{1}{10000000} \text{क्ष} = 0\text{क्ष} + 1$$

जरी एकादा अंक समीकरणास बरोबर स्थापीत नाही, तरी तो त्यास जवळ जवळ स्थापील, अशी कल्पना करिता येती. परंतु, जवळ

जवळ, हा शब्द मोहगम अर्थाचा आहे. यासाठी आपले कामास पडत नाही, हे दाखविण्यासाठी हे पुढे उदाहरण देतो, मनांत आण कीं, ७क्ष=२क्ष+३ याप्रमाणे समीकरण आहे. क्ष=१ असें असले, तर शोधून पहा कीं, अशे किमतीने, वरचे समीकरण स्थापिले जाते कीं नाही! तो अंक समीकरण स्थापित नाही; कां कीं क्ष=१, तर समीकरणाची एक बाजू ७ आहे, आणि दुसरी बाजू ५ आहे; ह्मणून पहिली बाजू दुसऱ्या बाजूचे बरोबर नाही, परंतु २ इतक्याने व्यापेक्षा अधिक आहे. तसेच उत्तर, तसेच शब्दांनीं या पुढील समीकरणास लागते.

७क्ष=५क्ष+१९९८. यांत, क्ष=१००० असें कल्पून, त्याणें समीकरण स्थापिले जाते कीं नाही हे पहा. येणेंकरून समीकरणाची पहिली बाजू ७००० होती आणि दुसरी बाजू ६९९८ होती. जेव्हां क्ष=१, पहिले समीकरणास जितके जवळ जवळ स्थापितो, तितके क्ष=१००० हे दुसऱ्या समीकरणास जवळ जवळ स्थापितात, असें ह्मणतां येतें कीं काय ! ७००० हे ६९९८ यांचे जितके जवळ आहेत, तितके ७ हे ५ यांचे जवळ होतील कीं काय ! अंकांचीं अंतरें मात्र पाहिलीं असतां, होय, असें उत्तर देतां येतें, कां कीं

$$७-५=२$$

$$७०००-६९९८=२$$

परंतु, जवळ जवळ\*, हे शब्द सरळ अर्थानें समजले असतां, असें बोलवेल, कीं ७ आणि ५ हे जितके परस्पर जवळ आहेत, त्यांपेक्षा ७००० आणि ६९९८ हे दोन परस्पर अधिक जवळ जवळ आहेत. पहिल्या पक्षां ७ या लहान अंकापासून २ अंतर निघते; दुसऱ्यापक्षां ७००० या मोठ्या अंकांतहि २ अंतर निघते, परंतु जवळ जवळ, या शब्दाचा अर्थ, वर सांगितल्याप्रमाणें, लक्षांत घेऊन, क्षची किंमत लहान असेल, त्यापेक्षां जेव्हां ती किंमत मोठी असेल, तेव्हां अक्ष आणि अक्ष+क हे

\* साठे करिते समयी ६९९८ रुपये, यत्किंचित् अंतरानें, ७००० याचे बरोबर असें मानण्यांत येईल, परंतु कांहीं वस्तू ५ रुपयांचे किमतीने घेतली, तशीच वस्तू ७ रुपयांचे किमतीने घेतली, तर फार महाग दिसेल.

अधिक जवळ जवळ होतील, याविषयी पुढे विचार करूं. तर अशे अर्थाने असें ह्मणतां येतें कीं, जेव्हां एकादे कृत्यावरून असें समीकरण निघतें. ह्मणजे

$$\text{अक्ष} = \text{अक्ष} + \text{क}$$

तेव्हां त्याचें उत्तर हेंच आहे, कीं अशे कृत्याचे उत्तरास कोणताहि अंक, कसाहि मोठा असला, तरी पुरत नाही. परंतु जितका जितका अंक मोठा असेल, तितकें तितकें उत्तर जवळ जवळ येईल.

सरळ रितीनें वरचें समीकरण उलगडल्यानें, या पुढीलप्रमाणें उत्तर निघतें.

$$\text{क्ष} = \frac{\text{क}}{\text{अ}-\text{अ}} \text{ अथवा } \frac{\text{क}}{०}$$

कृयाचा अर्थ अनंत अंक आहे, आणि यामुलें समीकरणाचें उत्तर अनंत मोठे आहे, असें ह्मणण्याची त्राल आहे. अशा बोलण्याचा चाली शब्दांचे मूळ अर्थाने समजत नाही, कां कीं अनंत मोठा, अशा अंकाचा बोध होऊं शकत नाही, ह्मणजे असा अंक एवढा मोठा, कीं तो गणायाम किंवा मोजायाम येत नाही, परंतु अनंत, हा शब्द बहुतकरून कामांत आणितात; यास्तव या पुढील सांगितलेल्या अर्थाने हा शब्द स्वीकारितो;

$\text{क}=०$  असलें तर  $\frac{१}{०}$  अनंत आहे. असें ह्मटलें असतां, असें समजावें कीं, ही पुढील गोष्ट सांगण्याचे संक्षेप रितीवांचून, यांत दुसरा कांहीं अर्थ नाही. जेव्हां  $\text{क}$  लहान आहे, तेव्हां  $\frac{१}{\text{क}}$  मोठा आहे; जर  $\text{क}$  अधिक लहान होईल तर  $\frac{१}{\text{क}}$  अधिक मोठा होईल, आणि याप्रमाणें पुढेंहि; ह्मणून  $\text{क}$ , हवा तेवढा लहान केला असतां,  $\frac{१}{\text{क}}$  हा, दुसरा कोणता अंक कसाहि मोठा दिलेला असेल, त्यापेक्षां अधिक करितां येतो. आणि जेव्हां असें ह्मणतो कीं कृत्याचें उत्तर अनंत आहे, तेव्हां असें समजावें, कीं प्रश्नाचे संकेत स्थापायासाठीं कोणताहि अंक, कितीहि मोठा असला, तरी पुरेसा होत नाही; परंतु कोणताहि मोठा अंक जवळ जवळ पुरतो, त्यापेक्षां अधिक



मोठा अंक, अधिक जवळ जवळ पुरतो, आणि याप्रमाणे पुढेहि; ह्मणून यद्यपि कृत्याचे उत्तराचा खरेपणा बरोबरच निघत नाही, तथापि यथेच्छ मोठा अंक घेतल्याने, उत्तर इच्छेप्रमाणे खरेपणाचे जवळ जवळ येईल.

#### ५ उलटा विषय.

##### उदाहरण.

अक्ष+ब=कक्ष+ड यास उलगडण्याने

$$\text{क्ष} = \frac{\text{ड}-\text{ब}}{\text{अ}-\text{क}}$$

आतां पूर्वीचे विषयाप्रमाणे, या समीकरणाचे उलगडणे शाल्यानंतर असें जरी घडेल कीं, अ बरोबर क, आणि याशिवाय ब बरोबर ड, अशी कल्पना करण्याची गरज पडेल, तर उत्तर

$\frac{\text{ड}-\text{ब}}{\text{अ}-\text{क}}$  हे,  $\frac{0}{0}$  असें मांडिले पाहिजे.

यांत कांहीं अर्थ नाही. तर समीकरणाकडे लक्ष लावले असता, क्षला कांहीं निश्चित किंमत देण्याचे प्रयोजन नाही, असें दिसते; कां कीं, जर अ=क, आणि ब=ड, तर क्षची कशीहि किंमत असली, तर अक्ष+ब=कक्ष+ड आहे. यामुळे प्रश्नाचे उत्तर हेच आहे; कीं क्ष ला कशीहि किंमत दिली, तरी समीकरणाचे संकेत स्थापितां येतात. ही गोष्ट या पुढील उदाहरणावर लावून दाखवितों.

कृत्य. असा कांहीं अंक आहे कीं काय, कीं, तो अंक एकानें उणा करून अ वेळा घेतला, आणि तोच अंक दोहोंनी अधिक करून ब वेळा घेतला, या दोहोंची बेरीज, तोच अंक क वेळा घेतला, याचे बरोबर होईल; अ,ब,क, हे व्यक्त अंक, पूर्ण किंवा अपूर्ण असोत ? इच्छिला अंक क्ष आहे, असें मनांत आण, तर

### एकवर्ण समीकरण.

$$अ(क्ष-१)+ब(क्ष+२) = कक्ष$$

$$अक्ष-अ+बक्ष+२ब = कक्ष$$

$$अक्ष+बक्ष-कक्ष = अ-२ब$$

$$(अ+ब-क)क्ष = अ-२ब$$

$$क्ष = \frac{अ-२ब}{अ+ब-क}$$

ताळा.

$$क्ष-१ = \frac{क-३ब}{अ+ब-क}$$

$$क्ष+२ = \frac{३अ-२क}{अ+ब-क}$$

$$अ(क्ष-१)+ब(क्ष+२)$$

$$अ(क्ष-१) = \frac{अक-३अब}{अ+ब-क}$$

$$ब(क्ष+२) = \frac{३अब-२बक}{अ+ब-क}$$

$$= \frac{अक-२बक}{अ+ब-क} = \frac{क(अ-२ब)}{अ+ब-क}$$

$$= क \times \frac{अ-२ब}{अ+ब-क} = कक्ष$$

कल्पना कर, कीं  $अ=८, ब=४, क=१२$ , असें असेल, अथवा कृत्य पुढीलप्रमाणें असेल; तो अंक काय आहे, कीं यास एकाच उणा क-रून बाकी ८ नीं गुणिली, तो गुणाकार, आणि त्याच अंकास २ मिळ-वून, ती बेरीज ४ होनीं गुणिली, या दोहोंची बेरीज त्या इच्छिलेल्या अंकाचे १२ पट होईल ! यांत असें दिसतें, कीं  $अ-२ब=०$ , आणि  $अ+ब-क=०$ ; तर यावरून वरचे उत्तर हेंच रूप धरितें,  $\frac{०}{०}$  हें असें उत्तर कसें घडतें, तें समजायासाठीं, हा पक्ष तपासून पहातां हें पुढील समी-करण येतें.

$$८(क्ष-१)+४(क्ष+२) = १२क्ष$$

$$८क्ष-८+४क्ष+८ = १२क्ष$$

$$१२क्ष = १२क्ष$$

ही गोष्ट नेहेमी खरी आहे, यामुळे वरचे सारखे प्रश्नाला हेंच उत्तर, कीं हरएक पूर्ण किंवा अपूर्णांक, जो १ पेक्षा मोठा आहे, तो

कृत्याचे संकेत स्थापितो;  $\frac{0}{0}$  या रूपास जो अर्थ देण्याची कल्पना केली होती, त्यासारखे हे उत्तर आहे.

समीकरणाचा रितीविषयी आणि त्यांचे मूलपीठिकेविषयी जा गोष्टी वर सांगितल्या, त्यांचा साहाय्याने, आतां काहीं कृत्ये उलगडितो. पदार्थविज्ञानाचे निरनिराळ्ये भागांतून उदाहरणे घेतलीं आहेत, तीं अनुक्रमाने वेगवेगळ्या भागांत येतील, आणि जा अनुभविक गोष्टींवरून उलगडणें होतें, त्या गोष्टी प्रत्येक भागाचा आरंभीं सांगितल्या आहेत.

उदाहरणें, १ भाग. स्पिसिफिक् ग्राविटीविषयी.\* काहीं एक पदार्थाची स्पिसिफिक् ग्राविटी ह्मणजे पदार्थाचें आकारमान तितकेच पाण्याचे आकारमानाबरोबर असेल, तर त्या पाण्याचें वजन जितके वेळा पदार्थाचे वजनांतून जातें, त्यास त्या पदार्थाची स्पिसिफिक् ग्राविटी ह्मणतात. जसे, इटेची स्पिसिफिक् ग्राविटी दोन आहे, असें ह्मटलें तर त्याचा अर्थ हाच, कीं इटेचें आकारमान एक घनफूट असलें, तर, त्याचें वजन एक घनफूटपाण्याचे वजनाचे दुप्पट आहे असें जाणावें. पाण्याचे घनफुटीचें वजन सुमारें १०००<sup>१</sup> आवारड्युपाईसचे औंसबरोबर आहे.

१ कृत्य. दुधाची स्पिसिफिक् ग्राविटी १.०३ आहे, तर एक पैंट पाणी तीन पैंट दुधांत मिळविलेलें असतां त्या मिश्राची स्पिसिफिक् ग्राविटी काय आहे ?

जर एक पैंट पाण्याचें वजन किती औंस आहे, हें दाखविण्यासाठीं म घेतला, तर दुधाचे एक पैंटाचें वजन  $१.०३ \times म$  इतके औंस होईल, तर त्या सर्व चार पैंटांचे मिश्राचें वजन  $म + (१.०३म)३$ , अथवा  $म + ३.०९म$  औंस, यांजबरोबर आहे. परंतु पाण्याचें चार पैंटाचें

\* स्पिसिफिक् ग्राविटी, हे दोन इंग्रजी शब्द आहेत, यांचा अर्थ विशिष्टगुत्त्व किंवा संबंधी वजन, ह्मणजे दोन समान आकाराचे जे दोन पदार्थ, त्यांचा परस्पर वजनाचा संबंध या इंग्रजी शब्दांचें बरोबर भाषांतर होण्यास कठीण, यामुळे इंग्रजी शब्दच कामांत घेतले आहेत, आणि त्यांचा अर्थ वर सांगितलेले गोष्टीवरून वरें नें मनांत येईल.

† पदार्थविज्ञानाविषयी वजनाची काहीं गोष्ट आली, तर इंग्लिश वजनें कामांत घेतलीं पाहिजेत; त्यांचे सर्व कोष्टक अंकगणित पुस्तकांत दाखविले आहेत.

वजन ४म औंस आहे ; यास्तव, वरची अनुभविक गोष्ट सांगितल्यावरून, मिश्राची स्पिसिफिक् ग्राविटी याप्रमाणे आहे.

$$\frac{म+३'०९म}{४म} = \frac{४'०९म}{४म} = \frac{४'०९}{४} = १'०२२५$$

सोपें पडण्याकरितां या उदाहरणांत म असें एक परिमाण घेतलें, परंतु उलगाडण्याची कृति केल्यानें तें नाहींसें होतें. हें उदाहरण इतकें सोपें आहे कीं खाला समीकरणरूप देऊन उलगाडण्याचें प्रयोजन नाहीं.

२ कृत्य. कांहींएका पदार्थाचे म घनफुट आहेत, आणि त्याची स्पिसिफिक् ग्राविटी अ आहे, तर दुसऱ्या कांहीं ब स्पिसिफिक् ग्राविटीचे पदार्थाचे न घनफुट त्यांत मिळविले, तर त्या मिश्राची स्पिसिफिक् ग्राविटी काय होईल ?

स्पष्ट दिसतें कीं मिश्राचे म+न घनफुटीचें वजन पाण्याचे मअ+नब घनफुटीचे वजनावरोबर होईल. यामुळे मिश्राची स्पिसिफिक् ग्राविटी  $\frac{मअ+नब}{म+न}$  याजबरोबर होईल.

अभ्यासाकरितां उदाहरण.  $\frac{मअ+नब}{म+न}$  हे अ आणि ब यांचे मध्य अवश्य आहेत असें सिद्ध करून दाखीव.

३ कृत्य. १० स्पिसिफिक् ग्राविटीचे पदार्थाचा २० घनफुटी आहेत, याशीं २ स्पिसिफिक् ग्राविटीचे पदार्थाचा किती घनफुटी मिळवाव्या, कीं त्या मिश्राची स्पिसिफिक् ग्राविटी ५ होईल ?

या पदार्थाचा इच्छिलेल्या घनफुटी दाखविण्यासाठीं क्ष घे. तर २०+क्ष या सर्व मिश्राचा घनफुटीचें वजन, २०×१०+क्ष×२, अथवा २००+२क्ष इतक्या पाण्याचे घनफुटीचे वजनावरोबर आहे. यामुळे मिश्राची स्पिसिफिक् ग्राविटी  $\frac{२००+२क्ष}{२०+क्ष}$  या बरोबर होईल. आणि

$$\frac{२००+२क्ष}{२०+क्ष} = ५, \text{ अथवा, } २००+२क्ष = ५(२०+क्ष) \therefore क्ष = ३३ \frac{१}{३}$$

वरचे उदाहरणावरून सर्व साधारण रीति. ब स्पिसिफिक् ग्राविटीचे पदार्थाचा म घनफुटी आहेत, तर त्यास अ स्पिसिफिक् ग्राविटीचा किती घनफुटी मिळवाव्या, कीं मिश्राची स्पिसिफिक् ग्राविटी क होईल ?

इच्छिलेल्या पदार्थाचा घनफुटी दाखविण्यासाठीं क्ष घे. तर

अचे स्पिसिफिक् ग्राविटीचा क्ष घनफुटी, पाण्याचे अक्ष घन-  
फुटीचे वजनावरोबर होतील, आणि व स्पिसिफिक् ग्राविटीचा म घन-  
फुटी, पाण्याचे वम घनफुटीचे वजनावरोबर होतील. यावरून मि-  
श्राचा म+क्ष घनफुटी, पाण्याचे वम+अक्ष घनफुटीचे वजनावरोबर हो-  
तील. ह्मणून, वरचे विशेष उदाहरणाप्रमाणें,

$$\frac{\text{वम}+\text{अक्ष}}{\text{म}+\text{क्ष}} = \text{क} \quad \text{वम}+\text{अक्ष} = \text{क}(\text{म}+\text{क्ष})$$

$$\text{वम}+\text{अक्ष} = \text{कम}+\text{कक्ष}$$

$$\therefore \text{वम}-\text{कम} = \text{कक्ष}-\text{अक्ष अथवा } (\text{व}-\text{क})\text{म} = (\text{क}-\text{अ})\text{क्ष}$$

$$\text{क्ष} = \frac{\text{व}-\text{क}}{\text{क}-\text{अ}} \cdot \text{म}$$

यांत जर कपेक्षां व अधिक आहे, आणि अपेक्षां क अधिक आहे;  
ह्मणजे, जेव्हां व-क आणि क-अ हीं दोन शक्यरूप आहेत, तर हें  
उत्तर खरें आहे. आणि व-क आणि क-अ हीं दोन अशक्यरूप  
असतांहि हें उत्तर खरें; कां कीं, या पक्षां, जो खोटेपणा दृष्टीस येतो  
तो, या पुढील उलट्या मांडण्यानें होतो, ह्मणजे

$$\text{वम}+\text{अक्ष} = \text{कम}+\text{कक्ष}$$

याची खरी मांडण्याची रीति कम-वम = अक्ष-कक्ष अशी आहे.  
परंतु चुकून त्याचे जागीं वम-कम = कक्ष-अक्ष असें मांडितात.  
तर खरें उत्तर याप्रमाणें आहे,  $\text{क्ष} = \frac{\text{क}-\text{व}}{\text{अ}-\text{क}} \cdot \text{म}$ . या पक्षां कपेक्षां अ अ-  
धिक, आणि वपेक्षां क अधिक आहे. ह्मणजे, जेव्हां क हा अ आणि  
व या दोहोंचेमध्ये आहे, तेव्हां हें कृत्य शक्यरूप आहे. जर क हा  
अ आणि व या दोहोंचेमध्ये नाही, तर, ६९ आणि ७० व्या पृष्ठांवर  
जी रीति दाखविली, याप्रमाणें क्षचा जो पहिला अर्थ कल्पिलेला होता,  
त्यास अगदीं उलटा फिरवून, शक्यरूपाचें कृत्य होतें; ह्मणजे, जर अशी  
कल्पना केली, कीं वचे स्पिसिफिक् ग्राविटीचा म घनफुटी यांतून अचे  
स्पिसिफिक् ग्राविटीचा पदार्थ वजा होतो, अथवा जर अशी कल्पना

केली, कीं या व स्पिसिफिक् ग्राविटीचे पदार्थांमध्ये अ स्पिसिफिक् ग्राविटीचा पदार्थ पूर्वीच मिश्रित आहे तेव्हां, खरे रूपाचें कृत्य होतें. ही गोष्ट या पुढील कृत्यास-उलगाडल्यानें समजेल; प्रश्न. व स्पिसिफिक् ग्राविटीचे म घनफुटींतून अ स्पिसिफिक् ग्राविटीचा पदार्थ किती वजा केला पाहिजे, असें कीं बाकीचाची स्पिसिफिक् ग्राविटी क होईल? क हा अ आणि व या दोहोंपेक्षां जसजमा अधिक किंवा या दोहोंपेक्षां कमी असेल, तसतसें या पुढीलप्रमाणें उत्तर होईल.

$$\text{क्ष} = \frac{\text{क}-\text{व}}{\text{क}-\text{अ}} \cdot \text{म} \quad \text{अथवा} \quad \text{क्ष} = \frac{\text{व}-\text{क}}{\text{अ}-\text{क}} \cdot \text{म}$$

परंतु पूर्वी जो उलटा विषय दाखविला त्यासारखाच या वरचे उदाहरणावरून निघेल. उदाहरण, असें मनांत आण कीं व (=६) अशा स्पिसिफिक् ग्राविटीचा म (=२०) घनफुटींतून अ (=१०) अशा स्पिसिफिक् ग्राविटीचा पदार्थ किती वजा केला पाहिजे, असें कीं बाकीचाची स्पिसिफिक् ग्राविटी, क (=१२) होईल? हें कृत्य दाखवायासाठीं अ घे. एथें, जरी कृत्य अशक्यरूप असें उघड दिसतें, तरी उत्तर शक्यरूप होईल, ह्मणजे,

$$\text{क्ष} = \frac{\text{क}-\text{व}}{\text{क}-\text{अ}} \cdot \text{म} = \frac{१२-६}{१२-१०} \cdot २० = \frac{६}{२} \cdot २० = ६०$$

उत्तराचे रूपावरून, याचा अशक्यपणा ओळखला जात नाहीं, परंतु कदावर चांगला विचार केला असतां दिसण्यांत येईल, कीं याशीं उत्तर असंगत आहे; कां कीं ६० घनफुटी २० घनफुटींतून काढायास अशक्य. जा समीकरणावरून असें उत्तर सांपडतें तें हेंच आहे.

$$\frac{१२०-१०\text{क्ष}}{२०-\text{क्ष}} = १२ \text{ अथवा } १२०-१०\text{क्ष} = २४०-१२\text{क्ष}$$

यांत, उत्तर क्ष = ६० असें असतां, ७८ व्या पृष्ठांतल्ये तिसरे उल्लेख विषयाप्रमाणें घडतें. ७९ व्या पृष्ठावरचे गोष्टीवरून, या समीकरणास नोंद करून, याप्रमाणें होईल.

$$१०\text{क्ष}-१२०=१२\text{क्ष}-२४० \text{ अथवा } \frac{१०\text{क्ष}-१२०}{\text{क्ष}-२०}=१२$$

हैं उत्तर या पुढील कृत्यावरून निघतें; अ ( $= १०$ ) या स्पिसिफिक् ग्राविटीचा पदार्थ किती असावा कीं जातून, ब ( $= ६$ ) स्पिसिफिक् ग्राविटीचा म ( $= २०$ ) घनफुटी वजा केल्या असतां, बाकीचाची स्पिसिफिक् ग्राविटी क ( $= १२$ ) बरोबर होईल ? हैं कृत्य दाखविण्यास ब घे.

क्ष  $= ६०$  हैं उत्तर शक्यरूप किंवा अशक्यरूप असें ह्मणणें, या पुढील प्रश्नांचे उत्तरांचे आधारावर आहे. जेव्हां (अ) कृत्य सांगितलें तेव्हां (ब) कृत्याचा कांहीं भास आपल्ये मनान्त आला होता कीं नाहीं? ह्मणजे. (अ) आणि (ब) या दोहोंतून जें खरें होईल त्यास ध्यावयाचें होतें कीं काय; आणि कृत्यांचा तपास केल्याचे पूर्वीच, तें कृत्य खरें आहे असें समजून घेतलें कीं काय ? अथवा शब्दांचे सरळ अर्थावरूनच (अ) कृत्याचें मनन झालें कीं काय ? तर, पहिल्या पक्षां उत्तर हेंच, कीं खोटी कल्पना घेतली, आणि दुसरी कल्पना घेण्यास योग्य होती, आणि उत्तर क्ष  $= ६०$  असें आलें; दुसरे पक्षां, उत्तर हेंच कीं कृत्य अशक्य रूप आहे.

४ कृत्य. सोन्याची स्पिसिफिक् ग्राविटी  $१९\frac{१}{४}$ , आणि रुप्याची  $१०\frac{१}{२}$  आहे; आणि एक सोनार  $\frac{१}{४}$  घनफुटीचा तुकडा विक्रायास आणितो, आणि सांगतो कीं, तो तुकडा शुद्ध सोन्याचा आहे, आणि त्याचें वजन २६० पौंड आहे. तर तो शुद्ध सोन्याचा असेल कीं काय ? जर नसला, तर त्यांत रुप्याची भेळ असेल कीं काय ? त्यापक्षां रुपें आणि सोनें हीं कोणकोणत्या प्रमाणानें मिळविलेलीं आहेत तें सांग.

पाण्याचे एक घनफुटीचें वजन १००० औंस आहे, आणि सोनें  $१९\frac{१}{४}$  वेळा पाण्यापेक्षां भारी ह्मणून, सोन्याचे एक घनफुटीचें वजन  $१९२५०$  औंस होईल, आणि एक घनफुटीचे  $\frac{१}{४}$  शाचें वजन  $४८१२\frac{१}{२}$  औंस होईल, अथवा ३०० पौंड आणि  $१२\frac{१}{२}$  औंस आहे. यामुळे तो तुकडा शुद्ध सोन्याचा नाहीं असें कळतें. पुनः रुप्याचे एक घनफुटीचें वजन  $१०५००$  औंस, आणि एक घनफुटीचे  $\frac{१}{४}$  चें वजन  $१६४$  पौंड आणि १ औंस आहे. यामुळे त्या तुकड्याचें वजन तितक्ये शुद्ध रुप्याचे तुकड्यापेक्षां अधिक आहे, परंतु तितक्येच शुद्ध सोन्याचे तुकड्यापेक्षां कमी आहे, यामुळे तो तुकडा या दोन धातूंचे मिश्राचा आहे. या पक्षां, त्यांतील सोन्याचा भाग दाखविण्यासाठीं क्ष घे, ह्मणून या जागीं



क्ष हा घनफुटीचा अपूर्णांक आहे; तेव्हां  $\frac{1}{8}$ -क्ष, बाकी रुप्याचा भाग आहे, आणि १९२५०क्ष औंस हें सोन्याचें वजन आहे, आणि १०५०० ( $\frac{1}{8}$ -क्ष) औंस हें रुप्याचें वजन आहे. परंतु तुकड्याचें सर्व वजन २६० पौंड, अथवा ४१६० औंस आहे; यामुळे,

$$१९२५०क्ष + १०५००(\frac{1}{8}-क्ष) = ४१६०$$

$$\text{अथवा } क्ष = \frac{१५३५}{८७५०} = \frac{३०७}{१७५०} = \frac{३}{१७} \text{ जवळ जवळ, अथवा } \frac{१}{४} \text{ चे } \frac{१२}{१७}$$

∴ १७ भागांतून १२ भाग सोन्याचे आणि बाकी भाग रुप्याचे आहेत.

आर्किमिडीज याणें जें नामांकित कृत्य पहिल्यानें उलगडलें तें कृत्य हेंच, आणि तें कृत्य या रितीनें सर्व साधारण होईल; अ आणि ब अशा स्थितिस्थितीकृ याविटीचे दोन पदार्थ कोणत्या प्रमाणानें मिळवावे, कीं मिश्राची स्थितिस्थितीकृ याविटी क होईल? इच्छिलें मिश्र करायासाठीं, त्याचें प्रमाण याप्रमाणें घे, ह्मणजे पहिल्याचा १ घनफुटीस दुसऱ्याचा क्ष घनफुटी असाव्या. अशानें पहिल्याचे १ घन फुटीचें वजन, पाण्याचे अ घनफुटी बरोबर होईल, आणि दुसऱ्याचे क्ष घनफुटीचें वजन पाण्याचे वक्ष घनफुटी बरोबर होईल; ह्मणून मिश्राचे १+क्ष घनफुटीचे वजन पाण्याचे अ+वक्ष घनफुटीचे वजना बरोबर होईल. परंतु संकेताप्रमाणें मिश्राची स्थितिस्थितीकृ याविटी क असावी, तर त्या मिश्राचें वजन पाण्याचे क(१+क्ष) घनफुटीचे वजना बरोबर आहे; यामुळे

$$अ+वक्ष = क(१+क्ष) \text{ अथवा } क्ष = \frac{अ-क}{क-ब},$$

यास ९० आणि ९१ व्या पृष्ठावर सांगितलेली गोष्ट लागू पडती. उदाहरणें. २ भाग. तरफेविषयी. एक दांडी, दोन शेवटांमध्ये कोणताहि बिंदू धरून टांगिली असतां, ती एका स्थितींत मात्र स्थिर राहिल, ह्मणजे आडवी सारखी लोंबत राहिल; परंतु तिजवर यथायोग्य वजन ठेविलीं असतां, ती कोणत्याहि स्थितींत स्थिर राहिल असें करितां येईल, असें केलें असतां तीस बरोबर तोललेली दांडी अथवा

तरफ असें ह्मणतात. याविषयीं रिती याप्रमाणें आहेत; पहिल्यानें, असें मनांत आणावें कीं दांडीचें सगळें वजन तिचे मध्यबिंदूवर एकत्र होतें. दुसऱ्यानें, एकादे वजनांत जितके पौंड\* असतील, त्यांस अटी-पासून जितक्या फुटी अंतर असेल त्या फुटीनीं गुणून, त्या गुणाकारास त्याच वजनाचें मोमेंट† असें ह्मणावें; यावरून जर अटीचे एक बाजूचे वजनाचे मोमेंटांची बेरीज दुसऱ्या बाजूचे वजनाचे मोमेंटांचे बेरीजे बरोबर असेल, तर ती दांडी बरोबर तोललेली राहिल. जर दांडी तिचे मध्यबिंदूवर टांगिली नसेल, तर दांडीचें सर्व वजन मध्यबिंदूमध्यें एकत्र आहे, असें जाणलें पाहिजे. जर अटीचे एक्ये बाजूचे मोमेंटांची बेरीज दुसऱ्या बाजूचे बेरीजेचे बरोबर नसली, तर जिची बेरीज मोठी आहे ती बाजू दबेल.

१. कृत्य. १८ फुटी लांबीची एक दांडी आहे, तिचें वजन ४० पौंड आहे; तिचे एक शेवटावर १२ पौंडांचें आणि दुसरे शेवटावर २० पौंडांचें वजन ठेविलें आहे. तर अट कोठे असावी, कीं ती दांडी त्या अटीवर सारखी तोललेली राहिल.

अ	क	ड	ब
१२ पौंड	४० पौंड		२० पौंड

दांडीचें वजन ४० पौंड ह्मणून, हें क मध्यबिंदूवर एकत्र आहे असें मनांत आण. तर अक = कब = ९ फुटी. आतां ६६ वे पृष्ठावरचे १ उलट्ये विषयासारखा खोटेपणा उत्पन्न होईल, ह्मणून, क चे कोणले बाजूस अट ठेवावी हें अगोघर निश्चयें कळत नाहीं, असें असलें तरी उत्तरांत कांहीं फेर होणार नाहीं. आतां मनांत आण कीं, ब आणि क चे मध्यें कोठेहि अटीचें ठिकाण ड असो, ह्मणजे अ ठिकाणीं १२ पौंड आणि क ठिकाणीं ४० पौंड हीं दोन मिळून ब ठिकाणाचे २० पौंडांशीं समतोल असावीं. अड = क्ष फुटी घे. तर कड = (क्ष-९)

\* पौंड आणि फुटी यांचे जागीं दुसरे कोणतेहि जातीचे एक कामांत घेतां येतील; परंतु कृत्यांत सर्व ठिकाणीं एकच जातीचे एकम् घेण्याविषयीं जपलें पाहिजे.

† मोमेंट हा इंग्लिश शब्द आहे त्याचा अर्थ बहुतकरून भारमान किंवा गतिमान आहे.

फुटी, आणि डब =  $(१८-क्ष)$  फुटी. आतां वेगवेगळे वजनांचीं मोमेंटे याप्रमाणे आहेत, अ चें मोमेंट =  $१२$  क्ष, क चें मोमेंट =  $४०(क्ष-९)$ , आणि बचें मोमेंट =  $२०(१८-क्ष)$ ; तर वर सांगितल्या गोष्टीवरून, समतोल असावासाठी, याप्रमाणे होईल.

$$१२क्ष + ४०(क्ष-९) = २०(१८-क्ष), \text{ अथवा } क्ष = १०;$$

यामुळे अटीचें ठिकाण क मध्यबिंदूपासून  $१$  फुट उजवेकडे आहे, अज्ञानें या कृत्याचा अर्थ बरोबर ध्यानांत घेतला, कां कीं उत्तरावरून ताडिले असतां, क्ष-९ आणि  $१८-क्ष$  हीं दोन्ही शक्य आहेत. आतां ड हा क चे डाव्या बाजूस आणि वरप्रमाणे अड = क्ष आहे, असें मनांत आणलें असतां, पूर्वी सांगितल्याप्रमाणे क आणि ब यांचे वजनाची बेरीज अ चे वजनाशीं समतोल असावी; आणि यावरून, डब =  $१८-क्ष$  असावा, परंतु कड = क्ष-९ याचे जागीं ९-क्ष असें होतें. अशे संकेतानें समीकरण याप्रमाणे झालें असतें.

$$१२क्ष = ४०(९-क्ष) + २०(१८-क्ष)$$

$$\text{अथवा } १२क्ष - ४०(९-क्ष) = २०(१८-क्ष), \text{ अथवा } क्ष = १०$$

या आणि पहिल्या पक्षांत इतका भेद आहे कीं,

$$\text{यांत } +४०(९-क्ष) \text{ यांचे जागीं } -४०(-क्ष) \text{ आहे.}$$

या पक्षांचें उत्तर क्ष =  $१०$  यावरून ६६ व्या पृष्ठावरचा पहिला उलटा विषय दृष्टीस पडता,

हें कृत्य या रितीनें सर्व साधारण होतें. दांडीची लांबी (ल) तिचें वजन व.\* आणि उजव्या व डाव्याकडचे दोन शेवटांवर वजन प आणि क अशीं घे, आतां अड = क्ष घे, आणि मनांत आण कीं अटीचें ठि-

\* व हा वजनांतील पौंड, अथवा दुसरे काहीं जातीचे एकमात्र वजनाची संख्या दाखवितो, आणि ल फुटीची संख्या, अथवा दुसरे काहीं लांबीचे एकमात्र संख्या दाखवितो.

काण क मध्याचे उजव्येकडे आहे. यावरून कड = क्ष -  $\frac{1}{2}$  ल, डब = ल - क्ष. तर समीकरण याप्रमाणे होतें,

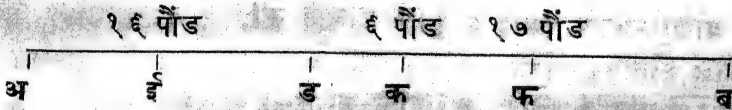
$$प क्ष + व (क्ष - \frac{1}{2} ल) = क (ल - क्ष)$$

$$यावरून क्ष = \frac{व ल + २ क ल}{२ प + २ क + २ व} = \frac{व + २ क}{प + क + व} \times \frac{ल}{२}$$

अभ्यासाकरिता उदाहरणें. जी वर क्षची किंमत काढिली ती पासून ही गोष्ट सिद्ध करून दाखीव, कीं जसा जसा क हा प पेक्षां अधिक, किंवा त्याचे बरोबर, किंवा त्यापेक्षां कमी असेल, तसा तसा क्ष हा  $\frac{1}{2}$  ल यापेक्षां अधिक किंवा त्याचे बरोबर किंवा त्यापेक्षां कमी आहे.

स्टीलयाडी या नावाचा तोलाचा कांटा या वरचे कृत्याचे आधारावरून झाला आहे.

२ कृत्य. एक २० फुटी लांबीची दांडी आहे, तिचें वजन ६ पौंड आणि तिचे डाव्ये शेवटापासून उजव्येकडे ९ फुटींवर तिची अट आहे, तर ७ फुटींचे अंतरानें १६ आणि १७ पौंडांचीं दोन वजनें कोठकोठे ठेवावीं, असें कीं तीं सर्व समतोलांत होतील; यांत अशी कल्पना कर, कीं १६ पौंडांचें वजन डाव्येकडे आहे !



क दांडीचा मध्यबिंदु, ड अटीची जागा, ई आणि फ या दोन वजनाचा जागा आहेत, अशी कल्पना कर. तर अड = ९ फुटी, बड = ११ फुटी, अक = १० फुटी, ईफ = ७ फुटी, आणि डक = १ फुट. आतां अई = क्ष घे; तर ईड = ९ - क्ष, डफ = अफ - अड = अई + ईफ - अड = क्ष + ७ - ९ = क्ष - २. तर याची रचना याप्रमाणे होईल.

† हे एका तऱ्हेचे तोलाचे कांटाचें इंग्रजी नांव आहे.

१६ पौंड, अटीपासून ९-४ फुटी लांब आहेत; हणून याचें मोमेंट १६(९-४), हें ६ पौंड, अटीपासून १ फुट लांब आहेत; हणून याचें मोमेंट  $६ \times १$  अथवा ६ याचे बरोबर होईल.

१७ पौंड अटीपासून ४-२ फुटी लांब आहे; हणून याचें मोमेंट १७(४-२) यामुळे  $१६(९-४) = ६ + १७(४-२)$   $\kappa = ५ \frac{७}{३३}$  फुटी.

हें समीकरण खऱ्या रितीनें मांडिलें आहे, कां कीं, ९-४ आणि ४-२ हीं दोनीं शक्यरूप आहेत. जर अशी कल्पना केली, कीं ई आणि फ हीं दोन वजनें ड चे एकवे बाजूस आहेत, तर यावरून या पुढीलप्रमाणें समीकरण उत्पन्न होईल,

$$१६(९-४) + १७(२-४) = ६$$

$$\text{अथवा } १६(९-४) = ६ - १७(२-४) \quad \kappa = ५ \frac{७}{३३} \text{ फुटी;}$$

यावरून ही क्षची किंमत वरचेप्रमाणेंच आहे, परंतु, २-४ हें अशक्यरूप आहे. ड चे जा बाजूस क आहे, त्याच बाजूस ई आणि फ आहेत, अशी कल्पना केल्यानें. ई, फ, आणि क, हीं वजनें अटीचा एके बाजूस असून, अटीचा दुसरे बाजूस कांहींच वजन नाही, तरी समतोल होतात; अशी खोटी कल्पना केली तरी, त्या संकेतापासून जें समीकरण उत्पन्न होतें, त्यास चालत्या रिती लाविल्या असतां, उत्तर समीकरणाशीं तडून पाहिल्या पावेतो त्याचा अशक्यपणाचें रूप कांहीं एक दिसत नाही. या पक्षीं,



जर अई =  $\kappa$ , तर डक = १, डई =  $\kappa - ९$ , डफ =  $(\kappa - ९) + ७ = \kappa - २$ ; यामुळे, क, ई आणि फ, या वजनांचीं मोमेंटे याप्रमाणें आहेत, ६, १६(४-९), आणि १७(४-२). वरचे कल्पनेप्रमाणें, हणजे, डचे

डाव्ये बाजूस कांहीं वजन नाहीं, यापासून काय होईल तें शोधायास हें पुढील समीकरण शक्यरूप असें मानून काय होईल तें पहा.

$$६+१६(क्ष-९)+१७(क्ष-२)=०$$

यापासून

$$६+१६क्ष-१४४+१७क्ष-३४=० \text{ असें होतें.}$$

$$३३क्ष-१७२=०, \quad ३३क्ष=१७२, \quad क्ष=५\frac{७}{३}$$

हेंहि वरचे उत्तरासारखें आहे. परंतु हें समीकरण अशक्यरूप आहे, कां कीं कोणत्याहि तीन परिमाणांची बेरीज शून्यापेक्षां अगत्य अधिक असवी. अणखी क्ष-९ हें अशक्यरूप आहे असें दिसतें.

६८ आणि ६९ व्या पृष्ठावर जी गोष्ट सांगितली, त्याचप्रमाणें एथें कांहीं गोष्ट सांगितली पाहिजे.

$$क्ष-(क-ब)=०, \text{ अथवा } क्ष+ब-क=०$$

हें समीकरण शक्यरूप आहे, कां कीं क्ष=क-ब. परंतु

$$क्ष+(ब-क)=०$$

हें अशक्यरूप आहे. तथापि, जेव्हां क पेक्षां ब अधिक आहे, तेव्हां क्ष+(ब-क) आणि क्ष+ब-क या दोन पद्धती एकसारख्याच आहेत; परंतु जेव्हां क पेक्षां ब कमी आहे, तेव्हां असा रूपभेद केल्यानें, हें पुढील अशक्यरूप कदाचित् घडेल,

$$क्ष+(ब-क)=०,$$

याचे जागीं हें पुढील शक्यरूप समीकरण घेण्यास योग्य होतें,

$$क्ष-(क-ब)=०.$$

याजवरून जर,

$$क्ष+प = ०,$$

असें समीकरण कधीं आलें, तर निश्चय जाणावें, कीं प हें परिमाण क-रितेसमयीं, कांहीं एक वजावाकीचीं पदें उलटीं केलीं गेलीं; ह्मणजे, क-व याचे जागीं व-क अशी पची किंमत कल्पिली गेली. आतां क-व ही शुद्ध कल्पना क याचे बरोबर आहे असें मनांत आणलें; तर याप्रमाणें होईल,

$$क्ष-क = ०, \text{ अथवा } क्ष = क.$$

९७ व्या पृष्ठावर दुसरे कृत्त्याचें प्रथम उदाहरण साधारण रितीनें याप्रमाणें होतें. ल फुटी लांबीची एक दांडी आहे, तिचें वजन व पौंड आहे, आणि डाव्ये शेवटापासून ती अ फुटी इतक्या अंतरावर टेंकिली आहे, अशी कल्पना कर. तर प आणि क पौंडांचीं दोन वजनें आहेत, त्यांतून एक वजन प, अटीचे डाव्येकडेस असावें, आणि क उजव्याकडेस, आणि त्या दोन वजनांचे मध्यें अंतर म फुटी असावें. तर त्यांची रचना कशी करावी कीं दांडी समतोल होईल ! याचें समीकरण याप्रमाणें होईल,

$$प(अ-क्ष) = व \left( \frac{१}{२}ल-अ \right) + क (क्ष+म-अ)$$

$$क्ष = \frac{पअ+कअ+वअ-\frac{१}{२}वल-कम}{प+क}$$

अभ्यासाकरितां उदाहरण. अ शेवटापासून डाव्येकडे, आणि व शेवटापासून उजव्याकडे, अशी दोहोंकडे दांडी वाढविली आहे अशी कल्पना कर, परंतु अशे वाढविलेल्या दोन तुकड्यांस कांहीं वजन नाहीं असें मनांत आण. तर व = २० पौंड, ल = ५० फुटी, अ = ५ फुटी, प = ४ पौंड, क = ७ पौंड, म = १० फुटी, अशा वेगवेगळ्या



क्रिमती घेऊन, त्या १८ व्या पृष्ठाचे उदाहरणावर लाऊन उलगाडून दाखीव.

उदाहरण. ३ भाग. अनेक प्रकारचा गोष्टींविषयी. १ कृत्य.  
१० इंच लांबीची एक अब सरळ रेष आहे, ती दोहोंकडेस वाढविली  
आहे. ती रेष अ पासून उजव्येकडेस ७ इंचांवर क बिंदूवर छेदिली  
आहे. तर ड बिंदू कोठे असावा, असा कीं जा प्रमाणानें\* अड हा डव  
यास त्याच प्रमाणानें अक हा कव यास होईल ?

अ क ब ड

यांत अक = ७ इंच, आणि कब = ३ इंच आहेत. तर ड बिंदू अ आणि ब यांचे मध्ये, अथवा ब चे उजव्येकडेस, अथवा अ चे डाव्येकडेस असावा. अथवा कदाचित् एकापेक्षा अधिकहि बिंदू असतील; ह्मणजे, ड दोन जागी असला, तर एक बिंदू अचे उजव्येकडेस, आणि दुसरा अ चे डाव्येकडेस येईल. परंतु कृत्याचे संकेतावर ह्यांगला विचार केला असतां, स्पष्ट दिसेल, कीं बचे उजव्येकडे असल्या शिवाय ड दुसऱ्या कोणत्याहि स्थळीं असण्यास अशक्य आहे. कां तर, असें मनांत आण कीं ड हा अ आणि ब यांचे मध्ये कोठेहि येतो, ह्मणजे क आणि ब यांचे मध्ये कोठेहि येतो; तेव्हां, कृत्याप्रमाणें, अक ७ इंच यांत बक ३ इंच जितक्या वेळा किंवा वेळेचे भाग वेळा जातो. तितक्या वेळा किंवा वेळेचे भाग ७ इंचापेक्षा अधिक अड यांत ३ इंचापेक्षा कमी बड जाईल. हें तरी किंचित् विचारानें अशक्य आहे, असें उघड दिसेल. शिकणारानें सिद्ध करून दाखवावें, कीं वरचे कारणावरून, ड बिंदू अ आणि क यांचे मध्ये कोठे असण्यास अशक्य. आणि ड हा अचे डाव्येकडेसहि असण्यास अशक्य; कां कीं असें असलें, तर जितक्या वेळा डब मोठा भाग अड या लहान भागांत जातो तितक्या वेळा कब ३ इंच, अक ७ इंचांत गेले पाहिजेत. ह्मणजे  $२\frac{1}{3}$  वेळा, हेंहि अशक्य. तेव्हां मनांत आण, कीं ड बिंदू बचे उजव्येकडे

\* जेव्हा  $\frac{A}{V}$  आणि  $\frac{K}{U}$  हे अपूर्णाक बरोबर आहेत तेव्हा  $A$  जसा  $V$  ला प्रमाण, तसा  $K$  हा  $U$  ला प्रमाण होईल.

डेस आहे, आणि अड = क्ष इंच घे; तर बड = क्ष-१० इंच. कृत्याचे संकेताने, जा प्रमाणाने ७ हे ३ यांस आहेत या प्रमाणाने क्ष हा क्ष-१० यांस आहे; ह्मणजे,

$$\frac{\text{क्ष}}{\text{क्ष}-१०} = \frac{७}{३} \quad (\times) ३(\text{क्ष}-१०) \quad ३\text{क्ष} = ७(\text{क्ष}-१०)$$

$$\text{यापासून क्ष} = \frac{३५}{२} = १७\frac{१}{२} \text{ इंच.}$$

जरी अशी कल्पना केली असती कीं ड बिंदू अ आणि ब यांचे मध्ये कोठेहि आला, ह्मणजे क आणि ब यांचेमध्यें कोठेहि आला तर, अड = क्ष असें असतां, डब = १०-क्ष होईल, आणि यावरून समीकरण याप्रमाणें झालें असतें.

$$\frac{\text{क्ष}}{१०-\text{क्ष}} = \frac{७}{३}, \text{ अथवा } \text{क्ष}-७\text{क्ष} = ७;$$

ह्मणजे ड आणि क हे दोन बिंदू एकाबागीं येतात. उलटा विषय असें जास नांव दिलें त्यामध्ये हा वरचा पक्ष लिहिला नाही. कां कीं उत्तर असें येईल, असें जरी पूर्वी लक्षांत आलें नव्हतें, तरी कांहीं अधिक समजावल्यावांचून सहज समजायाजोगें आहे. यापासून बोध होतो, कीं जर ड हा अ आणि ब या दोहोंचे मध्ये कोठेहि ठेवायाचा असेल, असा कीं जा प्रमाणानें अक हा कब यास आहे त्याप्रमाणानें अड हा डब ला होईल, तेव्हां ड हा क चे स्थळीं अगत्य असावा. परंतु ड हा अ चे डाव्येकडेस आहे अशी कल्पना केली असतां, आणि अड = क्ष असें घेतलें, तर डब = १०+क्ष होईल, आणि समीकरण याप्रमाणें होईल.

$$\frac{\text{क्ष}}{१०+\text{क्ष}} = \frac{७}{३}, \text{ अथवा } ३\text{क्ष}-७\text{क्ष} = ७०$$

६८ पासून ७८ पर्यंत पृष्ठांवर जो उलटा विषय आहे त्याप्रमाणें हें आहे. यावरून उघड होतें कीं अड ह्मणजे क्ष हा खोच्चे दिशेकडे घेतला, आणि जर अचे उजव्येकडे घेतला, तर समीकरण याप्रमाणें झालें असतें

हैं वर निघाल्याप्रमाणें आहे.

आतां कृत्य फिरवून याप्रमाणें रूप देऊन पहा; मनांत आण, कीं क हा अ आणि ब यांचे बरोबर मध्यस्थळीं आहे, ह्मणजे, अशी कल्पना कर, कीं अब = १२ इंच, आणि अक आणि कब हे प्रत्येक ६ इंचां बरोबर आहेत. तर जा प्रमाणानें कबला अक आहे, त्याच प्रमाणानें डब ला अड होईल तर कोणताहि ड बिंदू क बिंदूवर न पडेल, असा आहे कीं काय ? खचित् नाही; कां कीं अक यांत कब बरोबर १ वेळा जातो परंतु जर ड बिंदू बचे उजव्येकडे किंवा अचे डाव्येकडे असेल, तेव्हां डब पेक्षां अड एक पक्षीं अधिक होईल, आणि दुसरे पक्षीं कमी होईल. परंतु जर ड बिंदू अचे डाव्येकडे किंवा बचे उजव्येकडे फारच लांब ठेविला असेल, तेव्हां अड यांत डब एक वेळेचे जवळ जवळ जातो; ८४ आणि ८५ पृष्ठ पहा, अशे रितीनें ड पाहिजे तितका लांब ठेविला असेल, तेव्हां अड यांत डब इच्छेप्रमाणें हवा तेवढा एक वेळा जवळ जाई असें करितां येईल.\* यापक्षीं समीकरणानें डचें स्थळ जाणण्याविषयीं यत्न केला, तर ८० पृष्ठावरचा उलटा विषय, जाचा अर्थ ८४ पृष्ठावर समजाविला आहे तसा विषय एथें घडेल असें मनांत येईल. मनांत आण कीं ड बिंदू बचे उजव्येकडे ठेविला असतां, या कृत्याचे संकेत तो स्थापितो. अड = क्ष घे. तेव्हां डब = क्ष - १२, अक = ६, आणि कब = ६. यामुळे कृत्याचें समीकरण याप्रमाणें होईल

$$\frac{\text{क्ष}}{\text{क्ष}-१२} = \frac{६}{६} = १ \text{ अथवा } \text{क्ष} = \text{क्ष} - १२. \text{ ८० पृष्ठ पहा.}$$

साधारण रितीनें वरचें कृत्य याप्रमाणें होईल. मनांत आण कीं, अब = अ, अक = ब, आणि अड = क्ष असे घे, आणि ड बिंदू बचे उजव्येकडे असला, तर समीकरण याप्रमाणें होईल

\* ह्मणजे, अ पासून जेवढा ब लांब आहे तितक्याचे हजार पट अंतरावर बचे उजव्येकडे ड बिंदू ठेव, तेव्हां १००१ यांस जसे १००० तसा डब ला, अड अथवा  $१ + \frac{१}{१०००}$  जसे १ स; हें प्रमाण १ स १ याप्रमाणाचे जवळ आहे.



$$\frac{\text{क्ष}}{\text{क्ष}-\text{अ}} = \frac{\text{व}}{\text{अ}-\text{व}} \quad \text{अथवा} \quad \text{क्ष} = \frac{\text{अव}}{2\text{व}-\text{अ}}$$

जे जे वेगळाले पक्ष बीज गणित लागू करतेसमयीं आढळतात, त्या सर्वांवर लागू होई असें आतां एक कृत्य सांगतो हें कृत्य सांगतेसमयीं उत्तरा-विषयींची जी कल्पना मनांत येईल तिचे बाहेर त्याचें उत्तर जातें याचें कारण, केवळ कृत्य करण्याचा अशक्यपणा आहे असें नाहीं, परंतु तें उत्तर उपयोगी किंवा सोईचें नसतें, हें त्यास कारण आहे. उदाहरण, जेव्हां अंकगणितामध्ये, कांहीं एक, अंक दुसरे अंकाचे डाव्येकडे मांडिले, तेव्हां त्यांचा अर्थ असा होतो, कीं डाव्येकडचा अंक १० नीं गुणून त्यांत उजव्या कडचा अंक मिळवायाचा आहे. ह्मणजे, २४ हे  $२ \times १० + ४$  असे आहेत. अशाच रितीनें बहुतकरून अपूर्णांक कामांत आणीत नाहीं; ह्मणजे,  $२\frac{१}{२}$  हे  $२\frac{१}{२} \times १० + ४$ , अथवा २९ असें कधींहि होत नाहीं; परंतु इच्छिलें असतां असेंहि होईल; तसेंच  $३\frac{१}{२}$  हे  $३\frac{१}{२} \times १० + २\frac{१}{२}$ , अथवा  $३४\frac{१}{२}$ , यांचे जागीं मांडितां येतील. या गोष्टीवरून हें पुढील सांगतो.

२ कृत्य. दोन अंकस्थळांचा एक अंक आहे, त्याचे स्थळांकांची बेरीज १० आहे, आणि, त्या अंकांचीं स्थळे उलटीं मांडिल्यानें तो दुप्पट होतो, तर तो अंक काय आहे ?

आतां ९१ हा अंक १९ यांचे दुप्पट नाहीं, ८२ हा अंक २८ यांचे दुप्पट नाहीं, ७३ हा अंक ३७ यांचे दुप्पट नाहीं ६४ हेही ४६ यांचे दुप्पट नाहीं. यामुळे, व्यवहारांतील दशगुणक अंकगणित रितीप्रमाणें, हें कृत्य अशक्य आहे असें दिसतें. तर या कृत्याला समीकरणाचें रूप देऊन कसे तऱ्हेचें उत्तर निघेल ? ह्मणून, अंकांचीं दोन स्थळे दाखविण्यासाठीं, क्ष आणि य हीं अक्षरे घे; तर

$$\text{क्ष} + \text{य} = १०, \text{ अथवा } \text{य} = १० - \text{क्ष}.$$

२४ हा अंक =  $२ \times १० + ४$ ; आणि  $५८ = ५ \times १० + ८$ , इत्यादि असे आहेत, त्याच सारिलें, क्ष स्थळ य चे डाव्येकडे मांडिलें असतां, त्याचे अंक  $१०\text{क्ष} + \text{य}$  हेच आहेत; अंकांचीं स्थळे फिरविलीं असतां, जसें  $४२ = ४ \times १० + २$ , आणि  $८५ = ८ \times १० + ५$ , इत्यादि, तसे, क्ष आणि

य फिरविले असतां,  $१०य+क्ष$  असें होतें, हें कृत्याचे संकेता प्रमाणें, व-  
रचाचे दुप्पट आहे; ह्मणजे,

$$१०य+क्ष=२(१०क्ष+य), \text{ अथवा } २०क्ष+२य.$$

यामुळे  $१०य-२य=२०क्ष-क्ष$ , अथवा  $८य=१९क्ष$ .

परंतु  $य=१०-क्ष$ , अथवा  $८(१०-क्ष)=१९क्ष$ ;

यामुळे,  $क्ष=\frac{८०}{२७}=\frac{२३६}{२७}$ ,  $य=१०-क्ष=\frac{७३९}{२७}$ .

यामुळे उत्तर हेंच आहे, कीं जर एक आणि दहं इत्यादि जागीं चालते रितीप्रमाणें एकचा अंकांशिवाय दुसरा अंक येत नाही असें सम-  
जलें, तर हें कृत्य अशक्य आहे; परंतु जर एकादा अपूर्णांक दुसऱ्या  
अपूर्णांकाचे डाव्येकडे मांडिला असतां, त्याची किंमत दसपट होईल,  
असा अंक मांडण्याचे रितीचा विस्तार केला असतां, हें कृत्य शक्य  
आहे; आणि

नीट अंक  $\frac{२३६}{२७} \frac{७३९}{२७}$ , आणि उलटे अंक  $\frac{७३९}{२७} \frac{२३६}{२७}$  हे आहेत.  
यांत  $\frac{२३६}{२७} \frac{७३९}{२७}$  याचा अर्थ हाच  $\frac{२३६}{२७} \times १० + \frac{७३९}{२७} = ३६\frac{१६}{२७}$  आणि  
 $\frac{७३९}{२७} \frac{२३६}{२७}$  याचा अर्थ हाच  $\frac{७३९}{२७} \times १० + \frac{२३६}{२७} = ७३\frac{९}{२७}$

हे पहिल्याचे दुप्पट आहेत.

वरचे उदाहरणावरून ही गोष्ट खरी आहे; जेव्हां कृत्यापासून अपु-  
र्णांकरूप उत्तर येतें, तें उत्तर केवळ या पुढील संकेताप्रमाणें कामांत आणिलें  
पाहिजे, ह्मणजे समीकरण मांडण्यास पूर्णांक मांडण्याची जी चालती  
रीति लागेल, ती रीति अपूर्णांकांसहि लावावी.

वरचें मूळ कारण व्यवहारांत आणिलें असतां, हें बहुतकरून कांहीं  
वस्तूचा अपूर्ण भागांची कल्पना मनांत आणितें. वास्तविक रितीने  
आणि मूळचा अर्थानें त्या वस्तूचा अपूर्ण भाग होत नाही. जसें, शुद्ध  
बोलण्याचे रितीप्रमाणें अर्धा घोडा असें होत नाही; आकार किंवा  
भारमानाविषयीं अर्धा घोडा असें बोलण्यांत येतें, किंवा घोड्याचे

बळाचे अर्धाविषयीं बोलण्यांत येतें, ह्मणजे तें अर्धे बळ कांहीं भारमानाचे अर्धा बरोबर असतें, किंवा एका घोड्याचा आकार आणि शक्ति दुसऱ्या घोड्याचा आकार आणि शक्ति यांचा अर्धा बरोबर असतो, ह्मणून घोड्याचा जो कांहीं गुण अंकांनी दाखवितां येतो, त्याचें अर्ध करितां येईल; परंतु गुण किंवा अंक हें समजल्याचे पूर्वी शब्दांचे शुद्ध अर्थानें अर्धा घोडा हा प्रयोग होत नाही. तथापि वाफ यंत्राचें बळ  $२०\frac{१}{२}$  घोड्यांचें आहे असें शुद्ध रितीनें बोलतां येतें, आणि हें बळ पोंडांचे वजनानें मोजतां येतें; लांडग्याने अर्धा घोडा खाल्ला असें जर सांगितलें, तर त्याची कल्पना घोड्याचे मासाचे अर्धाविषयीं आहे. हें पुढील कृत्य पहा, २ टनाचें वजन एक घोडा ओढितो; आणि ५ टनाचें वजन किती एक घोड्यांनीं ओढेलें, तेव्हां ते किती घोडे होते! बोलण्याचे शुद्ध अर्थावरून असे प्रश्न खोटे आहेत, परंतु कृत्यामध्ये घोड्याचे ओढण्याचे बळाचे गुणाविषयींच केवळ मनन केलें असतां, असे प्रश्न खोटे नाहींत; आणि जितकें एक घोड्याचें बळ आहे त्याचा  $२\frac{१}{२}$  वेळा, बळ लागलें, याप्रमाणें ह्मणतां येईल. अथवा  $२\frac{१}{२}$  घोड्याचें बळ लागलें. वरची गोष्ट या पुढील उदाहरणावरहि लागती; कांहीं हिशोब ५ रुपये देणें होता, आणि प्रत्येक पुरुषाची वर्गणी २ रुपये होती तेव्हां ते किती पुरुष होते! केवळ शब्दांचे शुद्ध अर्थाने हें उलगडलें जात नाही, परंतु एक पुरुषाची जितकी वर्गणी होती त्याचा  $२\frac{१}{२}$  वेळा इतक्या वर्गण्या होत्या,\* अथवा  $२\frac{१}{२}$  पुरुषांची वर्गणी.

३ कृत्य. अ आणि अ' यार्ड लांबीचे असे दोन कापडाचे ताके आहेत. त्यांचा धणी त्या दोनहि जातींतून बरोबरच मापाचे दोन तुकडे दर यार्डास, व आणि ब' रुपये याप्रमाणें फाडून विकत देतो. आणि त्या दोनहि ताक्यांतून जी बाकी राहिल, ती जर पहिला ताका क रुपये दर यार्ड, आणि दुसरा ताका क' रुपये दर यार्ड याप्रमाणें विकील, तर दोहों ताक्यांची एकंदर किंमत बरोबर होईल. तेव्हां प्रत्येकांतून प्रथम किती किती यार्ड फाडून विकले!

बहुत अक्षरें कामांत आणणें, हें न होण्यासाठी, एकच अक्षरास

\* एक देशामध्ये एक वर्षांत  $४०\frac{१}{२}$  पुरुषांतून एक मरतो असें झटलें तर त्याचा अर्थ हाच कीं ८१ तून दोन मरतात. ह्मणून ही गोष्ट वरचे सारिखी आहे.

इच्छेप्रमाणें एक किंवा अधिक स्वर चिन्हीं लागू करून कामांत आणितान्त, ह्मणजे हे निरनिराळे अंक आहेत असें समजावें, परंतु त्यांचे अर्थांमध्ये कांहीं साधारण गुण आहे. ह्मणून कापडाचे दोन ताक्यांची लांबी, अ आणि अ आहे, त्या ताक्यांतून जे दोन तुकडे फाडून काढले, त्यांचा किंमती दर यार्डास व आणि व आहेत, आणि त्या ताक्यांचे जे दोन तुकडे बाकी राहिले त्यांचा किंमती दर यार्डास क आणि क आहेत परंतु अ आणि व जा अंकांविषयीं घेतले त्यांत जितका फेर आहे तितका अ आणि अ यांचे अंकांविषयीं फेर आहे; ह्मणून हरेक अक्षर भलत्या कांहीं घेतलेल्या अंकांचे स्थळीं मांडितां येतें.

ताक्यांतून दोन तुकडे फाडिले त्यांचे यार्डांची संख्या दाखविण्यासाठीं क्ष घे; तेव्हां जा ताक्यांचा बाक्या रहातील त्या याप्रमाणें होतील, ह्मणजे अ-क्ष आणि अ-क्ष यार्ड. पहिले ताक्याचे तुकड्याची किंमत वक्ष, आणि दुसऱ्या तुकड्याची वक्ष रुपये; यावरून बाकी ताक्यांचा किंमती क(अ-क्ष) आणि क(अ-क्ष) रुपये आहेत या मुळें प्रश्नाचे संकेताप्रमाणें

$$वक्ष + क(अ-क्ष) = वक्ष + क(अ-क्ष)$$

$$वक्ष + अक - कक्ष = वक्ष + अक - कक्ष$$

$$वक्ष - कक्ष + कक्ष - वक्ष = अक - अक$$

$$(व + क - व - क) क्ष = अक - अक$$

$$क्ष = \frac{अक - अक}{व + क - व - क}$$

हे कृत्य या पुढील गोष्टीवर लावून तपासून पहा; मनांत आण, कीं दोन ताक्यांची लांबी ६० आणि ८० यार्ड आहे; पहिल्याने जे त्यांतून तुकडे फाडिले त्यांचा किंमती दर यार्डास १० आणि ९ रुपये

† हरेक अक्षराचे किंमतींत कांहीं फेर दाखवायासाठीं त्या अक्षरास स्वरचिन्ह करितान्त, त्यास स्वरित अक्षर ह्मणतात, परंतु इथे जीत या चिन्हास डाव्या ह्मणतात, ती चाल एथे घेतली आहे.



आहेत अशी कल्पना कर; आणि ताक्यांचे बाकीची किंमत दर यार्डास ४ आणि ३ रुपये आहे. तेव्हां

$$अ=६०, अ=८०, ब=१०, ब=९, क=४, क=३,$$

$$क्ष = \frac{अक-अक}{ब+क-ब-क} = \frac{८० \times ३ - ६० \times ४}{१० + ३ - ९ - ४} = ०$$

८७ व्या पृष्ठावर जा उलखे विषयाचा विचार झाला तसा हा विषय आहे. त्या जागेवर पहाण्यांत आले, कीं क्ष ला कशीहि किंमत दिली, तरी त्या किंमतीने समीकरण उलगाडतें, आणि अशी गोष्ट या उदाहरणांतहि घडती असें कळेल. कां, मूळचे समीकरणावर लक्ष्य ठेवून या किंमतीने नवें समीकरण मांडिलें असतां याप्रमाणें होईल,

$$१०क्ष + ४(६० - क्ष) = ९क्ष + ३(८० - क्ष)$$

अथवा

$$१०क्ष + २४० - ४क्ष = ९क्ष + २४० - ३क्ष$$

अथवा

$$६क्ष + २४० = ६क्ष + २४०$$

आणि क्षला कशीहि किंमत दिली तरी ही गोष्ट या उदाहरणांत खरी आहे. यामुळे उत्तर हेंच आहे, कीं या विशेष पक्षां, आरंभीं ताक्यांतून कितीहि यार्ड फाडिले तरी प्रत्येक ताक्याची सर्व किंमत बरोबर होईल, आतां दुसरें उदाहरण तपासून पहा. पूर्वीप्रमाणें ताक्यांची लांबी ६० आणि ८० यार्ड घे; परंतु पहिल्यानें जे तुकडे त्यांतून फाडिले त्यांची दर यार्डाची किंमत ५ आणि ४ रुपये, आणि बाकीचाही दर यार्डाची किंमत २ आणि ३ रुपये आहेत असें मनांत आण; तेव्हां

$$अ=६०, अ=८०, ब=५, ब=४, क=२, क=३,$$

$$क्ष = \frac{अक-अक}{ब+क-ब-क} = \frac{८० \times ३ - ६० \times २}{५ + ३ - ४ - २} = \frac{१२०}{२} = ६०$$

दोन्ही ताक्यांतून ६० यार्ड फाडिले होते; झणजे पहिल्याचे सर्व घेतले,

आणि दुसऱ्याचे ६० यार्ड घेतले; तर ५ आणि ४ रुपये यार्डाचे दराने पहिल्या ताक्याची किंमत ३०० आणि दुसऱ्याची २४० रुपये आहे. अशाने पहिला ताका सर्व गेला ह्मणून बाकी शून्य राहिली ह्मणून त्याची किंमतहि शून्य, परंतु दुसऱ्या ताक्याचे २० यार्ड राहिले, आणि ३ रुपये यार्डाप्रमाणे, त्याची किंमत ६० रुपये होती. याप्रमाणे पहिल्या ताक्यापासून ३०० रुपये उत्पन्न झाले, आणि दुसऱ्यापासून  $२४० + ६० = ३००$  रुपये उत्पन्न झाले, ह्मणून कृष्याचे संकेताप्रमाणे या दोन किंमती बरोबर आहेत.

पुढील प्रमाणे तिसरे उदाहरण सांगतो. पूर्वीप्रमाणे ताक्यांची लांबी ६० आणि ८० यार्ड घे; परंतु पहिल्याने जे तुकडे त्यांतून फाडिले त्यांची दर यार्डाची किंमत ७ आणि ३ रुपये, आणि बाकीचा यार्डांची दर यार्डास किंमत ५ आणि २ रुपये आहेत, असे मनांत आण; तेव्हां

$$a=६०, \quad a'=८०, \quad b=७, \quad b'=३, \quad k=५, \quad k'=२,$$

$$\text{क्ष} = \frac{a'k - ak'}{b+k-b'-k} = \frac{८० \times २ - ६० \times ५}{७+२-३-५} = \frac{१६०-३००}{१}$$

यांत अशक्यरूप वजाबाकी आहे. ७६ पृष्ठावरचे सारांशावरून क्ष घेण्यांत कांहीं खोटा पक्ष स्विकारिला असे कदाचित् मनांत येईल. परंतु कृष्यास चांगले तपासून पहातां अशी कांहीं चूक दिसत नाही; कां कीं पहिल्याने प्रत्येक ताक्याचे क्ष यार्ड विकायाचे आहेत. परंतु ७६ वे पृष्ठावर बुद्धिपूर्वक कृष्यास असे रूपाने सांगितले, कीं खरी किंवा खोटी कल्पना त्वरेने दिसण्यांत येईल; एथें तरी हें कृष्य सांगण्याने शब्दार्थ कशे कशे तऱ्हेने वाढवावे, असे कीं, हें कृष्य वरचे शब्दांनीं सांगितल्याप्रमाणे, दोन किंवा अधिक पक्षांतून केवळ एकच पक्ष खरा होईल! लक्षांत ठेव, कीं अंक बदलायाचे नाहीत, परंतु उत्तराचे गुण मात्र फिरवायाचे आहेत. आरंभी विकृणारापाशीं ६० आणि ८० यार्ड असे दोन कापडाचे ताके आहेत, आणि शेवटीं त्याजवळ ताक्यांचा तुकडाहि न रहातां, त्याचे जवळ दोन ताक्यांचे सारिखे किंमतीचा पैका रहातो. वरचे कृष्याचे संकेताप्रमाणे पहिल्याने प्रत्येक ताक्यांतून

कांहीं बरोबर यार्ड फाडून विक्रतो, आणि अशे कल्पनेवरून, उत्तर निघते, तें कस अशक्य आहे, असें दाखवितें. अशे जातीचे उदाहरण आल्यावर त्या उत्तराचे गुण फिरवावे, हें पूर्वी सांगितलें; तसें या कृ-  
त्यांत कर, आणि मनांत आण, कीं आरंभीं तो कापडवाला बरोबर दो-  
होंजातीचे कापड विकत घेतो. तर हा संकेत ठेवला पाहिजे, कीं  
आरंभीं पहिल्ये जातीचे कापडाचे ६० यार्ड त्या घेणाराजवळ आहेत,  
आणि शेवटीं त्याच जातीचे कापड लाजवळ कांहीं राहिलें नाहीं; यामुळे,  
जर आरंभीं तो व्यापेक्षां १० यार्ड अधिक विकत घेता, तर खाला सर्व  
७० यार्ड विकत द्यावे लागते. असें असतें, तर त्याला दुसरे जातीचे  
कापड १० यार्ड अधिक घेऊन, सर्व ९० यार्ड विकतें लागतें. परंतु  
अंक बदलायाचे नाहींत, पण त्यांचीं नांवें मात्र बदलायाचीं आहेत,  
ह्मणून जर तो अधिक विकत घेतो, तर खास दर यार्डास ७ (ब) आणि  
३ (ब) रुपये या दराप्रमाणें विकत घ्यावे लागतात. आणि जेव्हां तो  
सर्व कापड विकतो, तें ५ आणि २ रुपये यार्ड प्रमाणें तो देतो. या-  
मुळे याप्रमाणें कृत्याचे सांगण्याचा अर्थ अधिक वाढविला असतां, वरचे  
पक्षांतून हा एक पक्ष या पुढील प्रमाणें होईल;

### वाढविलेल्या अर्थाचे कृत्य.

अ आणि अ यार्ड लांबीचे असे  
दोन कापडाचे ताके आहेत, त्यां-  
चा धणी दोहों जातीचे बरोबर  
यार्ड लांबीचे दर यार्ड ब आणि  
ब रुपये असें साटें ठरवितो. आ-  
तां पहिल्ये जातीचे कापड दर या-  
र्डास क रुपये आणि दुसऱ्या जा-  
तीचे कापड दर यार्ड क रुपये  
याप्रमाणें सावकारानें जर दोहों जा-  
तीचे सर्व कापड दिलें, तर प्रत्येक  
जातीचे कापडाचे उदमापासून  
दोहोंची किंमत बरोबर होईल.

### पहिलें सांगितल्याप्रमाणें कृत्य.

अ आणि अ यार्ड लांबीचे असे  
दोन कापडाचे ताके आहेत. त्यां-  
चा धणी त्या दोनहि जातींतून ब-  
रोबर मापाचे दोन तुकडे दर या-  
र्डास ब आणि ब रुपये याप्रमाणें  
फाडून विकत देतो. आणि त्या  
दोनहि ताक्यांतून जी बाकी रा-  
हिली, ती जर पहिला ताका क  
रुपये दर यार्ड आणि दुसरा ताका  
क रुपये दर यार्ड प्रमाणें विकील,  
तर दोहों ताक्यांची एकंदर किंमत  
बरोबर होईल.

वर दाखविल्याप्रमाणें पहिल्या कृत्यापासून हें पुढील समीकरण होतें,

$$क (अ-क्ष) + बक्ष = क' (अ'-क्ष) + ब'क्ष$$

$$अथवा \quad क्ष = \frac{अक'-अक}{ब+क'-ब'-क}$$

परंतु जेव्हां धणी विकत देणारा असेल, तेव्हां सर्व साधारण पक्षानें मात्र असें समीकरण होतें. आणि जेव्हां तो धणी विकत घेणारा असेल, तर आरंभीं प्रत्येक जातीचें जितकें विकत घेतो, तितक्यास तो बक्ष आणि बक्ष याप्रमाणें पैका देतो; नंतर दोहों जातीचें सर्व कापड ह्मणजे अ+क्ष आणि अ'+क्ष हें दर यार्ड क आणि क' रुपये प्रमाणें विकत देतो. यामुळे त्यापाशीं पहिल्या जातीचे कापडापासून, क(अ+क्ष) - बक्ष अशी बाकी राहिल, आणि दुसऱ्या जातीचे कापडापासून, क' (अ'+क्ष) - ब'क्ष अशी बाकी राहिल. तेव्हां समीकरण याप्रमाणें होतें,

$$क(अ+क्ष) - बक्ष = क'(अ'+क्ष) - ब'क्ष$$

$$अथवा \quad क्ष = \frac{अक'-अक}{ब+क'-ब'-क}$$

हें समीकरण वरचे समीकरणाहून निराळें आहे, ह्मणून यांत जा पदामध्ये क्ष येतो त्या पदाचें चिन्ह बदलतें आणि उत्तरांत अक'-अक यांची उलटी वजाबाकी आहे, ही गोष्ट ७६ व्या पृष्ठावर रीति लिहिली आहे त्याप्रमाणें आहे,

जेव्हां, अ=६०, अ'=८०, ब=७, ब'=३, क=५, क'=२,

धणी विकत देणारा अशा पक्षानें कल्पना करून या अंकांनीं कृत्य तपासून पाहिलें, त्यांत १६०-३०० असें अशक्यरूप वजाबाकीचें उत्तर निघालें. धणी विकत घेणारा अशी कल्पना करून हा दुसरा पक्ष पाहिला असतां, खरें उत्तर निघेल. ह्मणजे ३००-१६० अथवा १४०,

हैं उत्तर कृत्याचा संकेत स्थापिल, असें दिसते. हाच प्रश्न दुसऱ्या अनेक पक्षांनी दाखविला जातो, परंतु सध्या हें काम शिकणारावर सोपून, दुसरें एक कृत्य सांगतों तें सर्वांशीं वरचे कृत्यासारिखें आहे, आणि रूपभेदानें त्याचे पक्षहि वरचे सारिखे आहेत, आणि दोहों कृत्यांचीं समीकरणें एक सारिखीच होतील.

४ कृत्य. खालची आकृती कांहीं प्रांताचा नकाशा आहे, असें मनांत आण. अब रेघ साधनींत असून त्या प्रांताची मर्यादा आहे. सगळे रस्ते डाव्येकडून उजव्येकडेस चढतात, आणि उजव्येकडून डाव्येकडे उतरतात, व जे मैल सांगण्यांत येतात ते प्रांत मर्यादेचे रेघेशीं साधनींत असून लंब रेघेंत मोजिले आहेत, असें मनांत आण. कड रेघ मर्यादेचे रेघेशीं समांतर आहे, आणि ती तिचा उजव्येकडे किंवा डाव्येकडे हें सांगितलें नाहीं, आणि बड, मर्यादेचे रेघेशीं लंब आहे त्याजवर ट आणि वि हे दोन गांव आहेत, ते गांव भूमीचे मानाप्रमाणें अब मर्यादेचे रेघेशीं साधनींत किंवा तिचेवर किंवा तिचे खालीं असावे. प आणि क हे दोन गांव मर्यादेचे रेघेवर आहेत, जशी जशी कड ची स्थिती होये तसे र आणि स गांव र आणि स बिंदूशीं साधनींत किंवा वर किंवा खालीं होतात. भूमीचे मानाप्रमाणें, मर्यादेचे रेघेपासून प्रत्येक साधनींतल्या मैलास अमुक इंचप्रमाणें रस्ते चढतात किंवा उतरतात, ते या पुढीलप्रमाणें;

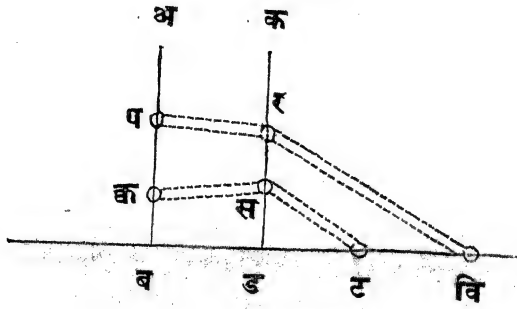
प पासून र कडे दर मैलास ब इंच प्रमाणें.

क पासून स कडे दर मैलास ब इंच प्रमाणें.

र पासून वि कडे दर मैलास क इंच प्रमाणें.

स पासून ट कडे दर मैलास क इंच प्रमाणें.

आतां ट आणि वि हे एकच साधनींत आहेत, बवि रेघ अ मैल साधनींत आहे. आणि बट रेघ त्याच साधनीचे अ मैल आहे. तर मर्यादेचे रेघेपासून बड रेघेची लांबी आणि तिची दिशा कोणती हें सांग.



हैं उदाहरण अभ्यासासाठी सांगितले आहे, आणि वेगवेगळे कल्पने पासून जीं जीं समीकरणे शेवटी निघतात तीं मात्र सांगतो. सर्व कल्पनांत बड रेघेचे मैलांची लांबी दाखविण्यासाठी क्ष घे.

१. जर बचे डाव्येकडे ड असेल, तर

$$\left. \begin{aligned} \text{क(अ+क्ष)} - \text{बक्ष} &= \text{क(अ+क्ष)} - \text{बक्ष} \\ \text{अथवा बक्ष} - \text{क(अ+क्ष)} &= \text{बक्ष} - \text{क(अ+क्ष)} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{जसे टवि रेघ पक याचे सा-} \\ &\text{धनीचे वर किंवा खाली अ-} \\ &\text{सेल याप्रमाणे.} \end{aligned}$$

२. जर आकृतीमध्ये जसा दाखविला तसा ब आणि ट यांचे कोठे मध्ये ड असेल, तर

$$\text{क(अ-क्ष)} + \text{बक्ष} = \text{क(अ-क्ष)} + \text{बक्ष}.$$

३. जर ट आणि वि यांचेमध्ये ड असेल, तर

$$\begin{aligned} \text{बक्ष} - \text{क(क्ष-अ)} &= \text{बक्ष} + \text{क(अ-क्ष)} \text{ जेव्हां अ यापेक्षां अ मोठा आहे तेव्हां,} \\ \text{अथवा बक्ष} + \text{क(अ-क्ष)} &= \text{बक्ष} - \text{क(क्ष-अ)} \text{ जेव्हां अ यापेक्षां अ मोठा आहे तेव्हां,} \end{aligned}$$

आकृतीमध्ये अ यापेक्षां अ मोठा आहे.

४. जेव्हां ट आणि वि यांचे उजव्येकडे ड आहे, तर

बक्ष-क(क्ष-अ) = बक्ष-क(क्ष-अ) } जेव्हां टवि रेघ पक्क चे  
साधनीचे वर आहे,

अथवा क(क्ष-अ)-बक्ष = क(क्ष-अ)-बक्ष } जेव्हां टवि रेघ पक्क चे  
साधनीचे खाली आहे.

वरचे सात समीकरणांतून एक मात्र खरें होऊं शकतें; आणि वरचे ३ या अंकाचे समीकरणाची कल्पना कृत्याचा सांगीतल्या संकेताप्रमाणें आहे, यामुळे बाकीचीं साहा समीकरणें मात्र तपासलीं पाहिजेत. परंतु (१),(२),(३), हे उलटे विषय समजल्यानंतर, असें दिसेल, कीं वरचे साहा समीकरणांतून कोणत्याहि एकापासून खरें उत्तर निघेल. जेव्हां  $ब+क = ब+क$  तेव्हां यापासून (४) उलटा विषय उत्पन्न होईल, आणि त्यांत आणखी अंक = अंक असेल, तेव्हां (५) उलटा विषय उत्पन्न होईल.

पूर्वीं जितकीं वर उलट्ये विषयांचीं वेगवेगळीं उदाहरणें समजाविलीं त्या सर्वांचे प्रत्येक पक्षाचें स्पष्टीकरण या कृत्यापासून होईल, ह्मणून शिकणारानें सर्व उलगडून पहावीं.

कृत्याचे उलगडण्यांत अशक्यरूप वजाबाक्या उत्पन्न होतात असें वरचे गोष्टीवरून दिसण्यांत आले, आणि त्यांस अर्थ देण्याची रीति ही वर पाहिली. जा कृतींचा योगानें अशा अशक्यरूप वजाबाक्यांस अर्थ देणें हव्या त्या कृति क्रमापर्यंत बंद ठेवितां येईल, आणि अशक्यरूपांचीं चिन्हें खऱ्ये अंकरूपाप्रमाणें आहेत असें मानून, चुकी न होऊं देतां कामांत आणितां येतील. अशा रितींचा शोध समीकरणाचीं दुसरीं रूपें दाखविण्याचा पूर्वीं करितों.

## दुसरा अध्याय.

अंकगणित चिन्हांहून भिन्न, अशा बीजगणित चिन्हांविषयीं.

७१ राव्या पृष्ठावर ५०-७०, आणि ७२ राव्या पृष्ठावर २००-५००, अशा पद्धतीस ऋण परिमाण असें नांव दिलें. हें बोलणें शुद्ध नाहीं, कां कीं ५०-७० हें कांहींच परिमाण नाहीं, परंतु जें करायास अशक्य, तें कर ह्मणून जी आज्ञा दिली, तिचा विरुद्ध अर्थाची वरची पद्धति आहे. परंतु, ७० पासून ७७ पर्यंत पृष्ठांत पाहिलें कीं, ५०-७०, असें जेथे कृत्याचें उत्तर आहे, त्याचा अर्थ हा कीं, ७०-५० यापासून जसा कांहीं २० वस्तूंचा अर्थ मनांत येतो, तसा वरचा पासूनहि येतो, परंतु त्या २० वस्तू, उदाहरण प्रारंभ केल्याचे पूर्वी, जा जातीचा कल्पिलेल्या असतात, त्या जातीचे केवळ उलट्या आहेत; ह्मणून खोऱ्ये समीकरणांत जास त्या वस्तू वाढवितात, त्यास खरें समीकरण करितानां उण्या करितात, आणि खोऱ्ये समीकरणांत, जास त्या उण्या करितात, त्यास खरें समीकरण करितानां वाढवितात.

दोन अथवा अधिक कृत्ये अशीं असतात, कीं त्यांतून पहिल्यानें उत्तर समजल्याशिवाय, दुसऱ्या कृत्याचें उलगडणें होत नाहीं; अशा जातीचीं दोन किंवा अधिक कृत्ये एकत्र जोडिलीं असतां, त्यांपासून असें मनांत आणावें, कीं हें सर्व एक कृत्य आहे, जाचें उलगडणें क्रमाक्रमानें होत जातें. जर पहिलें कृत्य उलगडलें, आणि अशक्यरूप उत्तर निघाल्यावरून, खोटा पक्ष स्वीकारिला, असें ध्यानांत आलें असतां, पहिल्यानें उलटी कृति करीत मागें जावें, आणि सर्व नीट करावें, मग याप्रमाणें करीत असतां समजण्याजोगें उत्तर निघाल्यानंतर, दुसरे कृत्याचें उलगडणें पुढें चालवावें. परंतु, ही सर्व खटपट सुटली जाई, आणि जें उत्तर आलें, तें खरेंच आलें, असें मानून, ती कृति पुढें चालवितां येई, अशा कांहीं रिती आहेत कीं नाहींत? हा प्रश्न ताडून पाहण्यास केवळ अंकांविषयीं जा कृती सिद्ध झाल्या आहेत त्या कृती-



अशक्यरूप वजाबाकीचे चिन्हांस लाविल्या असतां, परिणाम काय होईल हें पहिल्याने पाहिलें पाहिजे.

जर अनेक पक्ष लागू होतात असें एक कृत्त असेल, त्यातील एक पक्ष खरा आणि दुसरे खोटे, असें कल्पून, जीं उत्तरें काढिलीं तीं केवळ निराळीं आहेत, इतकें केवळ नाहीं; परंतु समीकरणांस खरें रूप देण्यासाठीं, अव्यक्त उत्तर (क्ष) याशीं जा रीतीनें वर्तलें पाहिजे, त्या रीती दोन निरनिराळ्या पक्षांत निरनिराळ्या आहेत, असेंहि नजरेंत येईल. ही गोष्ट ७० राव्या पृष्ठावर, पहिले कृत्यापासून कळेल; जेव्हां क्ष हा १८३० सना नंतरचे वर्षाचे ठिकाणीं होता, तेव्हां क्ष या क्रमानें मांडावा लागला, ह्मणजे ५०+क्ष आणि ३५+क्ष; परंतु जेव्हां क्ष हा १८३० सनाचे पूर्वीचे वर्षाचे ठिकाणीं होता, तेव्हां क्ष या क्रमानें मांडावा लागला, ह्मणजे ५०-क्ष आणि ३५-क्ष. यावरून निरनिराळीं कृत्ये या बोलण्याचा अर्थ काय, आणि एकच कृत्याचे निरनिराळे पक्ष या बोलण्याचा अर्थ काय, या दोहों बोलण्याचा भेद दाखविण्यासाठीं व्याख्यान या जागीं केलें पाहिजे.

या जातीचा भेद पूर्वीं दाखविला आहे; कां कीं, अ-ब अशी जेव्हां अशक्यरूपाची वजाबाकी आली, तेव्हां कृत्याचें रूप फिरवायास अशे तऱ्हेची रीति नेहमी योजावी लागली, कीं, अंकांची मूळ किंमत फिरविल्यावांचून ब-अअसें उत्तर होण्यासाठीं जा समजुतीनें पहिल्यानें अंक घेतले होते, ती समजूत मात्र फिरविली. ही गोष्ट समजायासाठीं ६६ व्या पृष्ठावरचा पहिला उलटा विषय पहा. त्याचें उत्तर अशक्यरूप नाहीं, परंतु त्या उत्तरानें समीकरण स्थापिलें जात नाहीं. तेव्हां समीकरणास खरें रूप देण्यासाठीं, अंकांची किंमत बदलल्यावांचून, अशक्यरूप वजाबाकी उलटी होई अशी फिरविण्याची रीति मात्र घेतली. या वरून, हे पुढील व्याख्यान,\* लक्ष्य न पोंचतां, कामांत आणिलें गेलें. जा कृत्यांमध्ये हे पुढील तीन संकेत येतात, तीं कृत्ये एकाच कृत्याचे निरनिराळे पक्ष आहेत असें मानण्यास सोईवार पडतें. १. जर कामांत

\* मनांत ठेविलें पाहिजे, कीं हें व्याख्यान केवळ एकवर्ण समीकरणापासून सांपडलें यामुळे अशे जातीचे समीकरणांस मात्र लागेल असें समजावें. परंतु विस्तार केल्या असतां, अनेकवर्ण समीकरणासहि लागेल.

घेतलेले अंक सर्व कृत्यांत सारिखेच असतील; २. जर समीकरणांत हाच भेद असेल कीं, पदे उलटीं मांडिलेलीं असून त्यांचीं चिन्हेही उलटीं असतील, जसें, ६७ आणि ६८ राब्ये पृष्ठावर,  $+ \frac{क्ष-१००}{२}$  याचे जागीं-  $-\frac{१००-क्ष}{२}$  असें मांडिलें आहे, अथवा जा कृत्यांमध्ये अव्यक्त परिमाणांचीं चिन्हे सर्वत्र बदललेलीं असतील, जसें, ७१ राब्ये पृष्ठावर  $५०+क्ष=२(३५+क्ष)$  याचे जागीं  $५०-क्ष=२(३५-क्ष)$  असें मांडिलें; ३. जर दोहोंमध्ये उत्तरे सारिखींच असतील, किंवा उत्तरामध्ये इतकाच भेद कीं वजाबाकीचीं पदे उलटीं मांडिलीं असतील, जसें, ७१ राब्ये पृष्ठावर  $५०-७०$  याचे जागीं  $७०-५०$  असें आहे.

दिसण्यांत निरनिराळ्ये पक्षांचें असें एक कृत्य सांगतां येईल, परंतु वरचे कल्पनेवरून तें कृत्य दोन निरनिराळीं कृत्ये जोडून झालेलें आहे असें दिसेल. उदाहरण, अ जवळ ६० रुपये आहेत, आणि ब चे खातेवहीमध्ये जी शिलकबाकी धन किंवा ऋण राहिल, ती अ ला मिळवयाची आहे; परंतु क, जा जवळ २०० रुपये आहेत, त्याणें बची मालमत्ता घेउन, त्याचें कर्ज फेडावें. असें केल्यानंतर दिसण्यांत येतें कीं, अचे मालमत्तेपेक्षां कची मालमत्ता तिप्पट आहे. तर बची शिलकबाकी घेणें अथवा देणें किती आहे !

जर बला शिलकबाकी क्ष रुपये घेण्याची असेल, तेव्हां समीकरण याप्रमाणें होईल,

$$३(६०+क्ष) = २००+क्ष \text{ अथवा } क्ष = १०$$

जर बने शिलकबाकी क्ष रुपये देणें असेल, तेव्हां समीकरण याप्रमाणें होईल,

$$३(६०+क्ष) = २००-क्ष \text{ अथवा } क्ष = ५$$

एथे निरनिराळ्ये जातीचीं दोन समीकरणे आहेत, आणि पूर्वीचे व्याख्यानाचे संकेताप्रमाणें कोणत्या एक समीकरणाचा रूपभेद केला असतां त्यापासून दुसरें समीकरण होत नाहीं; यामुळे त्या समीकरणांस

एकवर्णाचे रूपांत आणितां येतात, ह्मणून वरचे दोन पक्ष निरनिराळीं कृत्ये आहेत.

आतां अशक्यरूप वजावाकीचे चिन्हांस बीजगणिताचा रीति लावितों, नंतर उलटीं पदे मांडलेल्या वजावाक्यांशीं खऱ्या रितीप्रमाणें चालून, उत्पन्न झालेलीं उत्तरें ताडून पाहून, जा चुक्या झाल्या त्या सोप्या आणि साधारण रितीनीं नीट करितां येतील कीं काय ? हें पहावयाचें आहे, ३-७ अशे जातीची वजावाकी नीट मांडिली असतां ७-३ किंवा ४ होती, तर ती अशक्यरूप वजावाकी सद्यः ४ अशा चिन्हांने दाखवितों; ४ या अंकावर जी गराद केली आहे, तें वजावाकीचें चिन्ह नाहीं, परंतु ७-३ या बदल ३-७ हें उलटें रूप कामांत घेतलें आहे याची सूचना आहे. त्याच प्रमाणें १०-१४ हे ४ अशे चिन्हांने दाखवितां येतील असें ह्मणतां येईल; परंतु जोंपर्यंत या गोष्टीविषयीं कांहीं अधिक खानी होई तोंपर्यंत एथे थांबलें पाहिजे; कां कीं ३-७ आणि १०-१४ अशे जातीचे चिन्हांविषयीं अद्यापि तर्क करवत नाहीं, कां कीं तीं अशक्यरूप वजावाक्यांचीं चिन्हे मनांत घेण्यास योग्य अशीं परिमाणें दाखवीत नाहीं, आणि अद्यापि त्यांविषयीं कांहीं रीति सिद्ध केल्या नाहींत. जापासून हीं चिन्हे निघालीं तेथपर्यंत पुनः जाऊन, जा रितीनें ३-७ निघाले, त्याच रितीनें त्याचे जागीं १०-१४ निघाले असते कीं काय, इतकेंच पहातां येईल.

कल्पना कर, कीं खोव्ये रितीनें समजलेल्या किंवा मांडिलेल्या कृत्यापासून ७० व्ये पृष्ठावरचे प्रमाणें २क्ष-क्ष = ५०-७० असें येते. खरें समीकरण ५०-क्ष = २(३५-क्ष) हें घेतलें. तर त्याचे दोन बाजूंस कोणतेंहि परिमाण मिळवितां येईल. दोहों बाजूंस अ मिळवायाचा आहे असें ह्मण, तर या पुढील प्रमाणें होईल,

$$(५०+अ)-क्ष = (७०+अ)-२क्ष$$

यास उलगडून याप्रमाणें होतें,

$$२क्ष-क्ष = (७०+अ) - (५०+अ) = २०$$

खोऱ्या रूपाचें समीकरण  $५० + क्ष = २(३५ + क्ष)$  असें जर घेतलें, आणि त्याचा दोहों बाजूस जर अ मिळविला, तर उत्तराचा खोटेपणा कळे पावेतो, कल्पना खरी आहे असें मनांत धरून,  $क्ष = (५० + अ) - (७० + अ)$  असा परिणाम होईल. जसें काहीं खरे रितीनें समीकरणाचे खरे रूपांमध्ये काहीं अदलबदल केली असतां,  $७० - ५०, ७१ - ५१, ७२ - ५२$ , इत्यादि अशे रूपाचें उत्तर होतें; त्याच रितीनें, समीकरणाचा खोऱ्या रूपांमध्ये अदलबदल केली असतां,  $५० - ७०$ , याचे जागीं  $५१ - ७१, ५२ - ७२$ , इत्यादि अशे रूपाचें उत्तर होईल, या गोष्टीचा निर्णय करा-याचा आहे. आणि एथपावेतो महत्त्व, अंक, आकार, इत्यादिकांस मात्र बरोबरी या शब्दाचा अर्थ लागू केला, यावरून  $५१ - ७१$  हे  $५० - ७०$  याचे बरोबर आहेत असें सांगत नाहीं; परंतु जा कोणत्या-हि समीकरणापासून  $५० - ७०$  निघाले, त्याच समीकरणापासून  $५१ - ७१$  इत्यादि काढितां येतील. या कारणावरून  $५१ - ७१$  इत्यादि यांस  $५० - ७०$  यांचा बरोबरीचे असें झणवेल; बरोबरीचा या शब्दाचा अर्थ एथे असा आणावा कीं उत्तर नीट करावें लागेल, अथवा जेव्हां जा खोऱ्या कृतीचे ठिकाणीं खऱ्या कृती मिळत नाहीं अशा खोऱ्या कृती नीट कराव्या लागतील तेव्हां पहिल्या चिन्हाचा जागीं दुसरें चिन्ह चुकी न येतां मांडितां येईल. या तऱ्हेनें तर,  $० - १, १ - २, २ - ३$ , इत्यादि हीं सर्व चिन्हे परस्पर बरोबरीचीं आहेत, आणि तीं १ या चिन्हांनें दाखवितां येतात;  $अ - (अ + क)$  आणि  $(अ + क) - (अ + क + क)$  हीं बरोबरीचीं आहेत, आणि तीं कें याणें दाखवितां येतात; झणून रीति हीच आहे; कीं वजाबाकी उलट करून उत्तरावर गराद चिन्ह कर.

जसें जर या पुढीलप्रमाणें समीकरण आलें,

$$क्ष + अ + ब = ०$$

स्पष्ट आहे, कीं हे अति अशक्यरूप आहे, तर केवळ रितीनें उलगडलें असतां याप्रमाणें होईल,

$$क्ष = ० - (अ + ब)$$

त्यांचा अर्थ याप्रमाणें दाखवितां येतो,  $(\bar{a}+b)$

एकवर्ण समीकरणांचें मनन करण्यांत, खरें रूप  $\bar{k}-a=0$ , आणि खोटें रूप  $\bar{k}+a=0$ , या दोहोंवर मात्र लक्ष्य ठेविलें पाहिजे, कां कीं सर्व दुसरीं समीकरणें या रूपांत आणितां येतात. उदाहरण, ५६ आणि ५७ व्या पृष्ठावरचें ४ यें समीकरण रूपांतरानें याप्रमाणें होतें,

$$\bar{k}-\frac{12}{13}=0$$

आणि ७० आणि ७१ व्या पृष्ठावर पहिले कृत्याचें पहिलें समीकरण रूपांतरानें याप्रमाणें होतें,

$$\bar{k}+20=0$$

$$\text{आतां } \bar{a}+b \bullet \bar{a}-b \quad \bar{a} \times b \quad \frac{\bar{a}}{b}$$

यांविषयीं दुसरीं बरोवरीचीं रूपें काढितों,

$\bar{a}+b$  ही पद्धति या पुढील जातीचे समीकरणापासून उत्पन्न होईल,

$$\bar{k}+(p+a)-p+(k+b)=k$$

हे समीकरण अशक्य असें घेतल्याचे पूर्वी, उलगाडलें असतां या पुढीलप्रमाणें निघेल,

$$\bar{k}=p-(p+a)+k-(k+b)=\bar{a}+b$$

परंतु तशाच रितीनें उलगाडलें असतां पुढलें होईल,

$$\bar{k}=p+k-(p+k+a+b)=(\bar{a}+b)$$

यांत  $\bar{a}+b$  यांजवरचा गरादेचा अर्थ हाच आहे, कीं कांहीं एक

परिमाणांतून जें दुसरें परिमाण वजा करायास योजिलें, तें  $अ+ब$  इत-  
क्यानें पहिल्यापेक्षां अधिक आहे. अथवा याप्रमाणें आहे.

$अ+ब$  ही पद्धति ( $अ+ब$ ) हिचे बरोवरीची आहे,

वरचे सारिखें या पुढील समीकरणापासून

$$क्ष+(प+अ)-प+क=(क+ब)$$

$$क्ष=प-(प+अ)-(क-(क+ब))=अ-ब \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{हें केवळ रि-} \\ \text{तीनें होतें.} \end{array} \right.$$

परंतु हें समीकरण नेहेमी अशक्यरूप नाहीं, कां कीं तें या पुढील समी-  
करणाचा बरोवरीचें आहे,

$$क्ष+प+अ-प+क = क+ब$$

अथवा

$$क्ष+अ=ब \text{ तर } क्ष = ब-अ$$

यामुळें, जेव्हां अ पेक्षां ब अधिक आहे, तेव्हां  $अ-ब$  यांचें खरें रूप  
 $ब-अ$  आहे; जेव्हां अ पेक्षां ब उणा आहे, तेव्हां ( $अ-ब$ ) असें आहे.  
हें पुढील समीकरण केवळ रितीनें उलगडलें असतां त्यापासून जें  $ब+अ$   
असें रूप निघतें त्याचा बरोवरीचें रूप देतां येईल.

$$क्ष+(प+अ)-प=ब$$

$$क्ष=ब+(प-(प+अ))$$

$$अ-ब \text{ अथवा } \frac{अ}{ब}$$

अशे रूपाचीं पदे अद्यापि सांपडलीं नाहींत, झणून समीकरणावर लक्ष्य  
न ठेविल्यामुळें अशीं पदे उत्पन्न होतात, परंतु कृत्यावर लक्ष्य न ठेविल्या

मुल्लें उत्पन्न होत नाहींत, हें आतां दाखवितों. ह्मणजे, अवे आणि अव, अथवा  $\frac{अ}{व}$  आणि  $\frac{अ}{व}$ , अथवा यासारिखीं दुसरीं रूपें, एकच समीकरणापासून काढलीं जातील, तें समीकरण खरें किंवा खोटें असो.

जर क पक्षां प अधिक असेल आणि ड पक्षां क अधिक असेल, तर प-क आणि क-ड या दोन शक्यरूप पद्धतींचा गुणाकार, आणि क-प आणि ड-क या दोन अशक्यरूपांचे पद्धतींचा गुणाकार केल्यानें दोहों-चीं उत्तरे सारिखींच होतील, जसें पुढीलप्रमाणें,

$\begin{array}{r} \text{प-क} \\ \text{क-ड} \\ \hline \text{पक-कक} \\ \text{पड-कड} \\ \hline \text{कजाकरून, पक-कक-पड+कड} \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{क-प} \\ \text{ड-क} \\ \hline \text{कड-पड} \\ \text{कक-पक} \\ \hline \text{कड-पड-कक+पक} \end{array}$
--	---

हीं दोन्हीं उत्तरे पदांचे रचने शिवाय सर्वांशीं बरोबर आहेत. यामुल्लें, हें पुढील समीकरण, ह्मणजे

$$\text{क+कक+पड} = \text{पक+कक}$$

दुर्लक्ष्यानें, हें कदाचित् याप्रमाणें उलगडलें जाईल, ह्मणजे

$$\text{क} = \text{पक} + \text{कड} - \text{कक} - \text{पड} = (\text{क-प})(\text{ड-क})$$

परंतु नीट रितीनें उलगडलें असतां याप्रमाणें असावें,

$$\text{क} = (\text{प-क})(\text{क-ड})$$

यावरून, जर प-क याचे जागीं अ घेतला, आणि क-ड याचे जागीं व घेतला, तर अव याचे जागीं अवे असें पद सांपडेल.



$\frac{अ}{ब}$  याचे जागीं  $\frac{अ}{ब}$  हें पद येतें असें कसें घडतें, हें ७८ पृष्ठावरचे उदाहरणावरून पहाण्यांत आलें. क या पक्षां प अधिक, आणि ड या-पक्षां क अधिक, असें मनांत घे; तर

$$कक्ष + क = डक्ष + प$$

यांस खरे रितीनें उलगडलें असतां, याप्रमाणें होईल,

$$(क-ड)क्ष = प-क \text{ अथवा } क्ष = \frac{प-क}{क-ड}$$

खोऱ्ये रितीनें उलगडलें असतां, याप्रमाणें होईल,

$$(ड-क)क्ष = क-प \text{ अथवा } क्ष = \frac{क-प}{ड-क}$$

यावरून, जर प-क याचे जागीं अ, आणि ड-क याचे जागीं ब घेत-ला, तर  $\frac{अ}{ब}$  याचे बरोबरीचा  $\frac{अ}{ब}$  आहे.

जा कृत्यापासून समीकरण झालें, त्यांचे परस्परांचेसंबंधाचा विचार न करितां, समीकरणापासून जे सर्व निरनिराळे पक्ष उत्पन्न होतात, त्यांत बरोबरीचीं रूपें अथवा खरीं रूपें द्यावीं, याची रीति वर ठरविली. उदा-हरणावरून जें वर खचित् समजलें त्याचा आधार घेऊन, आतां कृत्य आणि समीकरण हीं दोन्हीं लक्ष्यांत आणून विचार करितों, ह्मणजे जा खोऱ्ये कल्पनेवरून अ चे जागीं अ असें येतें, त्यापासून समीकरण करतेसमयां वजाबाकी करण्याचे जागीं मिळवणी दाखवितें, आणि जेथें मिळवणी क-रायास योग्य तेथें वजाबाकी दाखवितें.

काहीं समीकरण उलगडून अ हें उत्तर आलें, आणि मागली सर्व कृति खरी असली तर अ हें क शीं मिळवायाचें, अथवा, क+अ याची किंमत काढायाची आहे असें मनांत आण.

नीट करणें आणि पुढें चालायाची रीति. वर सांगितलेल्या उदा-हरणाचें खरें उत्तर अ आहे, परंतु जा खोऱ्ये कल्पनेनें अ असें उत्तर आलें, त्या कल्पनें वरून जेथें खचित् वजा करण्याचें होतें तेथें हें पद



मिळवायाचें असें मनांत आलें. आणि याचे उलटेंहि; ६५ पासून ७० पृष्ठ पर्यंत पहा. यामुळें पुढें करायाची नीट केलेली खरी कृति हीच आहे, ह्मणजे क-अ, अथवा क+अ ही पद्धति क-अ हिचा बरोबरीची आहे.

**खोऱ्ये रितीची तपासणी.** ज्ञ-(ज्ञ+अ) हिचा दर्शक अ आहे. आणि सरळ रितीप्रमाणें क+ज्ञ-(ज्ञ+अ) अथवा क+ज्ञ-ज्ञ-अ हिचा दर्शक क+अ अथवा क-अ, ही वरचे खरे रूपाचे बरोबर आहे असें वर दाखविलें.

याप्रमाणें, क-अ असें आलें, तर अ खरें उत्तर आहे असें ठाऊक आहे, परंतु जा खोऱ्ये कल्पनेनें अ असें उत्तर आलें यावरून जेथें मिळवायास योग्य तेथें त्यास वजा करण्याचें मनांत आणिलें; यामुळें क+अ हें खरें उत्तर आहे. खोऱ्ये कृतीनें याप्रमाणें होतें. क-(ज्ञ-(ज्ञ+अ)), अथवा क-ज्ञ+(ज्ञ+अ), अथवा क-ज्ञ+ज्ञ+अ, अथवा क+अ. यावरून या दोन रिती निघतात ;

क+अ ही क-अ हिचा बरोबरीची आहे,

क-अ ही क+अ हिचा बरोबरीची आहे,

तसेच कल्पनेवरून (प-अ)(क-ब) ही (प+अ)(क+ब) हिचा बरोबरीची आहे. खोऱ्ये कृतीवरून पक-कअ-पब+अब असें होतें. जर कृत्याचे खोऱ्ये समजुतीपासून अ आणि ब असें निघतें हें कल्पनेंत आणिलें, तर नीट करण्याविषयीं तसे जातीचें कांहीं कृत्य आधारासाठीं घेतलें पाहिजे. तें हें असावें ;

अ आणि ब या प्रत्येकांजवळ ४ आणि ५ रुपये आहेत. त्यांची परस्परांत पैज पडली होती, त्यांतून एक, पैज हारल्यानंतर त्या प्रत्येकांजवळ जे रुपये होते त्यांचा गुणाकार १८ बरोबर आहे. तर त्या दोहोंतून कोण किती हारला !

मनांत आण, कीं अ याणें क्ष रुपये गमाविले, तर समीकरण स्पष्ट याप्रमाणें होईल,

$$(४-क्ष)(५+क्ष) = १८$$

जर अ याणें क्ष रूपये मिळविले, तर समीकरण याप्रमाणें होईल,

$$(४+क्ष)(५-क्ष) = १८$$

पहिल्या पक्षानें.

$$\begin{array}{r} ४-क्ष \\ ५+क्ष \\ \hline २०-५क्ष \\ ४क्ष-क्षक्ष \\ \hline २०-क्ष-क्षक्ष \text{ बेरीज} \\ \hline २०-क्ष-क्षक्ष = १८ \\ क्षक्ष+क्ष = २ \end{array}$$

दुसऱ्या पक्षानें.

$$\begin{array}{r} ४+क्ष \\ ५-क्ष \\ \hline २०+५क्ष \\ ४क्ष+क्षक्ष \\ \hline २०+क्ष-क्षक्ष \text{ वजाबाकी} \\ \hline २०+क्ष-क्षक्ष = १८ \\ क्षक्ष-क्ष = २ \end{array}$$

हें उदाहरण, आणि त्याच जातीचें दुसरें उदाहरण तपासल्यानं, पहाण्यांत येतें, कीं वेगळ्ये वेगळ्ये पक्षांचे खरे समीकरणांतील जीं पदें क्ष याणें एक वेळा गुणिर्ली असतात, अथवा जांत ५१ पृष्ठाप्रमाणें क्ष विषयीं एकवर्ण पद आहे, त्यास निरनिराळीं चिन्हे आहेत; परंतु जा पदामध्ये क्ष येतो, अथवा तीं क्ष विषयीं दोन वर्णांचीं पदें आहेत, त्यांस निरनिराळीं चिन्हे नाहींत. आणि क्ष आणि य अशे दोन अव्यक्त पदांचा गुणाकार, पदामध्ये असला, तर वरची गोष्ट त्यावरहि लागती हें पुढें स्थापिलें आहे; ह्मणजे या पुढील समीकरणाप्रमाणें

$$(४-क्ष)(५+य) = १८$$

आणि

$$(४+क्ष)(५-य) = १८$$

अबकें असें पद घेतलें, तर पहाण्यांत येईल कीं नीट केल्यानंतर त्याचे मागलें चिन्ह बदललेलें असतें; परंतु अबकेंडें अशे तऱ्हेचे पदाचें चिन्ह बदलत नाहीं; त्यावरून रीति हीच आहे, कीं जेव्हां नीट करण्याचा पदाचीं गुण्य गुणक अक्षरें विषम असतील, तेव्हां त्या पदाचें चिन्ह बदल कर. जे गुण्य गुणक नीट करायाचे ते अंश किंवा छेदांत

आले तरी त्याची कांहीं चिंता नाही ; उदाहरण, जर,  $\frac{अव}{क}$  असें पद घेतलें, तर जा समीकरणापासून कें असें पद येतें त्यापासून क्षचे जागीं  $\frac{१}{क्ष}$  घेऊन  $\frac{१}{क}$  याचे जागीं  $\frac{१}{क}$  असें निघेल. पहा. जापासून कें असें पद निघतें तें हें पुढील समीकरण आहे,

$$२क्ष + (क + ज्ञ) = क्ष + ज्ञ ;$$

हें समीकरण, सरळ रितीनें उलगडलें असतां, शेवटीं या दोन रूपानीं मांडितात,

$$\begin{array}{ll} २क्ष - क्ष = ज्ञ - (क + ज्ञ) \text{ अथवा } क्ष = क & \\ \text{अथवा} & क्ष - २क्ष = (१ - २)क्ष = क + ज्ञ - ज्ञ = क \\ \text{झणजे} & (१) क्ष = क (\div) कक्ष \frac{१}{क} = \frac{१}{क्ष} \end{array}$$

या उत्तरचा परिणाम शोधित गेलें असतां, असें नजरेस येतें कीं  $\frac{१}{क}$  हें खोळ्ये रूपाचें पद  $\frac{१}{क}$  याचे बरोवरीचें आहे. यावरून  $\frac{अव}{क}$  हें पद  $\frac{अव}{क} \times \frac{१}{क}$ , अथवा  $\frac{१}{क} \frac{अव}{क}$  यांचे बरोवरीचें आहे, यांत नीट केल्यावांचून जे गुण्य गुणक आहेत ते सर्व अंशस्थळीं आहेत.

(प-अ) (क-ब) हें पुनः लक्षांत घेऊन, यांस खोळ्ये रितीनें चालविलें असतां, पक-पब-कअ+अब या बरोबर होईल, तर अनुमानानें असा निश्चय केला पाहिजे, कीं, यास नीट करायासाठीं जा पदांमध्ये अ आणि ब हीं एकवर्ण आहेत, त्या पदांचीं चिन्हे बदल केलीं पाहिजेत; परंतु जा पदांमध्ये अब येतें त्याचें चिन्ह बदल करूं नये; यावरून त्याचें खरें रूप याप्रमाणें होईल,

$$पक + पब + कअ + अब$$

परंतु पहिल्यानें, १२३ पृष्ठावरचे सांगितलेल्या रितीप्रमाणें, जर

(पे-अ)(क-ब) याचे जागीं एकदांच (प+अ)(क+ब) याप्रमाणें नीट मांडिलें असतें, तर वरचे खरे रूपाप्रमाणें उत्तर निघालें असतें.

या तऱ्हेचे जे प्रकार घडतील ते प्रत्येक निरनिराळे विस्तारानें दाखविण्याचें प्रयोजन नाहीं. वरचे सर्व उदाहरणांपासून हें समजलें कीं अशक्यरूप वजाबाकीचे पद्धतीस, चुकीवांचून, बीजगणिताचा सरळ रिती लावितां येतील; ह्मणजे जर नीट करणें शेवटीं करायाचें आहे, तर तें नीट करणें इच्छेस येई तोंपर्यंत बंद ठेविल्यानं त्यांत चुकी येणार नाहीं. शेवटीं या पुढील रितीप्रमाणें नीट करितात; कांहीं पद नीट करायाचें असेल, तेव्हां अशक्यरूप वजाबाकीचे जागीं खऱ्या वजाबाकीचे खरे अंक मांडून अशक्यरूप वजाबाकीचीं चिन्हे बदल कर; जसे, ३ याचे जागीं ३ मांड, अथवा ज्ञ- (ज्ञ+३) याचे जागीं (ज्ञ+३)-ज्ञ असें मांड; जा पदांस विषम वेळा नीट करावें लागतें त्यांचे पूर्वीचें चिन्ह बदल कर; समवेळा नीट करणें असल्यास चिन्ह बदल करूं नको. हें काम वारंवार हवें तितके वेळा कर. इतकें करून जर शेवटीं उत्तर खरें येईल, तर कृत्य बरोबर समजलें, आणि जा चुक्या त्यामध्ये आल्या त्या पहिल्या मांडण्याचे आणि शेवटीं उत्तर येण्याचे मध्ये जा कृती येतात त्यांचे दुर्लक्ष्यानं झाल्या; परंतु नीट केल्यावर जरी उत्तर अशक्यरूप वजाबाकी निघेल, तर कृत्यामध्ये अनेक पक्ष आहेत किंवा तें कृत्य दुसऱ्या कांहीं सामान्य कृत्याचा खोटा पक्ष आहे, या कारणानें तें कृत्य खरें समजलें नाहीं.

उदाहरण, कांहीं कृतीचे शेवटीं या पुढीलप्रमाणें उत्तर आहे असें मनांत आण,

$$\frac{\text{अवक} + \text{उड}}{\text{अक} - \text{उ}} + \frac{\text{अव}}{\text{कड}} - \text{कई}$$

नंतर अ, ब, आणि ई, हीं अशक्यरूप पदे आहेत असें शोधानें समजलें असें मनांत आण, आणि तीं पदे याप्रमाणें झालीं आहेत, ह्मणजे कांहीं अंक, त्यापेक्षां १कानें उणें अशा अंकांत तो अंक वजा करण्यानं अ पद उत्पन्न झालें, अशेच तऱ्हेनं कांहीं अंक, त्यापेक्षां ३ नीं उणें अशा अंकांत वजा करून ब पद झालें, असेच कांहीं अंक त्यापेक्षां ५ नीं उणें अशा अंकांतून वजा करून ई पद झालें. ह्मणजे, अ, ब,

आणि ई, हीं १, ३, आणि ५, यांणीं दर्शवितां येतात. क आणि ड हीं शक्यरूप असून ६ आणि २ यांचे बरोबर असतील. तर नीट केल्याचे पूर्वी, वरची पद्धति याप्रमाणें होईल,

$$\frac{१ \times ३ \times ६ + २ \times २}{१ \times ६ - २} + \frac{१ \times ३}{६ \times २} - ६ \times ५$$

याला नीट करायास पहिली पायरी हीच आहे,

$$\frac{१८+४}{६-२} + \frac{३}{१२} + ३०$$

परंतु ११९ पृष्ठाप्रमाणें,  $-६-२$  हे ८ याणें दर्शवितां येतात; आणि वरचे रितीप्रमाणें यांस नीट केलें असतां, याप्रमाणें होईल  $\frac{३}{१२} + ३० - \frac{२३}{८}$  अथवा  $२७\frac{१}{२}$  हें नीट करणें मुळारंभीं केलें असतें, तर याप्रमाणें उत्तर आलें असतें.

परंतु वरचें रूप, अ हे बीजगणित ग्रंथकर्ते कामांत घेत नाहीं, आणि नेहेमी तसें ठेवायासाठीं एथें घेत नाहीं, परंतु, वजावाकीचें चिन्ह दोन वेगळाल्या अर्थानीं कामांत घेणें हें चुकविण्यासाठीं मात्र घेतलें आहे. रितीचा परिणाम काय होईल हें लक्षांत न आणितां, केवळ रितीप्रमाणें चाललें असतां, या पुढीलप्रमाणें कृती निघतील;

$$३-८ = ३-(३+५) = ३-३-५ = ०-५$$

$०+५$ , याचा अर्थ समजायाला ० ठेवण्याचें प्रयोजन नाहीं, त्यावरून-५ असें मांडावें. पूर्वी ५ असें लिहिलें तें आणि-५ हें एकच आहे. कोणखेहि पद्धतींत-५ असें पद नीट मांडून त्याशीं खरे रितीनें कृति केली ती आणि ५ ही खोटी कल्पना नीट न करून यापासून खरें फळ संपादायाची रीति, या दोहोंचा फार सारखेपणा आहे तो-या चिन्हाचे जितके गुण समजाया जोगे आहेत त्यामध्ये नजरेस येईल.

सारांश, शक्यरूप पद्धतीस जशा रिती लावितात तशा जर+ आणि - यांस लाविल्या, तर जरी त्यांचा सारखेपणा स्थापिला जाई तो जो

भेद ठेविला आहे, तरी तो भेद अ आणि-अ, यांत कांहीं समजणार नाही. उदाहरण, व-अ यांस नीट केलें असतां व+अ आहे. आणि अ पेक्षां ज मोठा असेल, तर व-(ज-अ) नीट केली असतां, व-ज+अ होती; अशानें अचे पूर्वीं दोन उर्णां चिन्हें असून, खरे रूपाचे पदाप्रमाणें कामांत घेतला असतां, उत्तरांत +अ होतो. हीच रीति व-(-अ) यास लाऊन व+अ होतात; ह्मणून अ आणि-अ, हीं एकसारखींच आहेत; असें मानणें आणि प्रवेशकांतील शक्यरूपाचे वजाबाक्यांस जा रीती लावण्यास सांगितल्या खांशिवाय व-अ यास नीट करण्यास, दुसरी रीति नको. जे प्रकार पुढें सांगितले आहेत त्या सर्वांत ही गोष्ट नजरेस येईल.

यास अधिक उघड करायासाठीं हें उदाहरण घे. अ=व-क, क=ड-क्ष, क्ष=य-वि, वि=ट-ज्ञ, असें असावें. तेव्हां याप्रमाणें होईल,

$$\begin{aligned} \text{अ} &= \text{व} - (\text{ड} - \text{क्ष}) = \text{व} - (\text{ड} - (\text{य} - \text{वि})) \\ &= \text{व} - \{ \text{ड} - (\text{य} - (\text{ट} - \text{ज्ञ})) \} \dots \dots \dots (\text{अ}) \\ &= \text{व} - \{ \text{ड} - (\text{य} - \text{ट} + \text{ज्ञ}) \} \\ &= \text{व} - \{ \text{ड} - \text{य} + \text{ट} - \text{ज्ञ} \} = \text{व} - \text{ड} + \text{य} - \text{ट} + \text{ज्ञ} \end{aligned}$$

हें उत्तर पहातां, असें दिसतें कीं ज्ञचे पूर्वीं+ हें चिन्ह आहे; वरचे (अ) पद्धतीमध्ये ज्ञचे पूर्वीं उणें चिन्ह चार वेळा येतें. टचे पूर्वीं-चिन्ह आहे, आणि (अ) पद्धतीमध्ये त्याचे पूर्वीं उणें चिन्ह तीन वेळा येतें. यचे पूर्वीं+चिन्ह आहे, आणि (अ) पद्धतींत त्याचे पूर्वीं उणें चिन्ह दोन वेळा येतें. यामुळें, जा पदांस विषम वेळा उणें चिन्ह आहे तीं पदे ऋण आहेत; आणि जांस समवेळा उणें चिन्ह आहे तीं धनपदे आहेत.

आतां, अशी कल्पना कर, कीं कांहीं समीकरणापासून ०-अ अशी खोटी किंमत सांपडली, आणि ही पूर्वींप्रमाणें, अ याणें दाखवितों. त्याचे पुढेचें कृतीचे पायरीपासून ०-अ ही पद्धति सांपडली असें मनांत आण, तर यास अ याणें दाखवितों. तिसऱ्या कृतीपासून ०-अ असें निघाले,

तर यास  $\bar{अ}$  अशानें दाखवों, आणि याप्रमाणें पुढेंहि. यामुलें, प्रत्येक पा-  
यरीला एक नवा खोटा समज झाला; परंतु, पुढें असें दाखविलें आहे,  
कीं अशी चुकी पुनः पुनः समवेळां झाली असतां, उत्तरामध्ये दिसत नाहीं.  
पहिलें वरचें खोटें उत्तर,  $क्ष+अ=०$  अशे जातीचे समीकरणापासून क्ष  
ची किंमत काढण्याचे यत्नापासून निघालें. आतां य याची किंमत  
काढायास नवी कृति घे, आणि त्या कृतीपासून  $य+क्ष=०$  हें होतें असें  
मनांत आण. खरे रितीनें कृति केली असतां,  $क्ष-अ=०$  आणि  $य-क्ष=०$   
अशीं समीकरणें निघालीं असतीं, ह्मणून त्यांपासून  $य=अ$  हें निघतें,  
परंतु  $क्ष+अ=०$  आणि  $य+क्ष=०$ , या खोल्या समीकरणापासून, केवळ  
सरळ रितीनें कृति केली असतां, तसें उत्तर होईल. कां कीं, दुसऱ्यां-  
तून पहिलें वजा केलें असतां,  $य-अ=०$ , अथवा  $य=अ$  असें निघेल.  
पुनः, ज याची किंमत काढायासाठीं, मनांत आण कीं,  $ज+य=०$  असें  
होतें. हीं पुढील समीकरणें पहा,

$$क्ष-अ=०$$

$$क्ष+अ=०$$

$$य-क्ष=०$$

$$य+क्ष=०$$

$$ज-य=०$$

$$ज+य=०$$

पहिल्ये उभ्ये ओळीचे खरे समीकरणांपासून,  $ज=अ$  असें निघतें; दुस-  
ऱ्ये उभ्ये ओळींतल्या खोल्या समीकरणांपासून असें उत्तर येत नाहीं;  
कां कीं त्यांची संख्या विषम आहे. कां कीं, केवळ रितीनें, पहिल्या-  
शीं तिसरें मिळविलें असतां,  $ज+क्ष+य+अ=०$  होतें, या बेरिजेतून, दु-  
सरें वजा केलें असतां,  $ज+अ=०$  असें निघेल. आणि याप्रमाणें, दुसऱ्ये  
पाहिजे त्या समीकरणावर अशीच कृति लागू होईल. आतां, पहा कीं  
पहिल्या समीकरणापासून  $क्ष=०-अ$  अथवा  $\bar{अ}$  असें निघतें, दुसऱ्या स-  
मीकरणापासून  $य=०-क्ष$  अथवा  $०-\bar{अ}$  अथवा  $\bar{अ}$  असें निघतें, तिसऱ्यापा-  
सून  $ज=०-य$  अथवा  $०-\bar{अ}$  अथवा  $\bar{अ}$ , आणि याप्रमाणें पुढेंहि. यावरून  
दिसतें, कीं या तऱ्हेची चुक समवेळां आली असतां ती आपोआप नीट  
होते, विषमवेळां आली असतां, फिरवून नीट करावी लागती.

आतां ही पुढील पद्धति पुनः घेतों,

$$ब-'\left\{ड-(य-(ट-ज्ञ))\right\}=ब-ड+य-ट+क्ष$$

यांत ज्ञ पेक्षां ट मोठा, आणि ट-ज्ञ या पेक्षां य मोठा, इत्यादि असेल, तर ही पद्धति शक्यरूप आहे. यापूर्वी अशक्य रूपाचे उदाहरणावरून काय निघेल हें पाहण्यासाठीं त्यास केवळ कृती लाविल्या; आतां तेंच पाहण्यासाठीं अशक्यरूप अशा समजलेल्या उदाहरणावर खरे तर्क लावितों. अशापासून कांहीं नवें करावें लागतें असें नाहीं; कां कीं जा तर्कांनीं कृतीची रीति सिद्ध झाली ते तर्क कृती लाविलेसमयीं मनांत नेहेमी धरितों. सिद्धतेवर पुनः लक्ष देऊन, ती सिद्धता जेव्हां घेतलेल्या समीकरणांवर लागू करायाची असते, तेव्हां मात्र अ-(ब-क)=अ-ब+क अशे रितीनें मांडायाला योग्य आहे. याविषयीं प्रवेशकांत पहा. साधारण तर्काचें उदाहरण पुढें सांगतों.

[वरचें समीकरण बहुतकरून खरें आहे, ह्मणून जेव्हां ट=०, य=०, ड=०, आणि ब=०, असें असेल तेव्हां तें समीकरण खरें आहे. परंतु कोणतेंहि पद ० याणें अधिक उणें होत नाहीं, तर वरचे समीकरणांतील पदांमध्ये जेथें ० येतें त्यास टाकून याप्रमाणें होईल,

$$-\left\{-\left(-\left(-ज्ञ\right)\right)\right\}=ज्ञ$$

यामुलें, ज्ञ याचे पूर्वी चार ऋण चिन्हे आहेत ह्मणून त्याचें चिन्ह बदलत नाहीं, आणि दुसरे कोणत्याहि सम चिन्हाविषयीं हीच गोष्ट खरी असें सिद्ध होईल.]

ही वरची तर्क रचना अनुभवाविषयीं मात्र उपयोगी आहे, परंतु ताळा पहाण्याविषयीं ही स्पष्ट खोटी आहे; कां कीं जेव्हां ब=० असें आहे तेव्हां या पक्षाला अ-(ब-क)=अ-ब+क हें समीकरण लावितां येतें. या गोष्टीचा सामान्य ताळा विस्तारानें सांगतों, आणि तो ताळा



विशेष पक्षाला लागू होईल असा असावा, या दोन विषयांची उदाहरणे खालीं दाखवितों.

**सामान्य ताळ्याचें उदाहरण.**

जेव्हां कपेक्षां व मोटा आहे तेव्हां हें रूप खरें.

अ यांतून व-क वजा करायाचा आहे. जर अ यांतून व वजा केला, तर अ-व असें होतें. ह्मणून बाकी कमी राहिली, कां कीं कनें उणा तितका मात्र व चा कांहीं भाग वजा करायाचा होता. यामुळे, क अधिक वजा झाला. आणि अ-व+क हें खरें उत्तर आहे.

**विशेष पक्षावर सामान्य ताळा लागू करून उदाहरण.**

केवळ तर्कानें कोणत्याहि पक्षावर ही गोष्ट लागू व्हावयाजोगी नाहीं.

अ यांतून ०-क वजा करायाचा आहे. जर अ यांतून ० वजा केलें, तर अ-० असें होतें ह्मणून बाकी कमी राहिली, कां कीं, कनें उणा तितका मात्र ० याचा कांहीं भाग वजा करायाचा होता. यामुळे क अधिक वजा झाला. आणि अ-०+क ह्मणजे अ+क हें खरें उत्तर आहे.

जर जो तर्क लागू केला आहे त्याविषयीं कांहीं गोष्ट सांगण्याचें प्रयोजन नाहीं. कांहीं परिमाणांतून शून्य वजा केलें तथापि तें परिमाण अति उणें झालें, शून्याचा कांहीं भाग मात्र वजा करायाचा होता, ह्मणून शून्यास पूर्वीं उणें करायाचें होतें. या अध्यायाचे मागल्ये भागापासून अ-(-क)=अ+क असें जें समीकरण निघालें त्यास जो अर्थ द्यावयाचा तो पुढें लिहितों.

क जें परिमाण दाखवितो त्याचे विरुद्ध जातीचा तो आहे अशी कल्पना केली, अशा विशेष खोखे कल्पनेचें उत्तर ०-क हें विशेष पक्षाचीं उदाहरणे तपासल्यावरून, नेहेमी आढळांत आलें. आणि शोधून पाहिल्यानें असें दिसलें, कीं मिळवणी आणि वजाबाकीविषयीं सगळ्या कृती उलट्या झाल्या; ह्मणजे, जेथें वजा करायाचें होतें तेथें मिळविलें, आणि मिळवायाचें होतें तेथें वजा केलें; जर ०-क अशी अशक्यरूप पद्धति सांपडली नसती, तर ही नवी चूक आपल्यापासून घडली असती. या-

समजूतीचें फळ आहे, तें+असावें. यामुळें अ-(-क) यास शुद्ध रितीनें मांडलें असतां, अ+क आहे, परंतु अ+क याचे बरोबर नाही. तिसऱ्यानें, शोधावरून असें दिसलें, कीं जर खोऱ्या समजूतीचें फळ शुद्ध केल्यावांचून याशीं कित्येक कृती केल्या असतां चूक येणार नाही, परंतु चूक आल्यास इच्छेस येईल तेव्हां ती चुक या पुढील सोप्या रितीनें नीट होईल; ती रीति ही, कीं खरे रूपाचा पद्धतीपासून जा रिती निघाल्या त्यांशिवाय दुसऱ्या रिती लावूं नको.

अशक्यरूप वजावाकीचे चिन्हाला, चुकीवांचून, बीजगणितांतल्या रिती लावितां येतील, या आश्चर्यकारक गोष्टीचें कारण पुरतेपणीं सांगितल्याचे पूर्वीं, या रिती त्या चिन्हास लावितां येतील, असें समजलें. यामुळें १३० व्या पृष्ठावर लिहिलेल्या तर्कासारखे पुष्कळ तर्क सर्वत्र खरे आहेत असें सर्वपक्षीं समजलें, आणि तें समजण्यासाठीं, नवी भाषा उत्पन्न केली, परंतु ती भाषा शब्दांचे सरळ अर्थानें पाहिली असतां खोटी दिसती.

परंतु शब्द हे कल्पित चिन्हे आहेत, आणि त्यांवर विचार पूर्वक कल्पना हवी तशी चालती, पण शब्दाचा एका अर्थापासून जो बोध होतो, तो बोध त्या शब्दाचे दुसरे अर्थाला न लावावा अशा रितीचा आपल्या मनांतील एकाद्या शब्दाचा जो अर्थ असेल तो उघड सर्वास माहीत असावा.

अंक गणितांत काहीं नवीन विषय वाढविले आहेत आणि पूर्वीं मनांत आलीं नव्हतीं अशीं नवीं चिन्हे कामांत घेतलीं आहेत. तीं चिन्हे कोणत्या रितीनें कामांत आणायीं हैं वर सांगितलें आहे, जा कृती कामांत येतील त्यांचें वर्णन करायासाठीं आतां शब्द कल्पून घेण्याचें मात्र राहिलें.

असे शब्द कल्पायाचा दोन रिती आहेत.

१. जी कृति संपूर्ण गणितरूप नाही, तिचा अर्थ दाखविण्याची इच्छा असेल, तेव्हां एकादा नवा शब्द कल्पावा. असें केलें तर ही विद्या कठीण शब्दांनीं युक्त होईल, आणि अज्ञानें, शेवटीं गणितांतील जुने शब्द जाऊन त्यांचा ठिकाणीं नवे शब्द येतील इतकें मात्र होईल;

कां कीं या अध्यायांत जा खोळ्या कल्पना विस्तारानें दाखविल्या आहेत, त्या मनांत घेऊन किंवा सोडून चालतों, हें कृतीचा शेवटा पावेतों कळणार नाहीं. यामुल्ले जुने शब्द टाकून नवे केलेले शब्द नेहेमी कामांत आणवे लागतील.

२. शब्दांचा अर्थ जो हालीं कामांत घेतात, त्याचा विस्तार केल्यानें त्या शब्दांचा अर्थ फिरकितां येईल; ह्मणजे त्यांचे जे अर्थ आहेत त्यांहून अधिक अर्थांचा बोध होईल. व्यवहारी बोलण्यांत यासारखी चाल आहे, आणि जेव्हां कांहीं एक विषय सांगण्यास एकाद्या शब्दाची गरज लागती. तेव्हां जा विषयास नांव देण्याचें आहे त्या सारिखा, अथवा त्याशीं संबंधाचा जो दुसरा विषय असेल, त्याचें नांव कामांत घ्यावें लागतें. जसें सांठवण, या शब्दाचा अर्थापासून कोठार, रांजण, कणगी, खोली, घर, वखार, इत्यादि पदार्थांचा बोध होतो. अशा तऱ्हेचीं नांवें सारिखेपणापासून मात्र दिलीं जातात, परंतु शब्दार्थांचे विस्तारानें वरचीं नांवें दिलीं नाहींत. आतां शब्दार्थांचे विस्तारानें जीं नांवें दिलीं असतात तीं विद्यांमध्ये शोधावीं. पशूंचा जातीविषयींचे विज्ञेय या गोष्टीचीं पुष्कळ उदाहरणें आहेत. त्यांतून एथें एक उदाहरण घेतों. सर्व पशूस प्रतवार लावायास पशूंचे अवयवांचे आणि दातांचे रचना सादृश्यावरून त्या त्या पशूंचा प्रती लावायास सोईवार पडतें. पशूंचा एकवे प्रतीमध्ये मांजर येते, आणि त्या प्रतीत जे जे सर्व पशू येतात, त्यांत मांजर हें सर्वांचे माहितीचें आहे. या प्रतीमध्ये मांजर सिंह बाघ बिबळाबाघ इत्यादि आहेत, या प्रतीस नवे शब्दानें नांव ठेवायाचें त्या बदल त्या प्रतीस मांजर प्रत ह्मणतात, आणि एक एकाचा वेगळेपणा दाखवायासाठीं मांजर या शब्दाशीं त्या प्रतींतल्या पशूंचा नांवाचा योग करितात. जसें, सिंहास मांजरसिंह ह्मणतात, बाघास मांजर बाघ ह्मणतात, बिबळ्याबाघास मांजर बिबळा बाघ ह्मणतात, इत्यादि मांजर या शब्दापासून केवळ व्यवहारिक अर्थ मनांत न येतां त्यापासून मांजराचा अथवा त्या सारिख्या दुसऱ्या पशूंचा बोध होऊं नये परंतु जा अवयव रचनेवरून त्या प्रतीची निवड केली त्या अवयव रचनायुक्त पशूंचा बोध व्हावा ह्मणून एथें काय केलें पहा. शब्दापासून जे अर्थ निघतात त्यांचा संकोच केल्यानें, त्या शब्दावरून जा पदार्थांचा बोध होतो त्या पदार्थांची संख्या अधिक

वाढती. आणि यावरून एक विद्वान दुसऱ्या विद्वानाशीं अशा रितीनें बोलत असतां, किंवा त्यास लिहीत असतां, त्यांची चूक होणार नाहीं; तथापि त्यांचा अर्थ न जाणणाऱ्या तिसऱ्या पुरुषाचे मनांत असें येईल, कीं मांजर मनुष्यास घेऊन पळेल आणि खाईल, असें हे दोघे मानितात.

त्याच सारिखे, बीजगणितामध्ये, असे शब्द येतात, जांचा अर्थ अंक गणितांत पक्का जाणलेला असतो, आणि बीजांत अशा कृती आहेत कीं जा अंक गणिताचे विषयाचे पलिकडे नेतात. परंतु, बीजांतील आणि अंकगणितांतील कृतीमध्ये, काहीं असा सारिखेपणा आहे, कीं जा कृती सारखेच रितीनें चालतात त्यांस एकत्र करून एक प्रतीमध्ये घालायास सोईस पडते; आणि, वर लिहिल्याप्रमाणें या प्रतीस नांव देतानां, अंकगणिताचे शब्दाचे व्याख्यानाचा संकोच केला पाहिजे असा कीं सर्व मिळून झालेल्या प्रतीस अंक गणितरूप नांव देतां येईल. माहितींतील अंकगणित कृतीविषयीं जेव्हां बोलायाचें असतें, तेव्हां त्या कृतीचे पूर्वी **अंकगणितरूप** हा शब्द जोडिला आहे. जसें, **अंकगणितरूप** मिळवणी झटलें असतां, हाच अर्थ होईल, कीं एक केवळ अंक दुसऱ्या केवळ अंकांत मिळवायाचा आहे. परंतु **बीजगणितरूप** मिळवणी अथवा जीस मिळवणी असें झटलें तिचा एक पक्ष मात्र अंक गणितरूप मिळवणी आहे असें दिसण्यांत येईल. सारांश, पहा, कीं, जेव्हां अंकगणितरूप असा शब्द पूर्वी जोडला नसेल, तेव्हां सर्व शब्दांस विस्तीर्ण अथवा सामान्य बीजरूप अर्थ आहे असें पुढें ध्यानांत ठेविलें पाहिजे.

आतां शब्दांतील अर्थाचा संकोच अथवा त्याचे अर्थाचे पक्षांचा विस्तार या दोहोंतून कसें झणावें. यांविषयीं विचार करितों.

१ **परिमाण** हा शब्द अंकगणितामध्ये कोणत्याही पूर्ण किंवा अपूर्णाकास लागतो. बीजगणितामध्ये, गणनेचा रितीपासून जें उत्तर निघतें त्या उत्तराचें चिन्ह\* परिमाण मात्र आहे. या गोष्टीचा पहिला अनुभव या पुढील प्रतिज्ञेमध्ये आहे.

\* जें काहीं पदार्थांचे प्रतिमेसारिखें दृष्टीपुढें ठेविलें असतें, तें त्या पदार्थांचें चिन्ह आहे. **परिमाण** हा शब्द त्याचा मूळ अर्थानें अंकगणितांतहि येत नाहीं. २ हा अंक परिमाण नाहीं. (तो लिहिण्यास जी शई लागली तिचें परिमाण मनांत आणल्यावांचून) परंतु केवळ

जेथपर्यंत आपण आलों त्यांत परिमाणें धन आणि ऋण अशीं दोन प्रकारचीं अढळलीं. अंकगणितरूप परिमाणें सगळीं धनच असतात.

अंकगणिताविषयीं ही गोष्ट मनांत आणिली पाहिजे, कीं+६ हे ६ या चिन्हापेक्षां अधिक आहेत; ६ उत्तर येण्यास एक विशेष तऱ्हेचें चिन्ह आहे, ह्मणजे, ०+६, अथवा शून्यास साहा मिळाल्यानं ६ उत्तर येतें. परंतु दाखविलेल्या कृतीवरून ३+३ हे +६ यांशीं एकरूप नाहीं, परंतु निघालेल्या उत्तरांत ते एकरूप आहेत; अशाप्रमाणें (अ+क्ष)(अ-क्ष) आणि अअ-क्षक्ष, यांची एकसारखीच कृति नाहीं, तथापि त्यांपासून सर्वदां एकसारखेंच उत्तर होतें.

धन आणि ऋण परिमाणें निखालस उलट्ये अर्थाचीं आहेत; जर + अ हा अ रूपयांची प्राप्ती असेल तर अ तितक्यांचा तोटा असावा; जर + अ हा अ रूपयांचा तोटा असेल, तर - अ तितक्यांची प्राप्ती असावी; जर + अ उत्तरेकडे कांहीं मोजलेली लांबी असेल, तर - अ तितकीच लांबी दक्षिणेकडे मोजलेली असावी; आणि याप्रमाणें पुढेंहि.

दुसऱ्या रूपानें या भेदाचा विचार सविस्तर दाखविला आहे. प्राप्ती झाली अशी कल्पना केली आणि अशा कल्पनेचे खरे समीकरणापासून असें उत्तर निघतें, कीं अ प्राप्ती झाली, तेव्हां पहिली कल्पना खरी होती; परंतु जर उत्तर-अ निघेल, तर पहिली कल्पना खोटी होती, आणि अ रुपये तोट्याची कल्पना करायास योग्य होती. चुकी नीट करण्याचे जागीं चुकीचें चिन्ह राखिलें इतकाच एथें विस्तार केला. याविषयीं हेंच लक्षांत आणिलें पाहिजे, कीं विस्तार केल्यानं घालमेल होत नाहीं, कां कीं खोटी कल्पना खरी करण्याची एकच रीति आहे. जर-अ हा एकापेक्षां अधिक चुक्या दाखवील, आणि कृत्यांत दुसरी चूक नीट करण्याचें अगत्य पडेल, तेव्हां पहिली चूक नीट करितानां -अ असें मांडणें खोटें आहे.

चिन्ह आहे, जेणेकरून असें दाखविलें जातें, कीं भलतें कांहीं परिमाण १ याणें दर्शविलेलें तें दोन वेळ्येपेत्तलें. जसें, ३-५ हें खरे रूपाचें चिन्ह आहे, परंतु गणितरूप परिमाणाचें चिन्ह नाहीं, कां कीं, ३, -, आणि ५, यांचे गणितरूपाचा अर्थ उलटा करून कांहीं कृति करायास सांगतें.

भूमितीला बीजगणित लागू केल्यानें, अशे तऱ्हेचा विस्तार करणें त्वरेनें कळेल.

क अ क व

एका सरळ रेषेवर अ बिंदू असेल आणि त्याचे दोहोंकडे ती रेष मोहो-  
गम लांबीची असेल; अब अचे उजव्येकडे मोज, आणि ब पासून बक  
बचे डाव्येकडे मोज. जर बक पेक्षां अब मोठी असेल, तर कचे स्था-  
नाचें योग्य वर्णन हेंच आहे, कीं तो अब-बक अचे उजव्येकडे एवढा  
लांब आहे. परंतु जर अब पेक्षां बक मोठी असेल, आणि क विषयीं  
वरचा गोष्टी सारिखें बोलायाचें आहे, तेव्हां अशक्यरूप वजाबाकीव-  
रून कांहीं चुक आहे असें समजतें, आणि त्वरेनें पहाण्यांत येतें, कीं  
कचे जाग्याचें योग्य लक्षण हेंच आहे, कीं अचे डाव्येकडे बक-अब  
एवढा लांब आहे.

लाक्षणीक अर्थानें जे शब्दार्थांचे विस्तार, ते बोलण्यांत आणि लि-  
हिण्यांत फारच येतात, इतके कीं जा कृतींचा वर शोध झाला आहे,  
त्यांचा खरेपणा स्थापण्याविषयींहि ते घेतले आहेत. प्राप्ती मि-  
ळविणें या वाक्यांत खरे रितीनें अर्थाची द्विरुक्ती आहे, आणि प्राप्ती  
गमाविणें यांत विरुद्ध अर्थ आहे, या वाक्यांतील गमाविणें हा  
शब्द साधारण बोलण्यांत न मिळविणें या अर्थानें योजितात.  
परंतु तोटा मिळविणें या शब्दांत अर्थाचा उघड सरळपणा आहे; जाचे  
मनांत नफा होईल असें होतें त्यास तोटा झाला असतां, त्या पुरुषावर  
कपट स्तुतीनें हे शब्द लावितात. उजेड आला याचे जागीं अंध-  
कार गेला असें जेव्हां ह्मणतों, तेव्हां आपल्ये मनांत जी गोष्ट होती  
तिचा बोधक जो शब्द, त्या सारिख्ये अर्थाचा दुसरा शब्द घेतल्यामुळें  
ही चुक झाली.

एक पदार्थ दुसरे पदार्थाशीं मिळविण्यानें कांहीं एक दृष्टिविषय  
होतो, असें आपण पदार्थ ज्ञानास गणित लावतेसमयीं चुकीनें मनांत  
आणितों, परंतु खरें झटलें असतां पदार्थापासून पदार्थ काढल्यानें तो दृष्टि-  
विषय होतो, आणि याचें उलटेंहि. असें पुष्कळ ठिकाणीं आढळतें.

सांतील दोन उदाहरणे जीं बहुतकरून लक्षांत ठेवण्यास योग्य तीं सांगतो.

१. रुक्ष हवा असते त्यासमयीं चामड्यावर कांच घर्षण केली असतां, त्या दोन पदार्थांचे आंगीं बारीक बारीक पदार्थ आकर्षून घेण्याची शक्ति येती, या शक्तीला विद्युल्लतेचें आकर्षण, अथवा विद्युत् हणतात. पूर्वी असे समजत असत, कीं घर्षणानें चामड्यापासून कांचें कांहीं प्रवाही पदार्थ शिरतो, असा कीं पहिल्यापक्षां कांचेंत त्या पदार्थांचा कांहीं अधिक अंश होतो, आणि चामड्यांत कांहीं उणा होतो. यामुळे, कांचेला धन विद्युत् संबंध, आणि चामड्याला ऋण विद्युत् संबंध प्राप्त होतो असें हणत; आणि हा ऋण विद्युत्संबंध, त्यांतून कांहीं कमी केल्यानें घडला असें मानीत असत. परंतु काळांतरींचा अनुभवावरून असें दिसलें, कीं त्या दोन पदार्थांचे घर्षणानें कांहीं एक मिश्रप्रवाही अथवा अप्रवाही पदार्थ अथवा दुसऱ्या कांहीं नावाचा पदार्थ त्यापासून दोन निराळे अवयव उत्पन्न होतात आणि ते अवयव त्यांचे मुळचे प्रमाणानें संयुक्त झाले असतां, ते कोणासहि आकर्षित नाहीं, असा गुण त्यांचे आंगीं असतो, परंतु एक दुसऱ्यापासून वियुक्त झाला हणजे, तो वियोग आकर्षणावरून दिसतो. तर या दोन अवयवांतून एकाला कांचेची विद्युत्, आणि दुसऱ्यास राळेची विद्युत्, असें नांव दिलें आहे. शोधल्यानें असें कळलें कीं घर्षणानें पहिली धनविद्युत् कांचेंत येती, आणि दुसरी ऋण विद्युत् राळेंत येती. तथापि बहुत लोकांनीं पूर्वींचीं धन आणि ऋण विद्युत् हीं जुनीं नांवें राखिलीं आहेत; आणि तेणेंकरून कांहीं अडचण पडली नाही, कां कीं जास विद्युल्लतेचा गणितरूप, दृश्यविषय हणतात, तो दोन्हीं कल्पनांमध्ये एकसारखाच असतो; कार्याचें कारण नाहीसें करणें अथवा जें कार्याचा नाश करितें त्याचा पुष्कळ अंश मिळविणें या दोन्हीं कल्पना पासून फळ सारिखेंच आहे.

२. एकाद्या बंद केलेल्या पात्रांमध्ये दिवा जळता ठेविला असतां, असें दिसलें कीं जळण्याचा व्यापार चालवायास पात्रांतील हवा त्वरेनें असमर्थ होती, आणि अज्ञानें त्यांत उत्पन्न झालेली हवा, श्वासोश्वासा विषयीं अयोग्य होती. यावरून स्पष्ट समजलें कीं हवेमध्ये कांहीं फेर झाला; आणि अशी कल्पना केली कीं जोतीपासून कांहीं प्रवाही पदार्थ निघून हवेशीं मिळाला. या प्रवाही पदार्थाला झोजिस्टन हणजे



जोत करणारा असें नाव दिलें. यामुळें अशी कल्पना धरली कीं जळण्यानें फ्लोजिस्टन हवेशीं मिळाला परंतु नंतर असा शोध लागला कीं जेव्हां कांहीं पदार्थ जळतो, तेव्हां वस्तुतः कांहीं पदार्थ हवेंतून घेतला जातो, आणि त्या पदार्थास आक्सिजन ह्मणतात. दुसऱ्या युक्तीनें असें जाणलें कीं, आक्सिजन हवेचे मिश्राचा एक भाग आहे. यावरून आक्सिजनाचें काढणें हा जळण्याचा परिणाम आहे. जर फ्लोजिस्टनाचे कल्पने वरून रसायण विद्येची कांहीं गणना नीट करायाची असेल, तर या अध्यायांत जी रीति सांगितली, तिजवरून, या पुढील कल्पनेनें होईल, कीं+अ फ्लोजिस्टन हें-अ आक्सिजन आहे.

२. मिळवणी, आणि वजाबाकी. पदांचीं चिन्हे आहेत तशींच राखून दोन पद्धती एकत्र करणें हा पहिल्या शब्दाचा अर्थ आहे; दोन पद्धती असतील त्यांतून जी वजा करायाची आहे, तिचीं चिन्हे बदल करून त्या दोन पद्धती एकत्र करणें, हा दुसरे शब्दाचा अर्थ आहे. गणितानुरूप मिळवणी आणि वजाबाकी हे दोन विषय या शब्दांचे विशेष पक्ष आहेत, असें या पुढील उदाहरणापासून कळेल,

$$३+(५-२) \text{ अथवा } ३+(०+५-२)=३+५-२$$

$$८-(५-२) \text{ अथवा } ८-(०+५-२)=८-५+२$$

परंतु, या पुढील प्रमाणेंच मिळवणी आणि वजाबाकीमध्ये येतें

$$-३+(-५) \text{ हे } -३-५ \text{ अथवा } -८$$

$$-३-(-५) \text{ हे } -३+५ \text{ अथवा } +२$$

३. बरोबर. दोन बीजगणितानुरूप पद्धतींतून, जर एक दुसरीचे जागीं चुकी बांधून मांडितां येईल, तर त्या बरोबर आहेत असें ह्मणतात, आणि त्या दोहोंचे मध्ये = हें चिन्ह मांडितात, वर सांगितल्या प्रमाणें, यांत गणितानुरूप बरोबरी आहे; कां तर  $५+३$  हे गणितानुरूपानें  $८$  यांचे बरोबर आहेत, तर  $८$  चे जागीं ते मांडितां येतील. परंतु हा शब्द बीजगणितानुरूप अर्थानें यांसहि लागतो ह्मणजे,  $३-७$  आणि

१०-१४. ११८ पृष्ठ पहा, अ+ (-ब) आणि अ-ब, यांसहि तो शब्द लागतो, आणि याप्रमाणें पुढेंहि; आणि यानंतर बरोबर हा शब्द अधिक विस्ताराचे पक्षाला लावितां येईल. एकाचे खोखे कल्पनेपासून या पुढीलप्रमाणें होईल.

१-१+१-१+१-१+ इत्यादि अनंत पावेतों.

यांचें खरें उत्तर  $\frac{1}{2}$  आहे. हें तरी याप्रमाणें मांडितात

$\frac{1}{2} = १-१+१-१+१-१+$  इत्यादि अनंत पावेतों.

४. अधिक आणि कमी; वाढ आणि घट, जसा मिळवणी आणि वजाबाकी या शब्दाला विस्ताररूप अर्थ पाहिजे तसा यांसहि पाहिजे. गणिताचीं चिन्हे हीं आहेत,

० १ २ ३ ४ ५, इत्यादि.

आणि यांशिवाय त्यांचे मधले अपूर्णांक हेहि आहेत; आणि भलत्ये दोहीतून जो अधिक आहे तो दुसऱ्याचे उजव्येकडे येतो. बीजगणिताचीं अंकचिन्हे हींच आहेत,

.....४ -३ -२ -१ | ० +१ +२ +३ +४ इत्यादि.

खणून वरचे बीजगणितरूप चिन्हास +१ बीजगणितरूपाचे रितीप्रमाणें मिळविला असतां, त्याचीं पदे गणितरूपाप्रमाणें पुढें चालतात. कां कीं

$$-४+१ = -३$$

$$-३+१ = -२$$

$$-२+१ = -१$$

$$-१+१ = ०$$

$$०+१ = +१$$

$$+१+१ = +२$$

अधिक आणि कमी यांचे व्याख्यान वरचा ओळीचा दोहों बाजूस बरोबर असू दे ; ह्मणजे दोन परिमाणांतील, जें परिमाण उजव्याकडे येतें तें अधिक आहे. जसे, -१ हा -२ पेक्षा अधिक असें ह्मणतात, +२ हे -१ पेक्षा अधिक, आणि याप्रमाणें पुढेंहि.

यावरून, शब्दांचे विस्तृत अर्थानें, ही पुढील\* प्रतिज्ञा निघती ;

सगळीं धन परिमाणें शून्यापेक्षां अधिक आहेत ; सगळीं ऋण परिमाणें शून्यापेक्षां कमी आहेत. दोन धन परिमाणांतील, जें गणितरूपानें अधिक आहे, तें त्या दोहोंत अधिक आहे ; दोन ऋण परिमाणांतील जें गणितरूपानें कमी आहे तें त्या दोहोंत अधिक आहे.

वाढ आणि घट हे विस्तृत अर्थाचे शब्द अधिक आणि कमी या शब्दांचे जागीं चालतील. जेव्हां एकादें परिमाण अधिक करितात तेव्हां तें वाढतें, आणि जेव्हां तें कमी करितात तेव्हां तें घटतें. परंतु लहान हा शब्द, विस्तारावांचून त्याचा गणितानुरूप अर्थानें नेहेमी ठेविला आहे.

पहा. वाढ आणि मिळवणी इत्यादि यांचा भेद खालीं दाखविला आहे,

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{धन} \\ \text{ऋण} \end{array} \right\} \text{परिमाण मिळवल्यानें} \left\{ \begin{array}{c} \text{वाढ} \\ \text{घट} \end{array} \right\} \text{होती}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{धन} \\ \text{ऋण} \end{array} \right\} \text{परिमाण वजा केल्यानें} \left\{ \begin{array}{c} \text{घट} \\ \text{वाढ} \end{array} \right\} \text{होती}$$

\* या प्रतिज्ञेवरून नवे शिक्षणारे फार वचकतात, अंकगणितानुरूप परिमाण सांगितल्याशिवाय, अधिक आणि कमी यांचा काहींच अंकगणितानुरूप अर्थ नाही, ही गोष्ट पूर्वी शिक्षणाराचे मनांत आणिली नाही, हें त्यांचे वचकण्याचें कारण आहे.

ह्या पुढील प्रतिज्ञाहि खऱ्या आहेत ?

मिळविण्याचें परिमाण जितकें अधिक असतें, तितकें उत्तर अधिक होतें.

उदाहरण.

—७ हे —१० यांपेक्षां अधिक आहेत

$३+(-७)$  हे  $३+(-१०)$  यांपेक्षां अधिक आहेत

पहाण्यांत येतें, कां कीं —४ हे —७ यांपेक्षां अधिक आहेत.

यासारिखेंच वजा करण्याचें परिमाण जितकें कमी आहे, तितकें त्याचें उत्तर अधिक आहे. ३ यांतून —८ वजा कर, उत्तर +११ आहे; —८ यापेक्षां कांहीं कमी वजा कर, म्हणजे —१२, तर उत्तर +१५ आहे, हें +११ पेक्षां अधिक आहे. —४ यांतून ७ वजा कर, उत्तर —११ आहे; ७ यांपेक्षां कांहीं कमी वजा कर, तर —३ घे, यावरून उत्तर —४— (—३) अथवा —१, आहे हा —११ पेक्षां अधिक आहे. आणि असें समजांत येईल, कीं मिळवणी अथवा वजाबाकीविषयीं जीं सर्व कृत्ये गणितरूप परिमाणाविषयीं खरीं आहेत, तीं बीजगणितरूप परिमाणाविषयींहि खरीं होतील; हें आपल्ये नव्ये व्याख्यानाचें विशेष फल आहे. याविषयीं या पुढील गोष्टीवर नजर ठेव;

ब पेक्षां जर अ अधिक असेल, तर अ—ब धन आहे; जर ब पेक्षां अ कमी असेल, तर अ—ब ऋण आहे. जसें

$$-३-(-४)=+१ \quad -३-(-२)=-१$$

अधिक आणि कमी यांचीं चिन्हे  $>$  आणि  $<$  हीं आहेत. जसें, जेव्हां ब पेक्षां अ अधिक आहे, तेव्हां  $अ > ब$ , याप्रमाणें मांड. जेव्हां ब पेक्षां अ कमी आहे, तेव्हां  $अ < ब$ , असें मांड.

कोनाचें तोंड मोळ्ये परिमाणाकडे असतें. बरोबरीचें चिन्ह, = या-  
मध्ये कोणत्याहि परिमाणाकडे कांहीं कोन नसतो.

५. गुणाकार आणि भागाकार. अंकगणित परिमाणाविषयीं,  
बीजगणिताचा गुणाकार आणि भागाकार यांचा रीती अंकगणितांतल्ये  
रीतिसारिख्याच आहेत. पूर्वी पाहिल्याप्रमाणें, चिन्हांविषयीं, ही रीति  
आहे, एक जातीचे चिन्हांपासून + होतें, भिन्न जातीचे चिन्हांपासून  
- होतें.

+अ×+ब आणि -अ×-ब हे दोन्ही +अब आहेत

-अ×+ब आणि +अ×-ब हे दोन्ही -अब आहेत

$\frac{+अ}{+ब}$  आणि  $\frac{-अ}{-ब}$  हे दोन्ही  $+$   $\frac{अ}{ब}$  आहेत

$\frac{-अ}{+ब}$  आणि  $\frac{+अ}{-ब}$  हे दोन्ही  $-$   $\frac{अ}{ब}$  आहेत

जसे अंकगणितामध्ये गुणाकारांस अधिक आणि कमी हे शब्द ला-  
विले जातात तसे बीजांत सर्वदा लावतां येत नाहीं. ह्मणजे,  $३ > २$ ,  
 $५ > ४$ , यामुळे  $३ \times ५ > २ \times ४$ ; परंतु  $३ > -२$ ,  $-३ > -४$ , हे  
 $३ \times -३ > -२ \times -४$  अथवा  $-९ > ८$  याप्रमाणें आहेत असें मानितां  
येत नाहीं, परंतु याचे उलटें होतें  $-९ < ८$  असें आहे. परंतु गुण्य-  
गुणकापासून गुणाकाराचें बीजगणितरूप प्रमाण काढण्याची क्वचित  
गरज पडेल; ह्मणून निरनिराळे पक्ष एकत्र करणें हें शिकणारानें पा-  
हिजे असल्यास करावें.

६. प्रमाण. जेव्हां पहिलें परिमाण दुसऱ्यानें भागिलें, आणि ति-  
सरें परिमाण चवथ्यानें भागिलें असतां, जर ते दोन भागाकार बरोबर  
असतील, तेव्हां तीं चार पदे परस्पर प्रमाणांत आहेत, असें ह्मणतात.  
अंकगणितामध्ये प्रमाणाचें जें पूर्वी व्याख्यान केले तें आणि हें व्याख्यान  
शब्दांविषयीं एकच आहे, परंतु परिमाण, भागिलें, आणि बरोबर, या  
तीन शब्दांचा अर्थ या ठिकाणीं विस्तीर्ण आहे. अंकगणितांमध्ये जसें  
अधिक आणि कमी हे शब्द लावितात, तसें बीजांत सर्वदा लावतां येत  
नाहीं. जसें.  $\frac{३}{४}$  आणि  $\frac{३}{८}$  यापासून हें प्रमाण होतें,  $३:-४:-६:८$ ;  
यांत -४ पेक्षां ३ अधिक आहेत, परंतु ८ पेक्षां -६ कमी आहेत.

आतां कृशाला वरचीं व्याख्यानै लाऊन ११७ व्या पृष्ठावरील उदाहरण घेतों, कां कीं जेव्हां केवळ एकवर्ण समीकरणानें काम करा-याचें असेल तेव्हां तीं दोन निरनिराळीं केल्ये आहेत.

अ जवळ ६० रुपये आहेत, आणि बचे खातेवहीमध्ये जी शिलक-बाकी, धन किंवा ऋण राहिल, ती अ यास मिळावयाची आहे; परंतु क, जाजवळ २०० रुपये आहेत, त्याणें बची मालमत्ता घेऊन त्याचें कर्ज फेडावें. असें केल्यानंतर दिसण्यांत येतें, कीं अचे मालमत्तेपक्षां कची मालमत्ता तिप्पट आहे. तर बची शिलकबाकी घेणें अथवा देणें किती आहे ?

शिलकबाकी दाखविण्यासाठीं क्ष घे, ही बचें घेणें किंवा देणें असेल त्याप्रमाणें धन किंवा ऋण होईल; तर अ जवळ  $६० \pm क्ष$ , यांत जेव्हां क्ष धन आहे, तेव्हां धन चिन्ह कामांत घ्यावें,\* जेव्हां क्ष ऋण आहे, तेव्हां ऋण चिन्ह घ्यावें. परंतु कचे जवळ  $२०० + क्ष$  आहे; यामुळे,

$$३(६० + क्ष) = २०० + क्ष$$

अथवा

$$\pm ३क्ष = २० + क्ष$$

यांत दोन समीकरणे आहेत, एक धन चिन्हाचें, आणि एक ऋण चिन्हाचें. परंतु यावरून हेंच निघतें, कीं

$$\pm ३क्ष \times \pm ३क्ष = (२० + क्ष)(२० + क्ष)$$

या समीकरणाची पहिली बाजू दोन्हीं पक्षांनीं  $+ ९क्ष$  आहे, कां कीं  $-३क्ष \times -३क्ष$  आणि  $+३क्ष \times +३क्ष$ , बरोबरच आहेत; ह्मणजे,  $+९क्ष$ . यामुळे

$$+९क्ष = ४०० + ४०क्ष + क्ष$$

अथवा

$$८क्ष - ४०क्ष - ४०० = ०$$

( $\div$ ) ८

$$क्ष - ५क्ष - ५० = ०$$

\* वरचा दोन्ही कल्पनांतून कोणतीहि घेतली तरी अची मालमत्ता वाढत्ये; यावरून, जर शिलकबाकी  $+३$  असेल, तर त्याचेजवळ  $६० + (+३)$  होईल; परंतु जर शिलकबाकी  $-३$  असेल तर त्याचेजवळ  $६० - (-३)$  होईल.

दोनवर्ण समीकरणें उलगडलेसमयीं, असें पहाण्यांत येईल, कीं हें समीकरण क्षचे केवळ दोन किमतीविषयीं मात्र खरें होऊं शकतें; क्ष=१०, अथवा क्ष=-५ असें असलें पाहिजे. ह्मणजे, वला १० रुपये घेणें आहेत, अथवा ५ रुपये देणें आहेत; असेंच उत्तर ११७ व्या पृष्ठावरहि आलें आहे.

+१० अथवा -५ यांतून कोणतेंहि घेतलें, तर त्याणें वरचें समीकरण स्थापिलें जातें, हें पुढें दाखविलें आहे:

क्ष = १०	क्ष = -५
क्षक्ष = १००	क्षक्ष = २५
-५क्ष = -५०	-५क्ष = +२५
-५० = -५०	-५० = -५०
क्षक्ष-५क्ष-५० = ०	क्षक्ष-५क्ष-५० = ०

जा अर्थी बीजगणिताचा विस्तार असा केला कीं अंकगणितरूप परिमाणें असतांना जा रिती यांस लागतात त्याच रिती बीजगणितरूप परिमाणें जेव्हां अंकगणितरूपाचीं नसतात तेव्हां त्यांजवरहि लागव्या. तर यावरून निघतें, कीं कृत्याचा गणितानुरूप पक्ष सूचनार्थ घेतां येईल; कां कीं, कांहीं कृति अंकगणित रीतिप्रमाणें चालतात असें ह्मणणें, अथवा कृति गणितरूप आहे असें जाणून त्याप्रमाणें चालविणें, हीं दोन्ही शब्दभेदावांचून सारिखींच आहेत.

१३२ व्या पृष्ठापावेतो बीजगणितांतील चिन्हे, जीं अंकगणितरूपाचीं नाहींत, त्यांस खोऱ्ये कल्पनेचीं उत्तरें आहेत असें मानिलें, आणि यांशीं काम चालविण्याचा जा रिती, यांस नोट करण्याचा रिती असें झटलें आहे. १३६ इत्यादि पृष्ठांत व्याख्यान सरळ सांगीतल्या वरून, हीं चिन्हे येतील असें असून तीं आल्यानंतर यांची ओळख पडत्ये, ह्मणून विरुद्ध अथवा खोटा हा शब्द यांस लागू होत नाहीं, याविषयीं विचार करण्याची जी पहिली रीति आहे ती शिकणारांनै सोडून देऊं नये, परंतु १२२, १२३ आदि पृष्ठांवरचे रितीप्रमाणें काम

करत्येसमयीं शिकणारानें निरंतर मनांत ठेवावें, कीं पूर्वीचे कृतीचा या रितीशीं जो संबंध आहे त्याची पक्की माहित आहे ; यापुढें दोनहि रिती कामांत घेतल्या जातील, परंतु मनांत ही गोष्ट धरली पाहिजे, कीं पहिली रिती कामांत घेतली असतां, दुसऱ्या कृतीसाठीं जो विस्तार पाहिजे, तो क्षणमात्र सोडावा.

अभ्यासासाठीं हीं पुढील उदाहरणें सांगतो. अ आणि - अ अशे तऱ्हेचीं चिन्हे भेद न ठेवितां कामांत घेतलीं आहेत, परंतु स्मरण ठेविलें पाहिजे कीं कृति करितानां तीं एकच अर्थाचीं आहेत, परंतु विचार करितानां तीं चिन्हे दोन निरनिराळ्या रितींवर लागतात.

$$८ \times ४ \div ३ = १०\frac{२}{३}$$

$$८ \times ४ \div ३ = -१०\frac{२}{३} \text{ अथवा } १०\frac{२}{३}$$

$$६ + ४ - १२ = २$$

$$(-६) + (-४) + (-१२) = -२२$$

$$\frac{\text{अव} + \text{कड}}{\text{म}} = \frac{\text{कड} - \text{अव}}{\text{म}}$$

$$\frac{(-\text{अ}) \times (-\text{व}) \times \text{क}}{-\text{ड}} = -\frac{\text{अवक}}{\text{ड}}$$

$$\frac{\text{अ} - \text{व}}{\text{अ} + \text{व}} \times \frac{\text{क}}{\text{क}} = \frac{\text{अ} + \text{व}}{\text{व} - \text{अ}} \text{ क}$$

$$\frac{-\text{अ} - (-\text{व})}{\text{अ} + (-\text{व})} = -१$$

$$\text{अव} - \text{वअ} = ०$$

$$\text{अ}(-\text{व}) + \text{व}(-\text{अ}) = -२\text{अव}$$

$$\text{अवक} = \text{अवक} = \text{अवक} = \text{अवक} = -\text{अवक}$$



## तिसरा अध्याय.

एकापेक्षां अधिक अव्यक्त परिमाणें आहेत, अशा

एकवर्ण समीकरणांविषयीं.

या पुढीलप्रमाणें एक समीकरण आहे,

$$क्ष + य = १२$$

जा कृष्यांत क्ष आणि य अशीं दोन अव्यक्त परिमाणें असतात, त्यापासून वरचें समीकरण झालें आहे, अशी कल्पना कर. हें पुढील कृत्य त्यासारखें आहे;

१	१	१
अ	क	ब

कृत्य. एका सरळ रेषेत अ बिंदू दिला आहे, आणि त्याच रेषेत ब आणि क असे दुसरे दोन बिंदू आहेत. अ पासून ब आणि क यांचा मध्यापावेतों ६ फुटी आहेत. तेव्हां ब आणि क हे अ पासून किती लांब आहेत ?

ब आणि क हे दोन्ही अचे एक्याच बाजूकडे आहेत, हा मुख्य पक्ष आहे असें मान. अब = क्षफुटी, अक = यफुटी असें घे; तर बक = क्ष-य, आणि ब पासून ब आणि क यांचे मध्यापावेतों  $\frac{१}{२}$  (क्ष-य) आहे; यामुळे अ पासून त्या मध्यबिंदू पावेतों लांबी याप्रमाणें आहे,

$$क्ष - \frac{१}{२}(क्ष-य) \text{ हे संकेताप्रमाणें } = ६$$

(x) २

$$२क्ष - (क्ष-य) = १२ \text{ अथवा } क्ष + य = १२$$

यास अनियत कृत्य ह्यणतात, ह्यणजे, त्याचें अनंत तऱ्हेनें उलगडणें होतें. क्ष आणि य यांविषयीं इतका मात्र संकेत सांगितला कीं त्यांची बेरीज १२ असावी, ह्यणून हा संकेत अनंत तऱ्हांनीं स्थापिला जातो; कां कीं हे सगळे पुढील पक्ष हें उदाहरण उलगडण्याचे आहेत, आणि इच्छेप्रमाणें दुसरेहि नवे करितां येतील.

$$\text{क्ष} = १ \quad \text{य} = ११$$

$$\text{क्ष} = २ \quad \text{य} = १०$$

$$\text{क्ष} = ३ \quad \text{य} = ९$$

$$\text{क्ष} = \frac{१}{२} \quad \text{य} = ११\frac{१}{२}$$

$$\text{क्ष} = २\frac{१}{४} \quad \text{य} = ९\frac{३}{४}$$

$$\text{क्ष} = ३\frac{३}{४} \quad \text{य} = ८\frac{३}{४}$$

इत्यादि.

इत्यादि.

पुनः जेव्हां क्ष आणि य यांतून एक ऋण असेल, तर या पुढील-प्रमाणें उलगडणें होईल.

$$\text{क्ष} = -१ \quad \text{य} = + १३ \quad \text{क्ष} = १५ \quad \text{य} = - ३$$

$$\text{क्ष} = -२ \quad \text{य} = + १४ \quad \text{क्ष} = १६ \quad \text{य} = - ४$$

$$\text{क्ष} = -१\frac{१}{२} \quad \text{य} = + १३\frac{१}{२} \quad \text{क्ष} = १२\frac{३}{४} \quad \text{य} = - ३\frac{३}{४}$$

इत्यादि.

इत्यादि.

जेव्हां ब मात्र अचे डाव्ये बाजूस आहे तेव्हां वरचे डाव्ये बाजूचीं उदाहरणें, ६८ पासून ७९ पृष्ठांपर्यंत जा गोष्टी सांगितल्या आहेत त्यांशीं मिळती आहेत; आणि जेव्हां क मात्र अचे डाव्येकडे आहे, तेव्हां उजव्ये बाजूचीं उदाहरणें त्यांशीं मिळती आहेत. जसें, जर ब १ फुट अचे डाव्येकडे आणि क १३ फुटी उजव्येकडे असेल, तर क आणि ब यांचा मध्यबिंदू अपासून ६ फुटी उजव्येकडे आहे. पहा कीं जर मध्यबिंदू अचे डाव्येकडे येतो, असे पक्ष क्ष+य=१२ या एकवर्ण समीकरणांत येऊं शकत नाहीं; कां कीं कृयांतील दिलेला ६ हा अंक, अंकगणितरूप अथवा धन बीजरूप आहे असें जाणून, त्यांशीं सर्व कृती झाल्या, ह्यणून जा पक्षांत ६ यांणी दाखविलेली रेष अशे तऱ्हेनें

मोजली असती, कीं तिचें चिन्ह ऋण असतें, असे पक्ष त्या ६ पासून झालेल्या समीकरणांत आणवत नाहींत.\*

वरचे आणि त्यासारखेच पक्षांपासून हीं पुढील मूळ कारणें काढिलीं आहेत.

१. जा एका समीकरणांत दोन अव्यक्त पदें आहेत, तें समीकरण उलगडण्याचा अनंत तऱ्हा आहेत; ह्मणोन त्या दोन अव्यक्त परिमाणांतून एकाची किंमत इच्छेप्रमाणें घेऊन, दुसऱ्याला योग्य किंमत दिली असतां, समीकरण स्थापिलें जाईल.

२. जा कृत्यापासून असे तऱ्हेचें समीकरण होतें तें कृत्य अनियत आहे, अथवा त्याचा उलगडण्याचा अनंत तऱ्हा आहेत.

आतां दोन समीकरणें मनांत घे, अशीं कीं प्रत्येकामध्यें सारखींच दोन अव्यक्त परिमाणें येतील. उदाहरण,

$$क्ष + य = १२$$

$$३क्ष - २य = ३१$$

या दोहोंतून एक एक निरनिराळें घेतलें असतां, प्रत्येकाचें उलगडणें करण्याचा अनंत तऱ्हा आहेत. असें पुढील प्रमाणें.

पहिल्या समीकरणाचीं

दुसऱ्या समीकरणाचीं

उलगडणीं

उलगडणीं

$$क्ष = १० \quad य = २$$

$$क्ष = १० \quad य = -\frac{१}{२}$$

$$क्ष = १०\frac{१}{२} \quad य = १\frac{१}{२}$$

$$क्ष = १०\frac{१}{२} \quad य = \frac{१}{४}$$

$$क्ष = ११ \quad य = १$$

$$क्ष = ११ \quad य = १$$

$$क्ष = ११\frac{१}{४} \quad य = \frac{३}{४}$$

$$क्ष = ११\frac{१}{४} \quad य = \frac{११}{४}$$

इत्यादि.

इत्यादि.

\* कृत्य पुनः वाचून, विचार केला असता, हें पहाण्यांत येतें, कीं ६ फुटी अचे उजव्येकडे किंवा डाव्येकडे हें सांगितलें नाहीं, अथवा असें असेल, कीं ११७ पृष्ठावर सांगितल्याप्रमाणें त्यांत

वरचा दोहों ओळींचे समीकरणांमध्ये क्षचा किमती एकसारख्याच घेतल्या आहेत; आणि असें कळतें, कीं बहुतकरून, य चा किमती निरनिराळ्या आहेत, परंतु एक विशेष पक्षांत यचा किमती एकसारख्याच आहेत; झणजे,  $\text{क्ष}=११$ , आणि  $\text{य}=१$  अशा किमती सांपडतात, त्या किमतींनी दोन्ही समीकरणे स्थापिलीं जातात. तर आतां हाच विचार केला पाहिजे, कीं पहिलें अथवा दुसरें समीकरण स्थापणाऱ्या अनंत किमतीतून, तीं दोन्ही समीकरणे स्थापणाऱ्या अशा किमती किती आहेत? तर अशी किंमत एकच आहे, असें या पुढील कृतीवरून कळेल.

जर  $\text{क्ष}+\text{य}=१२$ , तर  $\text{क्ष}=१२-\text{य}$ . क्षचीही किंमत दुसऱ्या समीकरणांत मांड, असें करायास शक्य, कां कीं दुसऱ्या समीकरणाचीं जीं उलगडणीं सांपडायाची इच्छा आहे तीं आणि पहिल्या समीकरणाचीं उलगडणीं एकच आहेत, आणि अशानें निघतें कीं  $३(१२-\text{य})-२\text{य}=३१$ , अथवा  $३६-५\text{य}=३१$ , अथवा  $\text{य}=१$ . यावरून दिसतें, कीं जर  $\text{क्ष}+\text{य}=१२$  असें आहे, तर  $\text{य}=१$  आणि  $\text{क्ष}=११$  असें असल्या शिवाय, हीं दोन समीकरणे खरी आहेत असें त्यांचे दुसऱ्या कोणत्याही किमतींनीं स्थापिलें जात नाहीं.

या पुढीलप्रमाणें समीकरणे सांगितलीं आहेत असें मनांत आण.

$$\text{अक्ष}+\text{यय} = \text{क}$$

$$\text{पक्ष}+\text{कय} = \text{र}$$

यांत अ, ब, क, प, क, आणि र हीं व्यक्त परिमाणे आहेत असें मान.

**पहिली रीति.** अव्यक्त पदांतील एकाची किंमत एक समीकरणावरून काढ, आणि ती किंमत दुसऱ्या समीकरणांत त्याचे जागीं मांड.

दोन निरनिराळीं कृत्ये असतील, अथवा १४४ आणि १४५ पृष्ठांवर सांगितल्याप्रमाणें तीं दोन कृत्ये एकाच दोनवर्ण समीकरणाने दर्शिलीं जावीं, या सर्व गोष्टी सांगितल्या नाहींत झणून कृत्य उघडें दाखविलें गेलें नाहीं. जो शिकणारा हे दोन पक्ष एकाच समीकरणांत आणायास इच्छील, त्यासाठीं हें समीकरण मांडून दाखविलें आहे,

$$\text{क्षक्ष} + \text{यय} + २ \text{क्षय} = १४४$$

तसें केल्यानें जें समीकरण होतें त्यांत एकच अव्यक्त परिमाण राहिल.

वरचा पहिल्या समीकरणापासून,

$$\text{क्ष} = \frac{\text{क}-\text{वय}}{\text{अ}}$$

ही किंमत क्षचे जागीं दुसऱ्या समीकरणांत मांडिली असतां, हेंच होईल.

$$\frac{\text{पक}-\text{पवय}}{\text{अ}} + \text{कय} = \text{र अथवा य} = \frac{\text{अर}-\text{कप}}{\text{अक}-\text{वप}}$$

क्षची किंमत काढायासाठीं, पहिल्या समीकरणांतून यची किंमत काढ, आणि वरची कृति फिरून कर, त्यावरून

$$\text{य} = \frac{\text{क}-\text{अक्ष}}{\text{व}}, \text{ तर पक्ष} + \frac{\text{कक}-\text{कअक्ष}}{\text{व}} = \text{र, क्ष} = \frac{\text{कव}-\text{वर}}{\text{अक}-\text{वप}}$$

अथवा जी यची किंमत पहिली सांपडली, ती पूर्वीचे पद्धतींत क्षचे जागीं मांड; याप्रमाणें,

$$\text{क्ष} = \frac{\text{क}-\text{वय}}{\text{अ}},$$

$$\text{वय} = \frac{\text{वअर}-\text{वकप}}{\text{अक}-\text{वप}}$$

$$\text{क}-\text{वय} = \frac{\text{कअक}-\text{कवप}-(\text{वअर}-\text{वकप})}{\text{अक}-\text{वप}} = \frac{\text{कअक}-\text{वअर}}{\text{अक}-\text{वप}}$$

$$= \frac{\text{अ(कक}-\text{वर})}{\text{अक}-\text{वप}} \therefore \text{क्ष अथवा } \frac{\text{क}-\text{वय}}{\text{अ}} = \frac{\text{कक}-\text{वर}}{\text{अक}-\text{वप}}$$

$$\text{ताळा. जर क्ष} = \frac{\text{कक}-\text{वर}}{\text{अक}-\text{वप}}, \text{ आणि य} = \frac{\text{अर}-\text{कप}}{\text{अक}-\text{वप}}$$

$$\text{तर अक्ष} + \text{वय} = \frac{\text{अकक}-\text{अवर}}{\text{अक}-\text{वप}} + \frac{\text{अवर}-\text{वकप}}{\text{अक}-\text{वप}}$$

$$= \frac{\text{अकक}-\text{वकप}}{\text{अक}-\text{वप}} = \frac{\text{क(अक}-\text{वप})}{\text{अक}-\text{वप}} = \text{क}$$

$$\text{पक्ष} + \text{कय} = \frac{\text{कपक}-\text{वपर}}{\text{अक}-\text{वप}} + \frac{\text{अकर}-\text{कपक}}{\text{अक}-\text{वप}} = \text{र}$$

दुसरी रीति. दोहों समीकरणांस अशा रितीनें गुण, कीं जा पदां-

मध्ये सारिखी अव्यक्त परिमाणें आहेत, त्यांस एकसारिखेच गुणकांक होतील; नंतर सारिखीं पदे नाहींशीं व्हावयासाठीं गुणाकारांची मिळवणी अथवा वजावाकी कर. बहुतकरून, हीच सरळ रीति आहे; जा परिमाणाची दुसऱ्या समीकरणांत गरज नाही त्याचे गुणकानें प्रत्येक समीकरण गुण.

यची किंमत काढायाची.

$$\text{अक्ष} + \text{वय} = \text{क} \quad (\times) \text{प} \quad \text{पअक्ष} + \text{पवय} = \text{पक}$$

$$\text{पक्ष} + \text{कय} = \text{र} \quad (\times) \text{अ} \quad \text{पअक्ष} + \text{कअय} = \text{अर}$$

$$(-) \quad \text{अकय} - \text{वपय} = \text{अर} - \text{कप}$$

$$(\div) \frac{\text{अक} - \text{वप}}{\text{अक} - \text{वप}} \quad \text{य} = \frac{\text{अर} - \text{कप}}{\text{अक} - \text{वप}}$$

क्षची किंमत काढायाची.

$$\text{अक्ष} + \text{वय} = \text{क} \quad (\times) \text{व} \quad \text{अकक्ष} + \text{वकय} = \text{कक}$$

$$\text{पक्ष} + \text{कय} = \text{र} \quad (\times) \text{व} \quad \text{वपक्ष} + \text{वकय} = \text{वर}$$

$$(-) \quad \text{अकक्ष} - \text{वपक्ष} = \text{कक} - \text{वर}$$

$$(\div) \frac{\text{अक} - \text{वप}}{\text{अक} - \text{वप}} \quad \text{क्ष} = \frac{\text{कक} - \text{वर}}{\text{अक} - \text{वप}}$$

तिसरी रीति. प्रत्येक समीकरणापासून एक अव्यक्त परिमाणाची किंमत काढ, आणि या काढिलेल्या किंमती बरोबरीस मांड.

$$\text{पहिल्या समीकरणापासून} \quad \text{य} = \frac{\text{क} - \text{अक्ष}}{\text{व}} \quad \text{क्ष} = \frac{\text{क} - \text{वय}}{\text{अ}}$$

$$\text{दुसऱ्या समीकरणापासून} \quad \text{य} = \frac{\text{र} - \text{पक्ष}}{\text{क}} \quad \text{क्ष} = \frac{\text{र} - \text{कय}}{\text{प}}$$

$$\therefore \frac{\text{क} - \text{अक्ष}}{\text{व}} = \frac{\text{र} - \text{पक्ष}}{\text{क}} \quad \text{क्ष} = \frac{\text{कक} - \text{वर}}{\text{अक} - \text{वप}}$$

$$\frac{\text{क} - \text{वय}}{\text{अ}} = \frac{\text{र} - \text{कय}}{\text{प}} \quad \text{य} = \frac{\text{अर} - \text{कप}}{\text{अक} - \text{वप}}$$

आतां पुढील समीकरणें वरचे तीन रितींनीं शिकणारानें पुनःपुनः उलगाडावीं १०६ पृष्ठ पाहा.

$$\left. \begin{array}{l} \text{अक्ष} + \text{वय} = \text{क} \\ \text{अक्ष} + \text{वय} = \text{क} \end{array} \right\} \text{यांपासून} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{क्ष} = \frac{\text{कव} - \text{वक}}{\text{अव} - \text{वअ}} \\ \text{य} = \frac{\text{अक} - \text{कअ}}{\text{अव} - \text{वअ}} \end{array} \right.$$

(१.)  $३\text{क्ष} - २\text{य} = १४$

(X) २  $६\text{क्ष} - ४\text{य} = २८$

$२\text{क्ष} + ३\text{य} = १००$

(X) ३  $६\text{क्ष} + ९\text{य} = ३००$

(-)  $१३\text{य} = २७२$

$\text{य} = २० \frac{१२}{१३}$

(X) ३  $९\text{क्ष} - ६\text{य} = ४२$

(X) २  $४\text{क्ष} + ६\text{य} = २००$

(+)  $१३\text{क्ष} = २४२$

$\text{क्ष} = १८ \frac{८}{१३}$

(२.)  $\text{क्ष} + \text{य} = \text{अ}$

$\text{क्ष} - \text{य} = \text{ब}$

(+)  $२\text{क्ष} = \text{अ} + \text{ब}$

$\text{क्ष} = \frac{\text{अ} + \text{ब}}{२}$

(-)  $२\text{य} = \text{अ} - \text{ब}$

$\text{य} = \frac{\text{अ} - \text{ब}}{२}$

(३.)  $\text{पक्ष} + \text{य} = १$

$\text{क्ष} - \text{पय} = २$

पहिलें,

$\text{पक्ष} + \text{य} = १$

दुसरें, (X) प

$\text{पक्ष} - \text{पय} = २प$

(-)

$\text{य} + \text{पय} = १ - २प \quad \text{य} = \frac{१ - २प}{१ + पप}$

$१ - \text{य} = \frac{पप + २प}{१ + पप}$

$\text{क्ष} = \frac{१ - \text{य}}{प} = \frac{प + २}{१ + पप}$

(४.)  $३\text{क्ष} - ७ = ४ + (\text{क्ष} + \text{य})$  अथवा  $२\text{क्ष} - \text{य} = ११$

$२\text{य} + ७९ = ५\text{क्ष}$

अथवा  $५\text{क्ष} - २\text{य} = ७९$

पहिल्याला, (X) ५

$१०\text{क्ष} - ५\text{य} = ५५$

दुसऱ्याला, (X) २

$१०\text{क्ष} - ४\text{य} = १५८$

(-)

$\text{य} = १०३$

पहिल्यापासून,  $\text{क्ष} = \frac{११ + \text{य}}{२} = ५७$

२०

$$\begin{aligned}
 (५.) \quad & ३क्ष+४य = १३ \quad ४क्ष+५य = १० \\
 (x) ४ \quad & १२क्ष+१६य = ५२ \quad (x) ३ \quad १२क्ष+१५य = ३० \\
 (-) \quad & \quad \quad \quad य = ५२-३० = २२ \\
 (x) ५ \quad & १५क्ष+२०य = ६५ \quad (x) ४ \quad १६क्ष+२०य = ४० \\
 (-) \quad & \quad \quad \quad क्ष = ४०-६५ = -२५
 \end{aligned}$$

जा कृत्यापासून असें समीकरण झालें त्याशीं पूर्वी सांगितल्याप्रमाणें समीकरण फिरवून उत्तर नीट केलें पाहिजे.

$$\left. \begin{array}{l} \text{अक्ष+वय} = \text{क} \\ \text{पक्ष+कय} = \text{र} \end{array} \right\} \text{अशीं दिलीं असतां क्ष} = \frac{\text{कक}-\text{वर}}{\text{अक}-\text{वप}} \quad \text{य} = \frac{\text{अर}-\text{कप}}{\text{अक}-\text{वप}}$$

यांपासून हीं पुढील निघतील ;

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{अक्ष-वय} = \text{क} \\ \text{पक्ष-कय} = \text{र} \end{array} \right. \quad \text{क्ष} = \frac{\text{कक}-\text{वर}}{\text{अक}-\text{वप}} \quad \text{य} = \frac{\text{कप}-\text{अर}}{\text{अक}-\text{वप}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{अक्ष-वय} = \text{क} \\ \text{कय-पक्ष} = \text{र} \end{array} \right. \quad \text{क्ष} = \frac{\text{कक}+\text{वर}}{\text{अक}-\text{वप}} \quad \text{य} = \frac{\text{अर}+\text{कप}}{\text{अक}-\text{वप}}$$

वरचे पहिले दोन समीकरण समुदाय पाहिल्यानें, पहाण्यांत येतें, कीं त्यामध्ये हाच भेद आहे, कीं पहिल्यांत+वय+कय यांचे जागीं दुसऱ्यांत-वय-कय आहे. परंतु ११८ व्या पृष्ठावर सांगितल्या प्रमाणें ठाळक आहे, कीं अक्ष+वय यास नीट करून मांडिलें असतां, त्यांचें रूप अक्ष-वय आहे, आणि पक्ष+कय यांस नीट करून मांडिल्यानें त्यांचें रूप पक्ष-कय आहे; आणि वर सिद्ध झालें कीं नीट करणें कृतीचा हव्ये त्या पायरीपर्यंत ठेवितां येईल, तर हीं पुढील उलगाडणीं कामांत घ्यावीं.

$$\left. \begin{array}{l} \text{अक्ष+वय} = \text{क} \\ \text{पक्ष+कय} = \text{र} \end{array} \right\} \quad \text{क्ष} = \frac{\text{कक}-\text{वर}}{\text{अक}-\text{वप}} \quad \text{य} = \frac{\text{अर}-\text{कप}}{\text{अक}-\text{वप}}$$



असें घेतल्यानें समजांत येईल, कीं नीट केलेलीं उलगडणीं नीट केलेल्या समीकरणाचीं खरीं उत्तरे आहेत. असें केलें तर वरप्रमाणें उत्तरे निघतील; कारण कीं १२८ व्या पृष्ठावरचे रितीप्रमाणें क्षची किंमत नीट केली असतां, याप्रमाणें होईल.

$$\text{क्ष} = \frac{-\text{कक्ष} + \text{वर}}{-\text{अक्ष} + \text{वय}} \text{ अथवा } \frac{\text{वर} - \text{कक्ष}}{\text{वय} - \text{अक्ष}} \text{ अथवा } \frac{\text{कक्ष} - \text{वर}}{\text{अक्ष} - \text{वय}} \quad १४२ \text{ वें पृष्ठ पहा.}$$

आणि य विषयीं अशी कृति केली पाहिजे.\* याच रितीप्रमाणें, अक्ष+वय+कक्ष, अक्षा पद्धती पासून जें उत्तर निघेल, त्यापासून अक्ष-वय-कक्ष, अथवा कक्ष+वय-अक्ष, अथवा चिन्हांचे भेदाने झालेल्या पद्धतीचीं उत्तरे मिळतील. आतां वेगवेगळाले पक्ष निघतील, ते, आणि त्यांतून सर्वांचा दर्शक जो ठरविला, त्यास ते पक्ष जोडून पहाण्याची रीति, या दोन गोष्टी खालीं लिहितां.

या पद्धती

याप्रमाणें

अथवा याप्रमाणें  
मांडितां येतील.

अक्ष+वय-कक्ष

अक्ष+वय+कक्ष

अक्ष+वय+कक्ष

अक्ष-वय-कक्ष

अक्ष+वय+कक्ष

अक्ष+वय+कक्ष इत्यादि.

वय-अक्ष-कक्ष

अक्ष+वय+कक्ष

अक्ष+वय+कक्ष इत्यादि.

इत्यादि.

इत्यादि.

इत्यादि.

सर्वांचे दर्शकाविषयीं दुसरा कांहीं पक्ष घेतां येईल; जसें, अक्ष-वय-कक्ष असें असेल, तर अक्ष+वय+कक्ष ही पद्धती अक्ष-वय-कक्ष याप्रमाणें मांडावी.

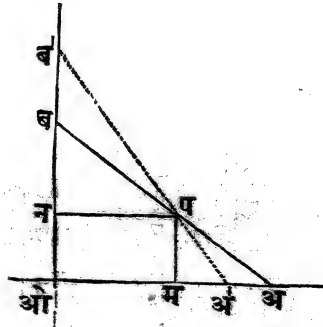
कृत्य. सरळ रेषांचे छेदनाविषयीं.

\* शिकणारानें, पुस्तकांत उदाहरणें दिलीं आहेत. त्याशिवाय दुसरीं उदाहरणें काढून उलगडून पहावीं.

**मूलकारण.** बओअ कांहीं कोन असावा, एथें काटकोन घे, आणि जा रेषांत तो कोन येतो, त्या रेषांस अब स्थळावर छेदून अब सरळ रेष कर, अब रेषेवर कोठेही प बिंदू पासून पन रेष, ओअशीं समांतर आणि पम रेष ओबशीं समांतर, अशा दोन रेषा केव्या असतील, आणि ओअ, ओब, पम, पन, ह्या सर्व एक जातीचे एकमानें मोजव्या तर, पम, ह्यणजे केवळ ती रेष नव्हे, परंतु त्यांत जितके एकम असतील, ते समजून, पम आणि ओअ यांचा गुणाकार पन आणि ओब यांचे गुणाकाराशीं मिळविला असतां, त्या दोहोंची बेरीज ओअ आणि ओब यांचे गुणाकाराचे बरोबर होईल, ही गोष्ट भूमितीमध्ये सिद्ध केली आहे.

अथवा

$$पम \times ओअ + पन \times ओब = ओअ \times ओब.$$



अब आणि अब अशा दोन रेषा प बिंदूवर बओअ या कोनांत परस्परांस छेदित, अशा असाव्या ; ओअ, ओब, ओअ, आणि ओब, हे दिले आहेत, तर पन आणि पम यांची किंमत काय.

आतां

$$\begin{aligned} ओअ &= १० \text{ एक} & ओअ &= ७ \text{ एक} \\ ओब &= ८ \dots & ओब &= १५ \dots \\ पन &= ४ \text{ एक} \\ पम &= ५ \dots \end{aligned}$$

तर, वरचे मूलकारणाप्रमाणें असें असावें प बिंदू अब रेघेवर आहे, ह्मणून,

$$\text{ओअ} \times \text{पम} + \text{ओब} \times \text{पन} = \text{ओअ} \times \text{ओब} \text{ अथवा } १०य + ८क्ष = ८०$$

पुनः त्याच कारणावरून, प बिंदू अब रेघेवरच आहे, ह्मणून,

$$\text{ओअ} \times \text{पम} + \text{ओब} \times \text{पन} = \text{ओअ} \times \text{ओब} \text{ अथवा } ७य + १५क्ष = १०५$$

एथें दोन समीकरणें आहेत, तीं य आणि क्ष यांणीं स्थापिलीं पाहिजेत. वरचे कोणत्याहि रितीनें यांस उलगडलें असतां, याप्रमाणें निघेल.

$$\text{क्ष अथवा पन} = \frac{१०}{८९} \text{ एक; } \text{य अथवा, पम} = \frac{३९}{८९} \text{ एक}$$

सामान्य पक्ष. याप्रमाणें असावें.

$$\text{ओअ} = \text{अ एक} \quad \text{ओअ} = \text{अ एक}$$

$$\text{ओब} = \text{ब ..} \quad \text{ओब} = \text{ब ..}$$

$$\text{पन} = \text{क्ष एक}$$

$$\text{पम} = \text{य ..}$$

१५१ आणि १५२ व्या पृष्ठावरचे, दुसऱ्ये रितीप्रमाणें, यापासून झालेलीं समीकरणें उलगडलीं असतां, याप्रमाणें होईल,

$$\text{अय} + \text{बक्ष} = \text{अब}$$

$$\text{अय} + \text{बक्ष} = \text{अब}$$

$$\text{अअय} + \text{अबक्ष} = \text{अअब}$$

$$\text{अअय} + \text{अबक्ष} = \text{अअब}$$

$$(\text{अब} - \text{अब})\text{क्ष} = \text{अअ}(\text{ब} - \text{ब})$$

$$\text{क्ष} = \text{अअ} \frac{\text{ब} - \text{ब}}{\text{अब} - \text{अब}}$$

$$\text{अबय} + \text{बबक्ष} = \text{अबब}$$

$$\text{अबय} + \text{बबक्ष} = \text{अबब}$$

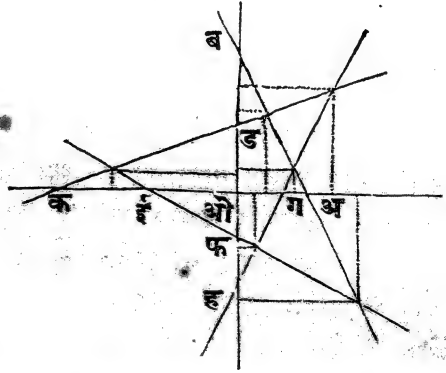
$$(\text{अब} - \text{अब})\text{य} = \text{बब}(\text{अ} - \text{अ})$$

$$\text{य} = \text{बब} \frac{\text{अ} - \text{अ}}{\text{अब} - \text{अब}}$$

ताळा.

$$\begin{aligned}
 \text{अय+वक्ष} &= \text{अवव} \frac{\text{अ-अ}}{\text{अव-अव}} + \text{अवअ} \frac{\text{व-व}}{\text{अव-अव}} \\
 &= \text{अव} \left\{ \frac{\text{अव-अव}}{\text{अव-अव}} + \frac{\text{अव-अव}}{\text{अव-अव}} \right\} \\
 &= \text{अव} \frac{\text{अव-अव}}{\text{अव-अव}} = \text{अव}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{अय+वक्ष} &= \text{अवव} \frac{\text{अ-अ}}{\text{अव-अव}} + \text{अवअ} \frac{\text{व-व}}{\text{अव-अव}} \\
 &= \text{अव} \left\{ \frac{\text{अव-अव}}{\text{अव-अव}} + \frac{\text{अव-अव}}{\text{अव-अव}} \right\} \\
 &= \text{अव} \frac{\text{अव-अव}}{\text{अव-अव}} = \text{अव}
 \end{aligned}$$



वरचे आकृतीमध्ये अव, कड, इफ, आणि गह, ह्या चार रेखा आहेत, त्या आंसांस\* जितक्या प्रकारांनी छेदू शकवे तितक्या प्रकारांनी छेदितात, झणजे ओअ आणि ओब या दोहोंस त्यांतल्या कोणत्याही दोन रेखा ओचे एकमेकांस छेदीत नाहीत. यामुळे आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे साहा छेदन बिंदू आहेत, आणि त्यांपासून ओअ आणि ओब या आंसावर लंब रेखा आकृतीत दाखविल्या आहेत; परंतु त्यां-

\* ओअ आणि ओब या मुख्य रेखा, जात वर समितलेला कोन घेतो, त्या रेखा दो-  
बोंकडे वाटविल्या असतात, त्या रेखांस आंस झणतात.

जवर कांहीं अक्षरें लिहिलीं नाहींत, कां कीं जा छेदन बिंदूविषयीं विचार करायाचा, त्यास्थळीं प हें अक्षर मांडिलें आहे असें मनांत आणावें, आणि त्या बिंदूपासून आंसावर जे लंब आहेत, ते आकृतीप्रमाणें पम आणि पन आहेत असें समजावें.

जा अंतरावर त्या चार रेखा आंसांस छेदितात तीं अंतरें एकच जातीचे एकमाचीं असावीं; ह्मणून

$$\begin{array}{llll} \text{ओअ} = ३ & \text{ओक} = ८ & \text{ओई} = ४ & \text{ओग} = २ \\ \text{ओब} = ६ & \text{ओड} = ३ & \text{ओफ} = २ & \text{ओह} = ४ \end{array}$$

अब आणि कड यांचे छेदन बिंदूचा पहिल्यानें विचार कर, छेदन स्थळीं प मांड आणि पहिल्या आकृतीप्रमाणें, पम = य आणि पन = क्ष घे. तर आरंभीं सांगितल्या मूल कारणाप्रमाणें प बिंदू अब रेघेवर आहे,

$$३य + ६क्ष = १८$$

परंतु कड रेघेकडे लक्ष दिलें असतां, दिसण्यांत येतें, कीं पहिल्यानें तें मूलकारण तिजवर नीट लागत नाहीं कां कीं कड रेघ बओअ कोनांत नाहीं, परंतु त्याचा जवळचा बओक कोनांत आहे. दुसऱ्यानें, ओक रेघ ८ एक लांबीची, ओअ या दिशेस मोजलेली नाहीं, परंतु उलट दिशेस मोजली आहे. यामुळे, जर ८ यांचे जागीं ८ असें मांडिलें, आणि ओक ही रेघ अकडे मोजली आहे असें मानून जें समीकरण येतें, तसें ८ या रूपापासूनहि येतें, त्यास, १४५ व्या पृष्ठाप्रमाणें नीट केल्यानें, पुढें कृति चालवायास दुसरें समीकरण मिळेल. ह्मणजे प बिंदू कड रेघेवर आहे, यामुळे याप्रमाणें होईल,

$$\begin{array}{l} ८य + ३क्ष = ८ \times ३, \text{ अथवा } १४५ \text{ पृष्ठाप्रमाणें, } -८य + ३क्ष = २४ = -२४ \\ \text{अथवा} \qquad \qquad \qquad ८य - ३क्ष = २४ \end{array}$$

३क्ष - ८य = -२४ हें दाखवितें, कीं ८य हे ३क्ष पेक्षां २४ इतक्यानें अधिक आहेत, यामुळे ८य - ३क्ष = २४ याप्रमाणें मांडित

वर निघालेलीं दोन समीकरणें उलगडून

$$\left. \begin{array}{l} ३य + ६क्ष = १८ \\ ८य - ३क्ष = २४ \end{array} \right\} \text{यापासून हेंच होईल} \quad \left\{ \begin{array}{l} क्ष = १\frac{५}{१९} \\ य = ३\frac{९}{१९} \end{array} \right.$$

याचा, आणि पुढील उत्तराचा ताळा, आकृती मोजल्याने, आणि समीकरणारूनही कलेल.

यांतल्या प्रत्येक पक्षाला ही रीति लागू करायासाठी, जा रेघा ओअ किंवा ओब यांचे दिशेस येत नाहीत, त्या सर्वांस ऋण चिन्हांने दर्शविल्या पाहिजेत. ह्मणजे,

$$\begin{array}{llll} \text{ओअ} = ३ & \text{ओक} = ८ & \text{ओई} = ४ & \text{ओग} = २ \\ \text{ओब} = ६ & \text{ओड} = ३ & \text{ओफ} = २ & \text{ओह} = ४ \end{array}$$

मागल्या शेवटील पक्षाप्रमाणें यांशीं कृति केली असतां, हें पुढीलप्रमाणें निघेल;

रेषांचें छेदणें.	समीकरणें.	नीट केलेलीं समीकरणें.
१. अब आणि कड	$\left\{ \begin{array}{l} ३य + ६क्ष = १८ \\ ८य + ३क्ष = २४ \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} ३य + ६क्ष = १८ \\ ८य - ३क्ष = २४ \end{array} \right.$
२. अब आणि ईफ	$\left\{ \begin{array}{l} ३य + ६क्ष = १८ \\ ४य + २क्ष = ४ \times २ \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} ३य + ६क्ष = १८ \\ ४य + २क्ष = -८ \end{array} \right.$
३. अब आणि गह	$\left\{ \begin{array}{l} ३य + ६क्ष = १८ \\ २य + ४क्ष = २ \times ४ \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} ३य + ६क्ष = १८ \\ २य - ४क्ष = -८ \end{array} \right.$
४. कड आणि ईफ	$\left\{ \begin{array}{l} ८य + ३क्ष = २४ \\ ४य + २क्ष = ४ \times २ \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} ८य - ३क्ष = २४ \\ ४य + २क्ष = -८ \end{array} \right.$
५. कड आणि गह	$\left\{ \begin{array}{l} ८य + ३क्ष = २४ \\ २य + ४क्ष = २ \times ४ \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} ८य - ३क्ष = २४ \\ २य - ४क्ष = -८ \end{array} \right.$
६. ईफ आणि गह	$\left\{ \begin{array}{l} ४य + २क्ष = ४ \times २ \\ २य + ४क्ष = २ \times ४ \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} ४य + २क्ष = -८ \\ २य - ४क्ष = -८ \end{array} \right.$

या नीट केलेल्या समीकरणांतून कित्येक अंकगणित रूपानें खरी नाहीत; जसें,  $४य + २क्ष = -८$ . परंतु लक्षांत ठेविलें पाहिजे, कीं पय

ह्यणजे य आणि पन ह्यणजे क्ष अशा दिशेस मोजले आहेत, कीं प बिंदू अओब या कोनांत येईल, असे कल्पनेनें हें समीकरण केलें, परंतु कदाचित् असा पक्ष नसेल. तथापि, १५१ आणि १५२ व्या पृष्ठां-वरची दुसरी रीति त्यास लावून, त्यांचीं उलगडणीं होतील; हें दाख-विण्यासाठीं वरचे दुसरे पक्षाचें उदाहरण विस्तारानें देतों.

$$३य + ६क्ष = १८$$

$$४य + २क्ष = -८$$

दुसरें समीकरण ३ नीं गुण

$$१२य + ६क्ष = -८ \times ३ \text{ अथवा } १२य + ६क्ष = -२४$$

हें पहिल्यांतून वजा करून, हें होतें

$$(३-१२) य = १८ - (-२४) = १८ + २४ = ४२$$

$$य = \frac{४२}{३-१२} = \frac{४२}{-९} = -\frac{४२}{९} = -४\frac{२}{३}$$

पहिल्या समीकरणापासून

$$क्ष = \frac{१८-३य}{६} = \frac{१८-३(-४\frac{२}{३})}{६} = \frac{१८+१४}{६} = ५\frac{१}{३}$$

अब आणि ईफ यांचे छेदनस्थळीं प बिंदू मांडिला असतां, पहा-ण्यांत येतें कीं कल्पनेचे उलट्ये दिशेस पम ह्यणजे य मोजिला आहे, आणि पन ह्यणजे क्ष पहिल्याच प्रमाणें मोजिला आहे, असें पहिल्याचें ऋणचिन्ह, आणि दुसऱ्याचें धनचिन्ह, यांवरून कळेल.

याचप्रमाणें चाललें असतां, सर्व सहा पक्षांतील क्ष आणि य यांचा किमती या पुढीलप्रमाणें निघतील.

रेघांचें छेदन, क्ष ह्यणजे पन याची किंमत. य ह्यणजे पम याची किंमत.

१. अव आणि कड	$१\frac{५}{१२}$	$३\frac{१}{१२}$
२. अव आणि ईफ	$५\frac{१}{३}$	$-४\frac{२}{३}$
३. अव आणि गह	$२\frac{१}{२}$	१
४. कड आणि ईफ	$-५\frac{५}{६}$	$\frac{६}{६}$
५. कड आणि गह	$४\frac{४}{१३}$	$४\frac{६}{१३}$
६. ईफ आणि गह	$\frac{४}{२}$	$-२\frac{२}{२}$

लक्षांत ठेविलें पाहिजे, कीं- $१\frac{१}{२}$  असें पद आलें, तर, -चिन्ह या सर्व पदांस लागतें; ह्मणजे  $-(१+\frac{१}{२})$  असें नाहीं, परंतु  $-(१+\frac{१}{२})$  अथवा  $-१-\frac{१}{२}$  याप्रमाणें आहे.

चांगली केलेल्या आकृतीवरून, सहा रेखा तपासिल्या असतां, पहाण्यांत येईल कीं जेव्हां उत्तर ऋण आहे, तेव्हां आरंभी जी कल्पना केली तिचे उलट्ये दिशेस मोजलें आहे.

समीकरणाचीं नीट करणीं कृतीचे शेवटा पावेतो, या पुढीलप्रमाणें स्वस्थ ठेवितां येतील;

१५७ व्या पृष्ठावर हीं समीकरणें आहेत.

$$\text{अय} + \text{वक्ष} = \text{अव}$$

$$\text{अय} + \text{वक्ष} = \text{अव}$$

यांस उलगडल्यानें

$$\text{क्ष} = \text{अव} \frac{\text{व}-\text{व}}{\text{अव}-\text{अव}}$$

$$\text{य} = \text{वव} \frac{\text{अ}-\text{अ}}{\text{अव}-\text{अव}}$$

हे दोन समीकरणसमुदाय घे, यांत दुसरा समुदाय वरचा सहाव्या उदाहरणाप्रमाणें आहे,

$$\text{अय} + \text{वक्ष} = \text{अव}$$

$$४य + २क्ष = ४ \times २$$

$$\text{अय} + \text{वक्ष} = \text{अव}$$

$$२य + ४क्ष = २ \times ४$$



हीं दोन्हीं परस्परांस मिळतील, जर

$$a=8 \quad b=2 \quad a'=2 \quad b'=8$$

या किमती क्ष आणि य यांचे स्थळीं मांडिल्यानें, याप्रमाणें होईल

$$\begin{aligned} \text{क्ष} &= 8 \times 2 \times \frac{2-8}{2 \times 2 - 8 \times 8} = (-8) \times \frac{-2+8}{-8-16} \\ &= (-8) \times (-\frac{2}{20}) = \frac{16}{20} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

$$y = 2 \times 8 \times \frac{2-8}{2 \times 2 - 8 \times 8} = 8 \times -\frac{6}{20} = -2\frac{2}{5}$$

हें पूर्वीप्रमाणें आहे. या कृत्याला सोडून, पुढें चालतो.

१४५ पृष्ठावर दाखविलें आहे, कीं दोन अव्यक्त परिमाणांचें एकच समीकरण असेल, तर त्याचीं अनंत उत्तरें निघतील; आणि त्या अव्यक्त पदांचें एकच उत्तर येण्याकरितां, कृत्यांत दुसरें समीकरण दिलें पाहिजे. परंतु या दुसरें समीकरणास पहिल्याचा आधार नसावा, ह्मणजे, तें पहिल्या समीकरणाचा रूपासारिखें होई असें नसावें. उदाहरण.  $\text{क्ष} + y = 12$  या समीकरणाचीं उत्तरें अनंत होतात; आणि जर दुसरें समीकरण या पुढिलांतून कोणतेंहि एक असलें, ह्मणजे

$$2\text{क्ष} + 2y = 24 \quad 3\text{क्ष} + 3y = 36 \quad \frac{1}{2}\text{क्ष} + \frac{1}{2}y = 6$$

$$3\text{क्ष} - 12 = 12 - 3y \quad 2\text{क्ष} + y = 24 - y \text{ इत्यादि.}$$

तरी अनंत उत्तरें निघतील; कां कीं जर  $\text{क्ष} + y = 12$ , तर आतां वर सांगितलीं सर्व समीकरणें खरी आहेत. ह्मणजे, वेगळालीं दोन समीकरणें द्यावी त्या ठिकाणीं एकच समीकरण दोन निरनिराळ्या रूपांनी दिलें आहे.

एक पक्षां अनंत उत्तरांचें दर्शक  $\frac{0}{0}$  अशे तऱ्हेचें रूप धरितें, ही गोष्ट

८६ आणि ८७ या पृष्ठांवर सांगितली आहे, आतां तसें एथें घडतें कीं नाहीं हें पहातों.

$$\text{जर } \begin{cases} \text{अक्ष+वय} = \text{क} \\ \text{पक्ष+कय} = \text{र} \end{cases} \text{ तर } \text{क्ष} = \frac{\text{कक}-\text{वर}}{\text{अक}-\text{वय}} \text{ आणि } \text{य} = \frac{\text{अर}-\text{कप}}{\text{अक}-\text{वय}}$$

आतां दुसऱ्या समीकरणास पहिल्या समीकरणाचा आधार आहे असा पक्ष घेतों.

मनांत आण, कीं

$$\text{प} = \text{मअ}$$

$$\text{क} = \text{मव}$$

$$\text{र} = \text{मक}$$

असें असतां दुसऱ्या समीकरणाचें रूप याप्रमाणें होईल,

$$\text{मअक्ष} + \text{मवय} = \text{मक} \quad (\div) \text{ म} \quad \text{अक्ष} + \text{वय} = \text{क}$$

हें पहिल्याप्रमाणें आहे. प, क, आणि र, यांचे जागीं यांची वरची घेतलेली किंमत, क्ष आणि य यांचे किंमतींत मांड

$$\text{क्ष} = \frac{\text{कमव}-\text{वमक}}{\text{अमव}-\text{वमअ}} = \frac{\circ}{\circ} \quad \text{य} = \frac{\text{अमक}-\text{कमअ}}{\text{अमव}-\text{वमअ}} = \frac{\circ}{\circ}$$

यापक्षां ८६ आणि ८७ या पृष्ठांवर जो उलटाविषय लिहिला तोच अर्थ सुद्धां एथें दिसतो.

जर तीन अव्यक्त परिमाणें असलीं, तर तीन निरनिराळीं समीकरणें असावीं; असें १४५ आणि १४६ पृष्ठांवर लिहिल्यावरून दाखवितां येईल, जर तीन समीकरणें निरनिराळीं नसलीं, तर कृत्वाचीं अनंत उत्तरे येतील. ही गोष्ट दाखवायासाठीं एक उदाहरण घेऊन कृति करून दाखवितों.

उदाहरण.

$$२क्ष + ४य - ३ज्ञ = १० \dots\dots (१)$$

$$५क्ष - ३य + २ज्ञ = २० \dots\dots (२)$$

$$३क्ष + २य + ५ज्ञ = ५० \dots\dots (३)$$

(१) समीकरणाचे दोहों बाजूंस २ नीं गुण, आणि (२) चे दोहों बाजूंस ३ नीं गुण, ह्मजे दोन्ही गुणाकारांत ज्ञ चा गुणक सारखा होईल.

$$\text{समीकरण (१)} \times २$$

$$४क्ष + ८य - ६ज्ञ = २०$$

$$\text{समीकरण (२)} \times ३$$

$$१५क्ष - ९य + ६ज्ञ = ६०$$

$$(+)$$

$$१९क्ष - य = ८० \dots\dots (४)$$

(२) आणि (३) या समीकरणाशीं तशीच कृति कर.

$$\text{समीकरण (२)} \times ५$$

$$२५क्ष - १५य + १०ज्ञ = १००$$

$$\text{समीकरण (३)} \times २$$

$$६क्ष + ४य + १०ज्ञ = १००$$

$$(-)$$

$$१९क्ष - १९य = ०$$

$$(\div) १९ \text{ क्ष} - य = ० \text{ अथवा क्ष} = य \dots\dots (५)$$

(४) आणि (५) हीं दोन समीकरणें अशीं निघालीं, जांत क्ष आणि य मात्र आहेत, परंतु ज्ञ नाही हीं उलगडून, हें उत्तर येतें

$$य = \frac{४०}{९}$$

$$क्ष = \frac{४०}{९}$$

वर दिलेल्या तीन समीकरणांतून हव्या त्या समीकरणांत या किमती मांड. जर दुसऱ्या समीकरणांत या किमती मांडिल्या, तर

$$५ \times \frac{४०}{९} - ३ \times \frac{४०}{९} + २ज्ञ = २० \quad \text{ज्ञ} = \frac{५०}{९}$$

तीन अव्यक्त परिमाणांतून एकच अव्यक्त परिमाण काढायाची एक

फार उपयोगी कृति\* आहे. मनांत आण, कीं, वरचा समीकरणांतून ज्ञची मात्र किंमत काढायाची आहे. म आणि न, जांची किंमत माहीत नाही, परंतु पुढे सोईप्रमाणें कसेहि तऱ्हेनें त्यांचा किंमती काढितां येतील, अशीं दोन नवीं परिमाणें घे. समीकरणाचा दोन्ही बाजू कांहीं परिमाणानें गुणितां येतात, तर (२) समीकरण मनें आणि (३) रें ननें गुणून दोन गुणाकारांची बेरीज (१) समीकरणास मिळीव, यावरून असें होईल

$$(२+५म+३न)क्ष+(४-३म+२न)य+(२म+५न-३)ज्ञ$$

$$= १०+२०म+५०न \dots (अ)$$

म आणि न यांचा किंमती इच्छेप्रमाणें घेतां येतील, आणि जापेक्षां केवळ ज्ञचीच किंमत काढणें आहे, ह्मणून म आणि न हे असे असावे, कीं

$$\left. \begin{array}{l} २+५म+३न=० \quad \text{अथवा} \quad ५म+३न=-२ \\ ४-३म+२न=० \quad \text{अथवा} \quad ३म-२न=४ \end{array} \right\} \text{असें होईल}$$

तर वरचा समीकरणाचीं उत्तरे म आणि न असावीं, जावरून  $म = \frac{६}{१९}$ ,  $न = -\frac{२६}{१९}$ . परंतु (अ) या समीकरणाचा जा पदांत क्ष आणि य आहेत, तीं पदे, ० ने गुणिलीं असतां, नाहीशीं होतात. यामुळे

$$(२म+५न-३)ज्ञ = १०+२०म+५०न$$

$$ज्ञ = \frac{१०+२०म+५०न}{२म+५न-३} = \frac{१०+२० \times \frac{६}{१९} + ५० \left(-\frac{२६}{१९}\right)}{२ \times \frac{६}{१९} + ५ \left(-\frac{२६}{१९}\right) - ३}$$

या अपूर्णाकाचे अंश आणि छेद १९ नीं गुणून, संक्षेप कर, तर याप्रमाणें होईल

\* सर्व साधारण पक्षांत किंवा विशेष पक्षांत, कोणत्याहि रीतीचें मूळ कारण किंवा कृति यांचा संक्षेप जा रीतिनें होईल, त्या रीतीला कृति ह्मणतात.

$$z = \frac{10 \times 19 + 20 \times 2 - 40 \times 26}{2 \times 2 - 4 \times 26 - 3 \times 19} = \frac{-940}{-171} = \frac{940}{171} = \frac{40}{9}$$

**उलटेविषय.** कृपापासून कदाचित् दोन समीकरणे निघतील, जी परस्परांशीं अगदीं विरुद्ध आहेत, जशीं या पुढीलप्रमाणे;

$$x + y = 12$$

$$x + y = 13$$

अथवा असेहि घडेल, कीं जर तीन अव्यक्त परिमाणे आणि तीन समीकरणे असतील, तर त्या तिहींतून जरी दोन खरीं असतील, तरी तिसरे एक अशक्य असेल. आणि जरी ते अशक्य समीकरण दुसऱ्या दोन समीकरणांतून प्रत्येकाशीं एकटें मिळतें आहे तरी वरची गोष्ट घडती.

उदाहरण,

$$x - y = 10$$

$$y - z = 11$$

$$x - z = 12$$

$$\text{जर } x = 20 \quad y = 10 \quad z = -1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{तर पहिलें आणि दुसरें हीं दोन} \\ \text{समीकरणे खरीं आहेत} \end{array} \right.$$

$$\text{जर } x = 20 \quad y = 10 \quad z = 2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{तेव्हां पहिलें आणि तिसरें हीं} \\ \text{दोन समीकरणे खरीं आहेत} \end{array} \right.$$

$$\text{जर } x = 20 \quad y = 19 \quad z = 2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{तेव्हां दुसरें आणि तिसरें हीं दोन} \\ \text{समीकरणे खरीं आहेत} \end{array} \right.$$

परंतु  $x$ ,  $y$ , आणि  $z$ , यांस कशीहि किंमत दिली, तरी तिन्हीं समीकरणे बरोबर स्थापिलीं जात नाहींत. ही गोष्ट पहिल्या दोन समीकरणाचे बेरिजेवरून कळेल. कां कीं जर  $x - y = 10$ , आणि  $y - z = 11$  तर

$$(x - y) + (y - z) = 21 \text{ अथवा } x - z = 21$$

हें उत्तर तिसरे समीकरणाशीं मिळत नाहीं.

१५०व्या पृष्ठावर जी सामान्य उलगडण्याची रीति सांगितली, ती शिकणारानें तपासून पाहावी, आणि जेव्हां दोन समीकरणें विरुद्ध असतात तेव्हां त्यांतील क्ष आणि य यांचा किंमती ८० पृष्ठावर सांगितल्याप्रमाणें अपूर्णाकाचें रूप धरितात जाचे छेदस्थळीं ० असतें, असें त्याणें दाखवावें. आणि जा कृष्यांपासून विरुद्ध समीकरणें निघतात, त्यांचा अर्थ त्या पृष्ठावरचे  $\frac{क}{०}$  अशे रूपाचे उत्तरापासून जो अर्थ निघाला, तसाच अर्थ या समीकरणाचा होतो, हेंही दाखवितां येईल.

या अध्यायांतील, जा दोन समीकरणांविषयीं विचार झाला, त्यांचा जर संक्षेप केल्यानंतर पहिल्या बाजू बरोबर निघतील आणि दुसऱ्या बाजू बरोबर निघत नाहींत, असें नसेल तर तीं समीकरणें कधीही विरुद्ध व्हाव्याचीं नाहींत; जसें,

$$२क्ष + ३य = १०$$

$$२क्ष + ३य = १२$$

दुसऱ्या समीकरणांतून पहिलें वजा केलें असतां  $० = २$  असें निघेल, ही अशक्य गोष्ट ८४ पृष्ठावर अक्ष = अक्ष + क जापासून पहिल्यानें  $\frac{क}{०}$  हें रूप निघालें, त्याचेच जातीची आहे.

## चवथा अध्याय.

घात आणि मूलप्रकाशक चिन्हे, आणि बीजानुरूप पद्धतीचा क्रमनियम, यांविषयी.

एक परिमाण त्याणें तेंच दोन, तीन, किंवा अधिक वेळा गुणायाचें असें वारंवार येतें, ह्मणून तें दाखवायासाठीं कांहीं संक्षेप रीति घ्यावी लागती, ती आतां सांगतों.

क्ष गुणिला क्ष, अथवा क्षक्ष, यास क्षचा द्विघात ह्मणतात.

क्षक्ष . . . क्ष, अथवा क्षक्षक्ष, यास क्षचा त्रिघात ह्मणतात.

क्षक्षक्ष . . . क्ष, अथवा क्षक्षक्षक्ष, यास क्षचा चतुर्घात ह्मणतात.

आणि इत्यादि. अथवा क्षने क्ष न\* वेळा गुणिला असतां, त्या गुणाकारास क्षचा नघात ह्मणतात. द्विघात आणि त्रिघात यांस बहुतकरून वर्ग आणि घन ह्मणतात. जसें, क्षक्ष यास क्षचा वर्ग ह्मणतात, आणि त्यास क्ष वर्ग असें ह्मणतात, आणि क्षक्षक्ष यास क्षचा घन ह्मणतात, आणि त्यास क्ष घन असें ह्मणतात; आणि कांहीं अंक एकवेळ त्याणें तोच गुणिला तर तो वर्ग झाला असें ह्मणतात; दोन वेळा त्याणें तोच गुणिला असतां झाला घन असें ह्मणतात, इत्यादि.

विस्तार अर्थानें, नुसले क्षला क्षचा प्रथम घात ह्मणतात.

घाताचा संक्षेप दर्शक या पुढीलप्रमाणें आहे; घातामध्ये जितके वेळा

\* क्ष नवेळ्या क्षने गुणिला असतां, गुणाकार क्षचा न घात होतो, असें नवे शिकणारे बहुतकरून चुकीनें समजतात. परंतु असें नव्हे; कां कीं क्ष एकवेळ्या क्षने गुणिला असतां, (क्षक्ष) आहे, ह्मणजे हा क्षचा द्विघात आहे; ह्मणून क्ष हा नवेळ्या क्षने गुणिला असतां, (न+१) घात होतो.

अक्षर येतें तो वेळांक, जा अक्षरांचा घात करणें आहे, त्या अक्षराचेवर उजव्येकडे मांडावा. जसें,

क्ष यास क्ष<sup>२</sup> याप्रमाणें मांडितात,  
क्षक्ष . . . क्ष<sup>३</sup> याप्रमाणें मांडितात,  
क्षक्षक्ष . . . क्ष<sup>४</sup> याप्रमाणें मांडितात,

आणि याप्रमाणें पुढेहि. एथें २, ३, ४, इत्यादि यांस क्षचे घातप्रकाशक झणतात. त्याचप्रमाणें,

(अ+ब)×(अ+ब) यास (अ+ब)<sup>२</sup> याप्रमाणें मांडितात,  
(अ+ब)×(अ+ब)×(अ+ब) यास (अ+ब)<sup>३</sup> याप्रमाणें मांडितात,

आणि याप्रमाणें पुढेहि. आतां हीं पुढील उत्तरे सहज सांपडतील.

क्ष×क्ष=क्ष<sup>२</sup>      क्ष<sup>२</sup>×क्ष=क्ष<sup>३</sup>      क्ष<sup>३</sup>×क्ष=क्ष<sup>४</sup>, इत्यादि.

(अ+क्ष)<sup>२</sup> = अ<sup>२</sup> + २अक्ष + क्ष<sup>२</sup>

(अ-क्ष)<sup>२</sup> = अ<sup>२</sup> - २अक्ष + क्ष<sup>२</sup>

(अ+क्ष)(अ-क्ष) = अ<sup>२</sup> - क्ष<sup>२</sup>

(अ<sup>२</sup>+अक्ष+क्ष<sup>२</sup>)(अ-क्ष) = अ<sup>३</sup>-क्ष<sup>३</sup>

(अ+ब)<sup>३</sup> = अ<sup>३</sup> + ३अ<sup>२</sup>ब + ३अब<sup>२</sup> + ब<sup>३</sup>

(अ-ब)<sup>३</sup> = अ<sup>३</sup> - ३अ<sup>२</sup>ब + ३अब<sup>२</sup> - ब<sup>३</sup>

एकाच अक्षराचे दोन घातांचा गुणाकार दाखविण्यासाठीं गुणाकाराचें घातप्रकाशक चिन्ह, गुण्य आणि गुणक यांचे घातप्रकाशकांचे बेरिजे बरोबर मांड. जसें, क्ष<sup>३</sup> आणि क्ष<sup>२</sup> यांस गुणयाचें आहे, तर





१ उलटा विषय. क्ष<sup>अ</sup>यास क्ष<sup>व</sup>याणें भागायाचें असेल, तर वरची रीति लागू केली असतां, याप्रमाणें होईल, क्ष<sup>अ</sup>÷क्ष<sup>व</sup>=क्ष<sup>अ-व</sup>. परंतु हें झाल्यानंतर जर अ=व असें निघेल, तर वरचें उत्तर क्ष<sup>अ-अ</sup> हें होतें, अथवा क्ष<sup>०</sup>, अशे चिन्हाचा अद्यापि अर्थ केला नाही. यास्तव, पहिली कृति फिरून मनन करितों, त्यांत व=अ असून क्ष<sup>अ</sup>यास क्ष<sup>व</sup>याणें भागायाचें आहे, अथवा क्ष<sup>अ</sup>यास क्ष<sup>अ</sup>याणें भागायाचें आहे. तर यावरून उत्तर १, हें उघड आहे.

आतां, १ या खरे उत्तराचे जागीं, जाला अर्थ नाही असें क्ष<sup>०</sup> हें उत्तर कां आलें ! कां कीं जा पक्षाला ही रीति लागू होत नाही, त्यालाच वरची ही रीति लाविली. त्या रीतींत सांगितलें कीं एक घातास त्यापेक्षां कमी घातानें भागायाचें इत्यादि, आणि ती रीति पूर्वीचे गुणाकाराचे रीतिपासून निघाली, ह्मणून जेथें गुण्यगुणक हे दोन्ही क्ष चे घात आहेत, त्याशिवाय दुसरे पक्षांस, ही वरची गुणाकाराची रीति लागू होत नाही, आणि, यामुळें, जेथें गुणाकाराचा घातप्रकाशक, गुण्य किंवा गुणकाचे घातप्रकाशकापेक्षां अधिक होता, ह्मणजे, जेव्हां गुणाकार क्ष<sup>अ</sup> आहे, आणि क्ष<sup>व</sup>गुण्य किंवा गुणक आहे, तेव्हां अपेक्षां व कमी असल्यावांचून वरची रीति लागू होत नाही.

जर (क्ष<sup>०</sup>) असें चिन्ह आलें, तर या दोहोंतून एक तरी केलें पाहिजे; प्रथम, जा पक्षाला लागू होत नाही त्या पक्षाला ही रीति लाविली, हें क्ष<sup>०</sup> दाखवितो असें मनांत आण, आणि त्याला काढून टाकून, त्याचे जागीं १ मांड; अथवा दुसऱ्यानें, क्ष<sup>०</sup> याचा जरी अद्यापि अर्थ नाही, तथापि त्यास १ याचे जागीं मांड; या पक्षां रीति लागू होऊन खरें उत्तर निघतें. यामुळें, हें पुढील व्याख्यान स्थापिलें आहे.

कांहीं अक्षराला ० असें घातप्रकाशकचिन्ह असलें, जसें अ<sup>०</sup>, त्याचा अर्थ १ आहे; अथवा प्रत्येक परिमाण अशे घाताने वाढलें कीं त्याचा प्रकाशक ० होतो, तें परिमाण १ आहे.

१ उलटाविषय. जेव्हां अपेक्षां व अधिक आहे, आणि व=अ+६

असेल, अशा पक्षाला  $\text{क्ष}^{\text{अ}} \div \text{क्ष}^{\text{ब}} = \text{क्ष}^{\text{अ-ब}}$  हें समीकरण लाविलें, तर नुसले रीतीनें याप्रमाणें होईल,

$$\text{क्ष}^{\text{अ}} \div \text{क्ष}^{\text{अ+६}} = \text{क्ष}^{\text{अ-(अ+६)}} = \text{क्ष}^{-६}$$

या उत्तरांत कांहीं अर्थ नाही. याचें कारण वरचेप्रमाणें आहे; ह्मणजे जा पक्षाला ही रीति लागू करण्याची नव्हती यास ती रीति लाविली. खरें उत्तर काढायासाठी, स्मरण ठेव कीं  $\text{क्ष}^{\text{अ+६}} = \text{क्ष}^{\text{अ}} \times \text{क्ष}^{\text{६}}$ ; आणि

$$\frac{\text{क्ष}^{\text{अ}}}{\text{क्ष}^{\text{अ+६}}} = \frac{\text{क्ष}^{\text{अ}}}{\text{क्ष}^{\text{अ}} \times \text{क्ष}^{\text{६}}} = \frac{१}{\text{क्ष}^{\text{६}}}$$

वरचे अपूर्णाकाचे अंश आणि छेद यांस  $\text{क्ष}^{\text{अ}}$  यांणीं भागून हें उत्तर झालें. हीं पुढील उदाहरणें याचप्रमाणें आहेत; पहिल्या ओळींत खरी कृति आहे, दुसऱ्या ओळींत रीतीचा खोटा विस्तार आहे;

$$\begin{aligned} \frac{\text{क्ष}^३}{\text{क्ष}^२} &= \frac{\text{क्ष}^३}{\text{क्ष}^३ \cdot \text{क्ष}} = \frac{१}{\text{क्ष}} \\ \frac{\text{क्ष}^२}{\text{क्ष}^१} &= \frac{\text{क्ष}^२}{\text{क्ष}^२ \cdot \text{क्ष}^१} = \frac{१}{\text{क्ष}^१} \\ \frac{\text{क्ष}^{१०}}{\text{क्ष}^{२०}} &= \frac{\text{क्ष}^{१०}}{\text{क्ष}^{१०} \cdot \text{क्ष}^३} = \frac{१}{\text{क्ष}^३} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\text{क्ष}^३}{\text{क्ष}^२} &= \text{क्ष}^{३-२} = \text{क्ष}^१ \\ \frac{\text{क्ष}^२}{\text{क्ष}^१} &= \text{क्ष}^{२-१} = \text{क्ष}^१ \\ \frac{\text{क्ष}^{१०}}{\text{क्ष}^{२०}} &= \text{क्ष}^{१०-२०} = \text{क्ष}^{-१०} \end{aligned}$$

रीति लागू होईल असें करायासाठी, हेंच मान्य केलें पाहिजे कीं

$$\text{क्ष}^{-१}, \text{क्ष}^{-६}, \text{क्ष}^{-३}$$

यांस अद्यापि अर्थ नाही, तथापि तीं या पुढीलचे जागीं मांडितां येतील, ह्मणून

$$\frac{१}{क्ष}, \frac{१}{क्ष^२}, \text{ आणि } \frac{१}{क्ष^३}$$

ह्मणजे  $क्ष^{-१}$  असे उत्तर आले असतां, ते टाकून त्याचे जागीं  $१ \div क्ष$  हे मांडावे, त्याबदल  $क्ष^{-१}$  आणि  $१ \div क्ष$  या दोहोंचा अर्थ एकच आहे असे मानावे. आणि  $क्ष^{-१}$  याला अद्यापि कांहीं अर्थ नाही, यामुळे त्याला इच्छेप्रमाणे कांहीं अर्थ देतां येईल, यामुळे हे पुढील व्याख्यान निघते;

जा अक्षरास घातप्रकाशकचिन्ह ऋण आहे, त्याचा अर्थ हा-च, कीं एक भागिला त्याच अक्षरानें आणि त्या अक्षराचें जें अं-करूप घातप्रकाशकचिन्ह असेल, तेंच त्यास धन करून लावावे; अथवा,

$$क्ष^{-अ} \text{ याचा अर्थ } \frac{१}{क्ष^अ}$$

गुणाकार आणि भागाकार यांचा दोन रितीं सर्वत्र सामान्य आहेत असे आतां कळेल. वरचे रचनेप्रमाणें, हीं पुढील उदाहरणें देतो;

$$\begin{array}{l|l} \frac{१}{क्ष^३} \div \frac{१}{क्ष^२} = \frac{१}{क्ष^३} \times \frac{क्ष^२}{१} = \frac{क्ष^२}{क्ष^३} = क्ष^{-१} & क्ष^{-३} \div क्ष^{-२} = क्ष^{-३-(-२)} = क्ष^{-३+२} = क्ष^{-१} \\ क्ष^२ \times \frac{१}{क्ष^३} = \frac{क्ष^२}{क्ष^३} = \frac{१}{क्ष} & क्ष^३ \times क्ष^{-२} = क्ष^{३+(-२)} = क्ष^{३-२} = क्ष^१ \\ \frac{१}{क्ष^३} \div क्ष^२ = \frac{१}{क्ष^३} \times \frac{१}{क्ष^२} = \frac{१}{क्ष^{३+२}} = \frac{१}{क्ष^५} & क्ष^{-३} \div क्ष^२ = क्ष^{-३-२} = क्ष^{-५} \end{array}$$

घातप्रकाशकाविषयीं जें पूर्वी व्याख्यान सांगितलें त्यापेक्षां आतां कांहीं अधिक दाखविलें, ह्मणजे जा पदांचे घातप्रकाशक धन किंवा ऋण पूर्णांक असतील, तर सर्व पक्षां मूळचा दोन रितीं खऱ्या रहातात. त्या रिती ह्याच आहेत, कीं

$$क्ष^अ \times क्ष^ब = क्ष^{अ+ब} \quad क्ष^अ \div क्ष^ब = क्ष^{अ-ब}$$

परंतु अंकास किंवा अक्षरास अपूर्ण प्रकाशक असतील त्यांचा अर्थ माहीत नाही; जसे,

$$क्ष^{\frac{1}{2}}, क्ष^{\frac{1}{3}}, क्ष^{\frac{2}{3}}, क्ष^{\frac{3}{4}}, क्ष^{\frac{4}{5}} \text{ इत्यादि.}$$

वरचे रितीचे कांहीं खोऱ्ये विस्तारानें, या वरल्या चिन्हांस सोप्ये रितीने अर्थ देण्याचा विचार करण्यास, आपल्ये मनांत अवश्य येई, तोंपर्यंत न थांबतां, आधींच ती रीति कशी आहे ती पहातों. आणि वरची रीति लागू होईल असा, क्ष<sup>१</sup> याचा अर्थ काय आहे, ह्याविषयीं पहिल्यानें प्रश्न केला पाहिजे.  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = १$  ह्मणून यापक्षां क्ष<sup>१</sup> याचा अर्थ याप्रमाणें केला पाहिजे.

$$क्ष^{\frac{1}{2}} \times क्ष^{\frac{1}{2}} = क्ष^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = क्ष^१ \text{ अथवा क्ष}$$

यामुळे, क्ष<sup>१</sup> तेंच परिमाण आहे कीं त्याणें तेंच गुणिलें असतां, गुणाकार क्ष होतो, अथवा अंकगणितरूपाप्रमाणें त्यास क्षचें वर्गमूळ ह्मणतात. त्याचप्रमाणें,  $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = १$  ह्मणजे क्ष<sup>१</sup> याचा अर्थ याप्रमाणें केला पाहिजे, ह्मणजे  $क्ष^{\frac{1}{3}} \times क्ष^{\frac{1}{3}} \times क्ष^{\frac{1}{3}} = क्ष^{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = क्ष^१$  अथवा क्ष

ह्मणजे, क्ष<sup>१</sup> हें क्षचें घनमूळ असावें. क्षचें मूळ ह्मटलें असतां तो शब्द घात या शब्दाचे उलटा आहे; ह्मणजे, जर म हा नचा त्रिघात आहे, तर न यास मचें तृतीय मूळ ह्मणतात.

जसे या पुढीलप्रमाणें;

नचें नाव.  
 म चें वर्गमूळ  
 म चें घनमूळ  
 म चें चतुर्घातमूळ  
 म चें पंचघातमूळ  
 इत्यादि.

मागल्या नावावरून समीकरण.

नन = म  
 ननन = म  
 नननन = म  
 ननननन = म  
 इत्यादि.

जसे, ४०९६ या अंकाला वर्गमूळ, घनमूळ, चतुर्घातमूळ, षड्घातमूळ, आणि द्वादशघातमूळ ही निःशेष मुळें आहेत.

त्याचें वर्गमूळ ६४ आहे, कां कीं

$$६४ \times ६४ = ४०९६$$

त्याचें घनमूळ १६ आहे . . . .

$$१६ \times १६ \times १६ = ४०९६$$

त्याचें चतुर्घातमूळ ८ आहे . .

$$८ \times ८ \times ८ \times ८ = ४०९६$$

त्याचें षड्घातमूळ ४ आहे . .

$$४ \times ४ \times ४ \times ४ \times ४ \times ४ = ४०९६$$

त्याचें द्वादशघातमूळ २ आहे . .

$$\left\{ \begin{array}{l} २ \times २ \times २ \times २ \times २ \times २ \times २ \\ २ \times २ \times २ \times २ \times २ \times २ \end{array} \right\} = ४०९६$$

जर मागल्या अर्थावर विश्वास ठेविला, तर ही उत्तरें अशा रितीने लिहिलीं पाहिजेत;

$$६४ = (४०९६)^{\frac{1}{2}}$$

$$८ = (४०९६)^{\frac{1}{4}}$$

$$१६ = (४०९६)^{\frac{1}{3}}$$

$$४ = (४०९६)^{\frac{1}{6}}$$

$$२ = (४०९६)^{\frac{1}{12}}$$

परंतु, अंकगणितांतील लिहिण्याचे पद्धतीप्रमाणें तीं अशीं लिहिलीं पाहिजेत;

$$\begin{aligned} ६४ &= \sqrt[4]{४०९६} & ८ &= \sqrt[४]{४०९६} \\ १६ &= \sqrt[३]{४०९६} & ४ &= \sqrt[३]{४०९६} \\ २ &= \sqrt[१२]{४०९६} \end{aligned}$$

अपूर्ण प्रकाशकाचे अर्थाची गोष्ट पुढें चालत असतां, क्ष<sup>३</sup> याचा अर्थ क्ष<sup>३</sup> चें घनमूळ असा असावा; कां कीं, वरचा रिती खऱ्या असाव्या असें जर आहे, तर याप्रमाणें असावें,

$$\text{क्ष}^{\frac{३}{३}} \times \text{क्ष}^{\frac{३}{३}} \times \text{क्ष}^{\frac{३}{३}} = \text{क्ष}^{\frac{३}{३} + \frac{३}{३} + \frac{३}{३}} = \text{क्ष}^३$$

आणि, तसेच कल्पनेनें, अनुमान होतें, कीं क्ष<sup>म</sup> हें क्ष<sup>म</sup> चे न मूळाचे ठिकाणीं असावें. परंतु मूळें आणि घात यांचे परस्पर संबंधाविषयीं कांहीं अधिक माहिती झाल्यावांचून, पूर्वी सांगितलेला अर्थ खरा आहे कीं नाहीं, याचा निश्चय करवत नाहीं, असें एथें दाखवितों. उदाहरण,

क्ष<sup>२<sup>३</sup></sup> अथवा क्ष<sup>२+३</sup> हें क्ष<sup>२</sup> × क्ष<sup>३</sup> अथवा क्ष<sup>२</sup> √क्ष<sup>३</sup> असें असावें,

परंतु २<sup>३</sup> = <sup>५</sup>/<sub>२</sub>; यामुळे,

क्ष<sup>२<sup>३</sup></sup> हें क्ष<sup>५</sup> अथवा √क्ष<sup>५</sup> असें असावें,

यामुळे, क्ष<sup>२</sup> √क्ष<sup>३</sup> हें √क्ष<sup>५</sup> असें असावें,

यांत, असें असावें, या शब्दांवरून असें समजतें कीं जर असें नसलें, तर पूर्वीचे सांगितले अर्थानें घेतलेले अपूर्णांकरूप घातप्रकाशकांस,

\* √ हें चिन्ह वर्गमूळ दाखविण्यासाठीं आतां बहुतकरून कामांत घेतात, आणि, बाजगणितानें होणाऱ्या शंभर उदाहरणांतून नव्याण्णव उदाहरणांत वर्गमूळपेक्षां मोठें मूळ घेत नाहीं.

अंकगणिताची चालती रीति लागू करवत नाही.\* पुनः  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$  तर

$\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \times \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$  अथवा  $\sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{3}}$  हे  $\sqrt[3]{\frac{1}{6}}$  अथवा  $\sqrt{\frac{1}{6}}$  असें असावे, परंतु अद्यापि सिद्ध केले नाही, कीं

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \times \sqrt[3]{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{6}} \text{ अथवा } \sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{1}{6}}$$

कल्पिलेल्या अर्थावरून अद्यापि खोटे उत्तर होत नाही, हे दाखविण्याकरितां पुढील अंकगणितरूपाचे सिद्धांत पहिल्याने सांगतां.

१ सिद्धांत. जर व पेशां अ अधिक आहे, तर व<sup>३</sup> पेशां अ<sup>३</sup>, आणि व<sup>३</sup> पेशां अ<sup>३</sup> अधिक आहे, इत्यादि. कां कीं या पेशां अअ हे अशा गुणाकाराचे उत्तर आहे कीं जात, वमध्ये जितके एक आहेत त्यांहून अधिक वेळा, वहून कांहीं अधिक घेतले आहे; यामुळे वव पेशां अअ अधिक आहे; अ<sup>३</sup> अथवा अ<sup>३</sup>अ, यांत व मध्ये जितके एक आहेत त्यांहून अधिक वेळा व<sup>३</sup>हून कांहीं अधिक घेतले आहे, आणि याप्रमाणे पुढेहि. अक्षरांचे क्रम फिरवून, दुसऱ्या शब्दांनीं सिद्धांत सांगतां येईल; जसें, जर अपेशां व कमी आहे, तर अ<sup>३</sup>पेशां व<sup>३</sup> कमी आहे, इत्यादि.

२ सिद्धांत. जर व पेशां अ अधिक आहे, तर व<sup>-१</sup>पेशां अ<sup>-१</sup> आणि व<sup>-२</sup>पेशां अ<sup>-२</sup> कमी आहेत. कां कीं जर व पेशां अ अधिक आहे, तर  $\frac{1}{v}$  पेशां  $\frac{1}{a}$  कमी होईल; आणि त्यापक्षां, व<sup>२</sup>पेशां अ<sup>२</sup> अधिक आहे, यामुळे  $\frac{1}{v^2}$  पेशां  $\frac{1}{a^2}$  कमी आहे, आणि याप्रमाणे पुढेहि. साच सारिले, जर व पेशां अ कमी असेल, तर व<sup>-१</sup>पेशां अ<sup>-१</sup> अधिक आहे. इत्यादि.

\* शिकणारानें ध्यानांत आणावें, कीं  $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$  आणि  $\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$ , या दोहोंची घालमेल न होई असें संभाव्य, मित्र मित्र अर्थ मनांत आणतां येतील. परंतु  $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$  आणि  $\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$  हे कोठे कोठे मित्र मित्र वाचणे आहेत, अशी कल्पना करण्यास अडचण पडेल.



३ सिद्धांत. जर बचे बरोबर असेल, तर ब<sup>३</sup> याचे बरोबर अ<sup>३</sup> आहे, आणि ब<sup>३</sup> याचे बरोबर अ<sup>३</sup> आहे, आणि याप्रमाणें पुढेहि. ही गोष्ट ५३ आणि ५४ पृष्ठांवरून स्पष्ट आहे.

४ सिद्धांत. जर बचे बरोबर अ असेल, तर बचे वर्गमूळा बरोबर अचें वर्गमूळ होईल, आणि बचे घनमूळा बरोबर अचें घनमूळ होईल, आणि याप्रमाणें पुढेहि. ह्मणजे अ आणि ब बरोबर असून, त्यांचें पंच-घातमूळ दाखविण्यासाठीं म आणि न घे, तर म आणि न यांचे पंच-घात अ आणि ब आहेत; जर या दोहोंतून म अधिक असेल, तर, पहिल्या सिद्धांताप्रमाणें, त्याचा पंचघात अ, हा ब पेक्षा अधिक होईल, परंतु एथें तसें नाहीं. त्याच सारिखें, जर दोहोंतून न अधिक असला तर अपेक्षा ब अधिक होईल; याजकरितां न चे बरोबर म खचित् असावा. याचप्रमाणें कोणताहि दुसरा पक्ष सिद्ध करितां येईल.

५ सिद्धांत. जर ब पेक्षा अ अधिक आहे. तर बचे वर्गमूळा-पेक्षा अचें वर्गमूळ अधिक आहे. अचे वर्गमूळाचा वर्ग अ आहे, आणि बचे वर्गमूळाचा वर्ग ब आहे; ह्मणून जर तिसरे सिद्धांताप्रमाणें बचे वर्गमूळा बरोबर अचें वर्गमूळ असेल, तर पहिल्याचा वर्ग अथवा ब, याचे बरोबर दुसऱ्याचा वर्ग अथवा अ होईल, परंतु एथें तसें नाहीं. जर पहिल्या सिद्धांताप्रमाणें बचे वर्गमूळापेक्षा अचें वर्गमूळ कमी असेल, तर पहिल्याचा वर्ग अथवा ब, या पेक्षा दुसऱ्याचा वर्ग अथवा अ कमी होईल; परंतु एथें तसें नाहीं. तर याशिवाय इतकाच संभव राहिला आहे, कीं जेव्हां ब पेक्षा अ अधिक आहे, तेव्हां ब चे वर्गमूळा-पेक्षा अचें वर्गमूळ अधिक आहे. त्याच सारिखें, जर ब पेक्षा अ कमी आहे; तेव्हां बचे वर्गमूळापेक्षा अचें वर्गमूळ कमी आहे. आणि याप्रमाणें पुढेहि.

६ सिद्धांत. अंकगणितरूप परिमाणाला अंकगणितरूप वर्गमूळ किंवा घनमूळ किंवा दुसरे कोणतें मूळ एकच आहे. कां कीं शक्य असेल, तर अ ला म आणि न हीं दोन निरनिराळीं घनमूळे आहेत अशी कल्पना कर; या दोहोंतून एक अधिक असावें, तें म असो. तेव्हां, १. सिद्धांताप्रमाणें नचा घन अथवा अ यापेक्षा मचा घन अथवा अ

अधिक आहे; परंतु असें झणणें हें विरुद्ध आहे, याजकरितां अला दोन निरनिराळीं घन इत्यादि मूळें होऊं शकत नाहींत.

सर्व पूर्णांकांचीं वर्गमूळें किंवा घनमूळें, पूर्णांक नाहींत; आणि जस-जसा मूळप्रकाशकांचा क्रम वाढतो, तसतसा कांहीं सांगितलेल्या मर्यादेमध्ये जांस अशे जातीचे मूळ आहे त्या मूळांतील पूर्णांक कमी कमी होत जातात. ही गोष्ट या पुढील कोष्टकावरून दिसेल,

अंक जांस पूर्णांक					
वर्ग मूळ	घन मूळ	चतुर्घात मूळ	पंचघात मूळ	षडघात मूळ	मूळांची किंमत
१	१	१	१	१	१
४	८	१६	३२	६४	२
९	२७	८१	२४३	७२९	३
१६	६४	२५६	१०२४	४०९६	४
२५	१२५	६२५	३१२५	१५६२५	५
३६	२१६	१२९६	७७७६	४६६५६	६
४९	३४३	२४०१	१६८०७	११७६४९	७
६४	५१२	४०९६	३२७६८	२६२१४४	८
८१	७२९	६५६१	५९०४९	५३१४४१	९
१००	१०००	१००००	१०००००	१००००००	१०
इत्यादि	इ०	इ०	इ०	इ०	

जा अंकास पूर्णमूळ नाहीं, त्यास बरोबर अपूर्णाकमूळहि नाहीं; सद्यः, सिद्ध केल्यावांचून, ही पुढील प्रतिज्ञा सांगतो; त्याचे विरुद्ध असेल तें शोधून पहाण्यासाठीं शिकणारावर ठेवितों.

अपूर्णाकाचा\* कोणताहि घात किंवा कोणतेंहि मूळ पूर्णांक होऊं शकत नाहीं.

जा कृयांत अंकाचें मूळ काढावयाचें असतें, तो अंक त्या मूळासुद्धां

\* झणजे जा अपूर्णाकाची किंमत केवळ पूर्णांक नाहीं, त्याच अपूर्णाकाविषयीं ही गोष्ट आहे; कां कीं ३, ११, इत्यादि यांस जरी अपूर्णाकाचें रूप आहे, तथापि ते पूर्णांक आहेत.

अनंतपर्यंत वाढविलेल्या वरचा कोष्टकांतील असला, तर तें कृस खरे कल्पनेचें आहे ; याशिवाय जांत अंकांचीं मूळें काढावयाचीं असतात, अशीं अंकगणिताचीं आणि बीजगणिताचीं सर्व कृस खोल्या कल्पनेचीं आहेत. परंतु जरी अशे तऱ्हेचे कृसांचें बरोबर निःशेष उलगडणें होत नाहीं, तरी इच्छेप्रमाणें खरे उत्तराचे जवळ जवळ मूळें काढावयाचा रिती आहेत, हें दाखवितां येईल ; झणून, हा पुढील सिद्धांत स्थापिला आहे.

जरी असा कांहीं अपूर्णाक नाहीं, कीं जाचा न घात कांहीं सांगितले पूर्णाकाचे बरोबर आहे, तरी असा अपूर्णाक कल्पून घेतां येईल कीं जाचा न घात आणि त्या सांगितल्या पूर्णाकाचें अंतर, कोणत्याहि सांगितलेल्या परिमाणापेक्षां कमी होईल, झणजे ०००१ अथवा ००००००१, अथवा दुसऱ्या कोणत्याहि लहान अपूर्णाकापेक्षां कमी होईल.

पहा. अशे तऱ्हेचा अपूर्णाक काढायला कोणती रीति सोईस पडेल हें एथें सांगण्याचें प्रयोजन नाहीं, परंतु तें काढतां येतें ही गोष्ट मात्र सिद्ध करून दाखवायाची आहे. वर्गमूळ आणि घनमूळ यांविषयीं ही गोष्ट अंकगणितांत सांगितली आहे. याचा ताळा सिद्ध करायासाठीं कांहीं विस्तारानें सांगितलें पाहिजे, तर हे पुढील लेम्मे\* स्थापितों.

१ लेम्मा. दोन या अंकाचे घात एक मिळवणीनें होतात ; जसें,

$$२+२ = २^२ \quad २^२+२^२ = २^३ \quad २^३+२^३ = २^४$$

$$\text{अथवा सामान्यतः} \quad २^n + २^n = २^n \times २ = २^{n+१}$$

२ लेम्मा. अपूर्णाकाचा, अंशाचे आणि छेदाचे घातापासून त्या अपूर्णाकाचे घात होतात ; जसें,

$$\left(\frac{अ}{ब}\right)^३ = \frac{अ}{ब} \times \frac{अ}{ब} \times \frac{अ}{ब} = \frac{अअअ}{बबब} = \frac{अ^३}{ब^३}$$

\* लेम्मा झणजे, प्रतिज्ञा आहे जी दुसऱ्या कहीं प्रतिज्ञेचा ताळा सिद्ध करायास साधनासाठीं कामांत घेतात.

३ लेम्मा. जर क पेक्षां प कमी असेल, तर अक पेक्षां अप कमी होईल. जर क पेक्षां प कमी असेल, आणि ब पेक्षां अ कमी असेल, तर बक पेक्षां अप कमी होईल.

४ लेम्मा. जर एकमापेक्षां वि कमी असेल, तर तिचे घात पदोपदीं घटत जातात. उदाहरण, जर वि एक द्वितीयांश असेल, तर तिचा वर्ग  $(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2})$  ह्मणजे एक द्वितीयांशाचा द्वितीयांश हा वि पेक्षां कमी आहे; तिचा घन एक चतुर्थीशाचा द्वितीयांश आहे, ह्मणजे हा वि<sup>३</sup> पेक्षां कमी आहे; आणि याप्रमाणें पुढेंहि.

५ लेम्मा. जर कांहीं पद्धतीचा घन पदांतील एक पद अधिक केलें असतां, ती सर्व पद्धति अधिक होती, इत्यादि. जसें, अ-ब ह्या पद्धतींत अ अधिक केला असतां ती अधिक होईल, आणि अ कमी केला असतां कमी होईल; परंतु ब अधिक केला असतां ही पद्धति कमी होईल, आणि ब कमी केला असतां अधिक होईल.

६ लेम्मा. जर १ पेक्षां वि कमी असेल, तर

$(१+वि)^२$  ही पद्धति,  $१+३वि$  अथवा  $१+(४-१)वि$  यापेक्षां कमी आहे  
 $(१+वि)^३$  ही,  $१+७वि$  अथवा  $१+(८-१)वि$  हिजपेक्षां कमी आहे  
 $(१+वि)^४$  ही,  $१+१५वि$  अथवा  $१+(१६-१)वि$  हिजपेक्षां कमी आहे

अथवा  $(१+वि)^५$  ही,  $१+(२५-१)वि$  हिजपेक्षां कमी आहे  
 पहिल्यानें  $(१+वि)^३$  अथवा  $(१+वि)(१+वि) = १+२वि+वि^२$ ;

४ लेम्मा वरून वि<sup>३</sup> पेक्षां वि अधिक आहे, तर वि<sup>३</sup> चे स्थळीं वि मांडिली असतां ५ लेम्मा प्रमाणें ती पद्धति अधिक होती. परंतु असें केल्यानें ती याप्रमाणें होती,  $१+२वि+वि$  अथवा  $१+३वि$ . यामुळे  $१+२वि+वि^३$  ही  $१+३वि$  हिजपेक्षां कमी आहे; ह्मणजे,  $(१+वि)^३$  ही  $१+३वि$  हिजपेक्षां कमी आहे.

पुनः  $(१+वि)^३$  ही,  $१+३वि$  पेशां कमी आहे

तर ३ लेम्मा वरून  $(१+वि)^३ (१+वि)$  ही,  $(१+३वि)(१+वि)$  हिजपेशां कमी आहे

अथवा  $(१+वि)^३$  ही,  $१+४वि+३वि^२$  हिजपेशां कमी आहे

आणि पूर्वीप्रमाणें ४ आणि ५ लेम्मावरून  $(१+वि)^३$  ही  $१+४वि+३वि$  अथवा  $१+७वि$  हिजपेशां फार कमी असावी.

पुनः  $(१+वि)^३$  ही,  $१+७वि$  पेशां कमी आहे

यामुळें  $(१+वि)^४$  ही,  $(१+७वि)(१+वि)$  } यांजपेशां कमी आहे  
अथवा  $१+८वि+७वि^२$  }

$(१+वि)^४$  ही,  $१+८वि+७वि$  } यांजपेशां फार कमी असावी  
अथवा  $१+१५वि$  }

याप्रमाणें हवे तितके क्रमक्रमानें पुढें चालतां येईल, परंतु खाली लिहिलेली सिद्धता अशे तऱ्हेची आहे, कीं तिजमध्ये सर्व विषय येतात. वरचा पद्धतीतून एक खरी आहे असें मनांत आणून जीमध्ये न घात आहे ती खरी असें ह्मण; ह्मणजे याप्रमाणें असावें.

$(१+वि)^n$  ही,  $१+(२^n-१)वि$  हिजपेशां कमी आहे

तर ३ लेम्मावरून  $(१+वि)^n (१+वि)$  ही,  $\{१+(२^n-१)वि\}(१+वि)$  हिजपेशां कमी आहे वरचा गुणांकार याप्रमाणें होईल;

$$\begin{array}{r} १+(२^n-१)वि \\ १+ \quad \quad \quad वि \\ \hline १+(२^n-१)वि \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad वि+(२^n-१)वि^२ \end{array}$$

बेरीज

$$\begin{array}{r} १+२^nवि \quad \quad \quad + (२^n-१)वि^२ \end{array}$$

अथवा  $(१+वि)^{n+१}$  ही,  $१+२^nवि+(२^n-१)वि^२$  यापेशां कमी आहे

तर ४ आणि ५ लेम्मा }  $1 + वि^{n+1}$  ही  $1 + 2^n वि + (2^n - 1) वि$  यांजपेक्षा  
 वरून } ही फार  
 अथवा  $1 + (2^n + 2^n - 1) वि$  कमी अ-  
 अथवा १ लेम्मावरून  $1 + (2^{n+1} - 1) वि$  सावी.

यावरून सिद्ध झालें कीं

जर  $(1 + वि)^n$  ही,  $1 + (2^n - 1) वि$  हिजपेक्षां कमी आहे  
 तर असा निश्चय होतो, कीं  $(1 + वि)^{n+1}$  ही,  $1 + (2^{n+1} - 1) वि$  हिज  
 पेक्षां कमी आहे,  
 अथवा या लेम्मांतल्ये वेगवेगळे सांगितलेले प्रतिज्ञेचे क्रमांतून जर एक  
 प्रतिज्ञा खरी आहे, तर दुसरी प्रत्येक प्रतिज्ञा खरी असावी. परंतु पहिली  
 प्रतिज्ञा सिद्ध झाली, यामुळे बाकीचा सर्व सिद्ध झाल्या.

७ लेम्मा. जर अपेक्षां क्ष अधिक असेल, तर

$(क्ष + अ)^3$  ही  $क्ष^3 + ३$  अक्ष अथवा  $क्ष + (४ - १) अक्ष^2$  हिजपेक्षां कमी आहे  
 $(क्ष + अ)^3$  ही  $क्ष^3 + ७$  अक्ष^2 अथवा  $क्ष^3 + (८ - १) अक्ष^2$  हिजपेक्षां कमी आहे  
 $(क्ष + अ)^3$  ही  $क्ष^3 + १५$  अक्ष^2 अथवा  $क्ष^3 + (१६ - १) अक्ष^2$  हिजपेक्षां कमी आहे

.....  
 अथवा  $(क्ष + अ)^n$  ही  $क्ष^n + (2^n - 1) अक्ष^{n-1}$  . . . हिजपेक्षां कमी आहे  
 अपेक्षां क्ष मोठा आहे, यामुळे  $\frac{अ}{क्ष}$  हा १ पेक्षां कमी आहे; यामुळे,

६ लेम्मावरून

$(1 + \frac{अ}{क्ष})^n$  ही  $1 + (2^n - 1) \frac{अ}{क्ष}$  हिजपेक्षां कमी आहे  
 परंतु  $1 + \frac{अ}{क्ष} = \frac{क्ष + अ}{क्ष} \therefore २$  लेम्मा वरून  $(1 + \frac{अ}{क्ष})^n = \frac{(क्ष + अ)^n}{क्ष^n}$   
 यामुळे  $\frac{(क्ष + अ)^n}{क्ष^n}$  ही  $1 + (2^n - 1) \frac{अ}{क्ष}$  हिजपेक्षां कमी आहे  
 दोन्ही बाजू क्ष^n याणें गुण; तर ३ लेम्मा वरून याप्रमाणें होईल,

$(क्ष+अ)^n$  ही क्ष<sup>n</sup> +  $(२^n-१)अक्ष^{n-१}$  } यांजपेक्षां कमी आहे  
 अथवा  $(क्ष+अ)^n$  ही क्ष<sup>n</sup> +  $(२^n-१)अक्ष^{n-१}$

१८१ पृष्ठावरची प्रतिज्ञा एका विशेष पक्षाला लावून सांगतो. १० हा अंक घेतला असें ह्मण, आणि घन हा सांगितला घात आहे असें मनांत आण. तर असा कांहीं अपूर्णाक काढितां येईल कीं जाचा घन १० यांचे आंत ००००१ इतके अंतरानें होईल?  $(२)^३=८$ , आणि  $(३)^३=२७$ , तर २ कमी आहेत आणि ३ अधिक आहेत असें दिसते. तर २ आणि ३ यांचे मधील २.१, २.२, २.३, इत्यादि या अपूर्णाकांचे घन तपासून पहा.  $(२.१)^३=९.२६१$ , आणि  $(२.२)^३=१०.६४८$ ; यांत २.१ हे कमी आहेत, आणि २.२ हे अधिक आहेत. आतां २.१ आणि २.२ यांचे मधले २.११, २.१२, २.१३, इत्यादि या अपूर्णाकांचे घन तपासून पहा. तर हें कळतें कीं

$(२.१५)^३=९.९३८३७५$      $(२.१६)^३=१०.०७७६९६$   
 यमुळें २.१५ कमी आहेत, आणि २.१६ अधिक आहेत.

याप्रमाणें पुढें चाललें असतां, हें कळेल, कीं

$(२.१५४)^३$  हे १० पेक्षां कमी आहेत.     $(२.१५५)^३$  हे १० पेक्षां अधिक आहेत

$(२.१५४४)^३$  हे १० पेक्षां . . .     $(२.१५४५)^३$  हे १० पेक्षां . . . .  
 $(२.१५४४३)^३$  हे १० पेक्षां . . .     $(२.१५४४४)^३$  हे १० पेक्षां . . . .

इत्यादि.

इत्यादि.

अशे रितीनें दोन अपूर्णाक काढितां येतील, कीं जांतून एकाचा घन १० पेक्षां कमी आणि दुसऱ्याचा घन १० पेक्षां अधिक होईल, परंतु ते दोनही घन १० चा इतके जवळ असावे, कीं त्या घनांचे आणि १० चें अंतर ००००१ इतकें होईल, हा मात्र प्रश्न करावयाचा राहिला आहे. वरचे क्रमांतून हें पहा कीं

२२ हे २१ यांपेक्षां केवळ १ इतक्याने अधिक आहेत.  
 २१६ हे २१५ यांपेक्षां ० ०१ इतक्याने अ०  
 २१५५ हे २१५४ यांपेक्षां ० ००१ इतक्याने अ०  
 २१५४५ हे २१५४४ यांपेक्षां ० ०००१ इतक्याने अ०  
 इत्यादि. इत्यादि. इत्यादि.

आणि ७ वे लेम्मा वरून जर क्ष पेक्षां अ कमी असेल, तर

(क्ष+अ)<sup>३</sup> ही क्ष<sup>३</sup>+७अक्ष<sup>२</sup> यांपेक्षां कमी आहे  
 अथवा (क्ष+अ)<sup>३</sup>-क्ष<sup>३</sup> ही ७अक्ष<sup>२</sup> यांपेक्षां कमी आहे

वरचे क्रमांतील अपूर्णाकांतून एक कमी अपूर्णाक दाखविण्यासाठी  
 क्ष घे; तर १० पेक्षां क्ष<sup>३</sup> कमी आहे ह्यापुढे क्ष हा ३ पेक्षां कमी असावा,  
 आणि त्याचा वर्ग ही ९ पेक्षां कमी असावा. यामुळे ७अक्ष<sup>२</sup> हे  
 ७अ×९, अथवा ६३अ या पेक्षां कमी असावे. आणि (क्ष+अ)<sup>३</sup>-क्ष<sup>३</sup>  
 ही ७अक्ष<sup>२</sup> पेक्षां कमी आहे यावरून ६३अ पेक्षां फारच कमी असावी.  
 वरचे अधिक अपूर्णाक दाखविण्यासाठी क्ष+अ घे; तर यांचे अंतर अ,  
 कृतीचा क्रम पुढे चालविला असता, ००००००१ इतके होईल, यामुळे,  
 ६३अ हे ००००००६३ हे ०००००१ या पेक्षां कमी आहेत. यामुळे  
 क्षची किंमत अशी निघेल, की

क्ष<sup>३</sup> हा १० पेक्षां कमी आहे (क्ष+००००००१)<sup>३</sup> ही १० पेक्षां  
 अधिक आहे

आणि (क्ष+००००००१)<sup>३</sup>-क्ष<sup>३</sup> ही ००००१ हिजपेक्षां कमी  
 आहे.

परंतु १० हे त्या दोन घनांचे मध्ये आहेत, ह्यापुढे १० यांशी जीं  
 दोन निरनिराळ्या घनांचीं अंतरं आहेत, तीं त्या दोन घनांचे अंतरा-  
 पेक्षां कमी होतील; यामुळे त्यांतून कोणताहि अपूर्णाक घेतला, तर त्या-  
 चा घन शिछिल्याप्रमाणे १० चे अवळ होईल. शिछिलेले अपूर्णाक



काढिले असतां याप्रमाणें होतील, २१५४४३४६ आणि २१५४४-३४७. तसेच रितीनें दुसरे पक्ष उलगडतील

यावरून, या पुढीलप्रमाणें बोलण्याची तऱ्हा कामांत आणावी लागती. १० यांस पूर्ण घनमूळ नाही, असें ह्मणण्याबद्दल याप्रमाणें ह्मटलें पाहिजे, कीं जा अपूर्णाकाचे घन इच्छेप्रमाणें १० चे जवळ जवळ येतील असे अपूर्णाक काढितां येतील, आणि  $\sqrt[3]{१०}$  हे पूर्ण घनमूळ असें जाणून, त्या अपूर्णाकांस १० चे घनमूळाचा जवळचे आहेत असें ह्मणतात. ह्मणजे, (२१५४४३४६)<sup>३</sup> हे १० चा बरोबरीस जितके जवळ आहेत तितके (२१५४)<sup>३</sup> हे नाहीत, असें ह्मणण्याबद्दल, २१५४४३४६ हे जितके १० चा घनमूळा जवळचे आहेत तितके २१५४ हे नाहीत असें ह्मणतात.

हे पुढील शब्द जा अर्थानें कामांत घेतात त्यांचा तो अर्थ आतां शिकणारास समजेल;

प्रत्येक पूर्णाकास आणि अपूर्णाकास अगदी बरोबरीचें किंवा जवळचें या दोहोंतून एक तरी मूळ असतें.

$\sqrt[3]{अ}$  यांत अ=१० घे, तर अ<sup>३</sup> = १००००००. आतां,  $\sqrt[3]{अ} \times \sqrt[3]{अ} = \sqrt[3]{अ}$  हे सर्व पक्षीं सिद्ध केल्यावर आणि अची किंमत वरप्रमाणें असली, तर या समीकरणावरून काय अर्थ समजावा ! हाच अर्थ समजावा कीं दोन अपूर्णाक निघतील जांचे वर्ग आणि घन इच्छेप्रमाणें १० चे जवळ जवळ होतील, ह्मणजे ०००१ इतके जवळ आहेत असें ह्मण. तर असे अपूर्णाकांस  $\sqrt[3]{१०}$  आणि  $\sqrt[3]{१०}$  यांचा जवळचा किंमती असें ह्मणतां येईल, आणि हे दोन अपूर्णाक परस्पर गुणिले असतां, जो गुणाकार होईल, त्याचा षड्घात केला असतां, तो १०<sup>३</sup> यांचे तितकाच जवळ जवळ येईल, अथवा  $\sqrt[3]{१०}$  यांचे जवळचे किंमतीचा होईल. या दोन प्रतिज्ञांचा ताळा अगोदरच अनुमानांत घेतों, कारण कीं शुद्ध प्रतिज्ञेप्र-

सून जवळ जवळचे प्रतिज्ञेत जावयाचे रितीचें एक उदाहरण सांगीतल्यानें तें सर्वांस लागू पडेल.

मनांत आण कीं अ असा कांहीं अंक आहे कीं जाला निःशेष वर्गमूळ आणि घनमूळ हीं दोन्हीं आहेत, जसें ६४, अथवा  $\frac{1}{27}$ . त्याचें वर्गमूळ दाखवायासाठीं क्ष घे, आणि घनमूळ दाखवायासाठीं य घे. तर

$$\begin{aligned} \text{क्ष}^2 &= \text{अ यामुळे } (\text{क्ष}^2)^3 = \text{अ}^3 \text{ अथवा } \text{क्ष}^2 \cdot \text{क्ष}^2 \cdot \text{क्ष}^2 = \text{अ}^3 \text{ अथवा } \text{क्ष}^6 = \text{अ}^3, \\ \text{य}^3 &= \text{अ यामुळे } (\text{य}^3)^2 = \text{अ}^2 \text{ अथवा } \text{य}^3 \cdot \text{य}^3 = \text{अ}^2 \text{ अथवा } \text{य}^6 = \text{अ}^2 \\ \therefore \text{क्ष}^2 \text{य}^3 &= \text{अ}^3 \text{अ}^2 \text{ अथवा } (\text{क्षय})^6 = \text{अ}^5 \end{aligned}$$

कां कीं क्ष<sup>२</sup>य<sup>३</sup> हे क्षक्षक्षक्षक्षययययय, ह्यासारखेच आहेत, आणि त्यांचा गुणाकार या क्रमानें होईल

$$\text{क्षय} \cdot \text{क्षय} \cdot \text{क्षय} \cdot \text{क्षय} \cdot \text{क्षय} \cdot \text{क्षय} = (\text{क्षय})^6$$

यामुळे, क्षय हें अ<sup>५</sup> याचें षड्घातमूळ आहे; परंतु क्ष हा अचें वर्गमूळ आहे, आणि य त्याचें घनमूळ आहे, ह्मणजे,

$$\text{क्षय} = \sqrt[6]{\text{अ}^5} \text{ किंवा } \sqrt{\text{अ}} \times \sqrt[3]{\text{अ}} = \sqrt[6]{\text{अ}^5}$$

आतां मनांत आण कीं अ असा कांहीं अंक आहे कीं जाला निःशेष वर्गमूळ आणि घनमूळ नाही, जसें १०. क्ष आणि य असे अपूर्णांक काढितां येतील, कीं क्ष<sup>२</sup> आणि य<sup>३</sup> हे अचे जवळ जवळ इच्छेप्रमाणें होतील. मनांत आण, कीं क्ष<sup>२</sup> = अ + प आणि य<sup>३</sup> = अ + क ह्मणजे प आणि क इच्छेस येईल तितके लहान\* होतील. अपेक्षां प आणि क

इच्छेस येईल तितके लहान होतील, ह्मणजे त्यांचा लहानपणा कांहीं विशेष किमतीचा आहे, असा अर्थ नाही. परंतु अर्थ हाच कीं कसाहि लहान अपूर्णांक घेतला तरी त्यापेक्षा हि कमी वेता येईल.

हे कमी आहेत असे आरंभीं कल्पितो. तर ७ वे लेम्मावरून,

$(अ+प)^३$  ही  $अ^३+७पअ^२$  यापेक्षां कमी आहे

$(अ+क)^३$  ही  $अ^३+३कअ^२$  यापेक्षां कमी आहे

परंतु  $(क्ष^३)^३$  अथवा  $क्ष^९ = (अ+प)^३$  आणि  $(य^३)^३$  अथवा  $य^९ = (अ+क)^३$   
यामुळे

$क्ष^९$  हा  $अ^३+७पअ^२$  यापेक्षां कमी आहे

$य^९$  हा  $अ^३+३कअ^२$  यापेक्षां कमी आहे

तर ३ लेम्मा वरून  $क्ष^९$   $य^९$  हा  $(अ^३+७पअ^२)(अ^३+३कअ^२)$  यापेक्षां कमी आहे

अथवा  $(क्षय)^९$  हा  $अ^९+अ^२(७प+३क) + २१पकअ^३$  यापेक्षां कमी आहे परंतु  $क्ष^९$  अथवा  $अ+प$  हा अपेक्षां अधिक आहे, यामुळे  $क्ष^९$  हा  $अ^९$  पेक्षां अधिक आहे; आणि  $य^९$  अथवा  $अ+क$  हा अपेक्षां अधिक आहे, यामुळे  $य^९$  हा  $अ^९$  पेक्षां अधिक आहे; तर  $क्ष^९$   $य^९$  अथवा  $(क्षय)^९$  हा  $अ^९$  अथवा  $अ^९$  यापेक्षां अधिक आहे. यावरून,

$(क्षय)^९$  हा  $अ^९$  याचे आणि  $अ^९+अ^२(७प+३क) + २१पकअ^३$  यांचे कोठे तरी मध्ये आहे यामुळे त्याची किंमत  $अ^९$  हून,  $अ^२(७प+३क) + २१पकअ^३$  इतक्यानें भिन्न नाहीं.

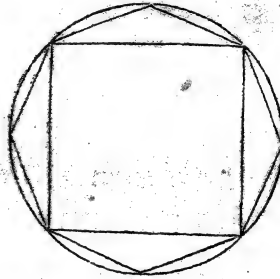
वरचे पद्धतीमध्ये  $अ^९$  आणि  $अ^९$  हे कितीही मोठे\* असतील, तरी प आणि क इच्छेस येईल तितके लहान होतील, तर  $७प+३क$  आणि  $२१पक$  हेहि इच्छेस येईल तितके लहान होतील, यामुळे ती वरची

\* न आणि म यांतून जर न कोहीं दिलेले परिमाण असेल, आणि जर इच्छेस येईल इतका लहान म घेता येईल, तर मन हा गुणाकार इच्छेस येईल तितका लहान करिता येईल; परंतु हे मात्र मनांत ठेविलें पाहिजे कीं गुणाकाराला इच्छिलेल्या लहानपणा देण्याकरितां, जितका न मोठा असेल तितका लहान म घ्यावा.

पद्धति इच्छेस येईल तितकी लहान करितां येईल. ह्यणजे, (क्षय) हा अ याचे इच्छेस येईल तितका जवळ करितां येईल, अथवा क्षय हा अ'चे षड्घातमूळाचा जवळचा आहे.

बीजगणिताचे पुस्तकामध्ये वरची सिद्धता बहुतकरून लिहून दाखवीत नाही, परंतु जास क्रमनियम ह्यणतात, त्यांत वरचे उत्तर खरे मानून घेतात. क्रमनियम या शब्दाचा अर्थ सांगतो, कां कीं त्यांत शिकणाराचे उपयोगी असे बहुत विषय आहेत; परंतु तो क्रमनियम शिकणाराने सोडून दिला, तरी या प्रकारणाचे अनुसंधान सुटत नाही, यामुळे याविषयीचा गोष्टी बारीक अक्षरांनी पुढे लिहितो, आणि या विषयाचे सूचक नाम पृष्ठाचे वर तसेच मांडितो.

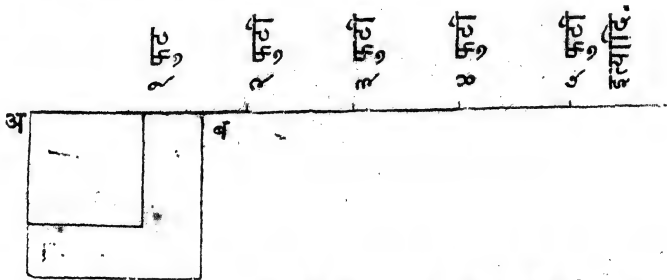
क्रमशः आणि आकस्मिक क्रम न सुटतां हे दोनहि शब्द सारिखे अर्थाचे आहेत. उदाहरण, असे मनांत आण, कीं एक चौरस आहे, जाचा दोन समांतर बाजू उत्तर आणि दक्षिण दिशेंत आहेत. जो कोणी पुरुष असे चौरसाची प्रदक्षिणा करील त्यास प्रत्येक कोनावरून पुढें चालते समयी एक वर्तुळपाद फिरावें लागतें, ह्यणजे जेव्हां तो उत्तर किंवा दक्षिण दिशेस चालतो, तेव्हां कांहीं मधल्ये दिशेंत न चालतां एकदांच पूर्वेकडे किंवा पश्चिमेकडे फिरतो, आणि पूर्वं किंवा पश्चिमेकडे चालतो तेव्हां त्याचे उलटें घडतें. यापक्षी त्याची दिशा क्रमभेदानें बदलती. जरि त्या आकृतीला आठ बाजू असल्या, तरी त्याची दिशा क्रमभेदानें पालटेल. परंतु तो पालट पूर्वीपेक्षां कमी होईल; त्या आकृतीला सोळा बाजू असल्यास कोनावरचे पालट पूर्वी पेक्षाहि कमी होतील, आणि याप्रमाणें पुढेहि.



परंतु वर्तुळाचे किंवा दीर्घवर्तुळाचे भोंवती प्रदक्षिणा केली, तर दिशाभेदक्रम सुटत नाही. जर भूमितीचा वर्तुळा भोंवती भूमितीचा बिंदू प्रदक्षिणा करितो, तर तो बिंदू चालत असता त्याचें गमन अमुक दिशेत झालें नाहीं अशी दिशा कल्पवत नाहीं; आणि कोणत्याहि दोन बिंदूंचे मध्येच जर चालत आहे तर त्या दोन बिंदूंचा दिशेमधल्या सर्व दिशांत त्याचें गमन होईल.

भूमितीपासून वरचें उदाहरण दृष्टांतार्थ घेतलें आहे, आणि त्यांत क्रमशः भेद होतो असें कल्पिलें आहे; आणि या कल्पनेस कांहीं विरोध येत नाहीं, परंतु जेव्हां अशी कल्पना करितों, कीं बिंदूचे गती पासून रेखा उत्पन्न होतात, तेव्हां वरची भूमितीची कल्पनाहि नीट दिसती. परंतु अंकगणीत, आणि नंतर बीजगणित हीं दोन्ही भूमितीला लागू केलीं असतां, हेंच विचारायाचें राहिलें, कीं भूमितीचीं सर्व परिमाणें अंकगणितरितीने दाखवितां येतील कीं काय? उदाहरण, अ पासून निघून ब सरळ रेषेंत शंभर फुटीपर्यंत चालतो अशी कल्पना कर, तर जा अनंत बिंदू-वरून ब चालतो त्यांतील जा प्रत्येक बिंदूवरून अ पासून ब चालला त्या प्रत्येक बिंदूचें अंतर फुटी आणि फुटीचे अपूर्णांक यांचे सहाय्यानें दाखवितां येईल कीं काय?

स्पष्ट आहे कीं एक आणि दोन फुटींचे मध्ये हे पुढील अपूर्णांक येतील. द्व्यणजे १.१, १.२, १.३, इत्यादि फुट; १.१ आणि १.२ फुटीमध्ये हे अपूर्णांक येतील द्व्यणजे, १.११, १.१२, १.१३, इत्यादि फुट; १.११ आणि १.१२ फुटीमध्ये हे अपूर्णांक येतील, द्व्यणजे १.१११, १.११२, १.११३, इत्यादि फुट; आणि याप्रमाणें अनंत\* पावेतों होईल. परंतु अ पासून १ आणि २ फुटीमध्ये ब ची कांहीं भूमितिरूप स्थिती नेमिली असतां, ती स्थिति केवळ बरोबर दाखविण्यासाठीं १ फुट आणि एक फुटीचा अपूर्णांक अशांनें ती स्थिति बरोबर दाखवितां येणार, नाहीं. आतां जी स्थिति भूमितीने नेमितां येईल, परंतु अंक गणितानें नेमितां येणार नाहीं अशी दाखवितों.



वरचे आकृतीप्रमाणें अब रेषेवरचें चौरस १ फुटीचे चौरसाचे दुप्पट होण्या साठीं ब ची स्थिती कोठे असावी, याचा नेम भूमितीमध्ये भूमितिकृत्यानें दाखविला

\* शिकणारानें मनांत आणावें, कीं अनंत पावेतों असें झटलें असतां अर्थ हाच, कीं इच्छित्या पावेतों.

आहे परंतु अंकगणितानें दाखविला नाहीं. एक फुट दाखविण्यासाठी १ घे; आतां वर सांगितलेल्यापक्षां अब रेघेला कांहीं अंकगणितरूपाचें परिमाण नेमितां, येईल कीं नाहीं, याचा विचार करितों. फुटीचा मत्त्येक अपूर्णाकास असें अपूर्णाकरूप देतां येईल, कीं त्याचे अंश आणि छेद पूर्णांक होतील, यावरून जर अब रेघेला अंकगणित परिमाण नेमितां येईल, तर अब रेघ म फुट आहे, आणि म आणि न पूर्णांक आहेत असें मनांत आण. द्वयजे एक किंवा अधिक फुटी न समभागांत भागून, त्या भागांतून म भाग घेतले अशाने अब रेघ झाली असें मनांत आण. या फुटीचा एक न भागास, सोईसाठी, भागाचा भाग द्वयजे; तेव्हां एक फुटीमध्ये न भागाचे भाग आहेत, आणि अब मध्ये म भागाचे भाग आहेत. तेव्हां फुटीचे रेघेवरचे चौरसामध्ये भागाचे भागाचीं चौरसें  $n \times n$  इतकीं आहेत, आणि अब रेघेचे चौरसामध्ये  $m \times m$  इतकीं त्याच जातीचीं चौरसें आहेत. यावरून, अब रेघेवरचे चौरस एक फुट रेघेवरचे चौरसाचे दुप्पट आहे, तर याप्रमाणें असावे.

$$मम = २नन$$

आतां म आणि न हे पूर्णांक असावे या संकेतानें हें समीकरण शक्य नाहीं असें दाखवितों. न पूर्णांक आहे, द्वयजून नन पूर्णांक आहे, आणि २नन पूर्णांकाची दुप्पट आहे, आणि यामुळे तो सम अंक आहे; परंतु नन चे दुप्पटी बराबर मम आहे, यामुळे ममही सम आहे. द्वयजून नुसता म हिं सम आहे, कां कीं विषम अंक त्याणें तोच गुणिला असतां विषम अंक होतो. परंतु जर म सम आहे, तर त्याचें अर्ध पूर्णांक होईल; तर तें अर्ध दाखविण्यासाठी म घे, तेव्हां  $म = २म'$  मची ही किंमत वरचे समीकरणांत मचे स्थळीं मांड, तर याप्रमाणें होईल

$$२म' \times २म' = नन$$

$$४म'म' = २नन \text{ अथवा } २म'म' = नन$$

न सम अंक असावा हें दाखविण्याकरितां, वरचे समीकरण  $नन = २म'म'$  तसेच रितीनें कामांत घेतां येईल. नचें अर्ध न पूर्णांक आहे असें मनांत आण, तर  $न = २न'$  आणि ही किंमत समीकरणांत नचे स्थळीं मांडित्याने याप्रमाणें होतें

$$२न' \times २न' = २म'म'$$

$$४न'न' = २म'म' \text{ अथवा } २न'न' = म'म'$$

यावरून पूर्वीप्रमाणें म' सम अंक आहे असें सिद्ध होतें. म आणि न हे पूर्णांक असून  $मम = २नन$  हें समीकरण खरें आहे असें दाखविण्याविषयीं हे पुढील अंक निरंतर पूर्णांक, असले पाहिजेत

म (म' द्वयजे मचें अर्ध)

(म' द्वयजे म'चें अर्ध) इत्यादि

न (न' द्वयजे नचें अर्ध)

(न' द्वयजे न'चें अर्ध) इत्यादि

परंतु असें होण्यास अशक्य आहे; कां की काहीं अंकांचें अर्ध केलें आणि त्या अर्धांचें अर्ध याप्रमाणें पुढें करित गेलें असतां शेवटीं १ हून कमी असा काहीं अपूर्णांक येईल. यामुळे, कोणत्याहि पूर्णांकाविषयीं मम = २नन हें समीकरण खरें नाहीं, आणि त्यावरून अब रेघ  $\frac{म}{न}$  या अपूर्णांकानें दाखवितां येत नाहीं.

जर वरचें समीकरण खरें असें मानिलें, तर त्यापासून याप्रमाणें होईल,  
 $\frac{मम}{नन} = २$  अथवा  $\frac{म}{न} \times \frac{म}{न} = २$  अथवा क्षक्ष = २ यांत क्ष =  $\frac{म}{न}$  आहे.

१८५ पृष्ठाप्रमाणें क्षक्ष = २ हें समीकरण या अर्थाने मात्र स्वीकारितां येतें; कीं, काहीं एक लहान अपूर्णांक घेऊन क्षची काहीं किंमत काढितां येईल, जिचा योगाने क्षक्ष हे २ पेक्षां त्या अपूर्णांकानें कमी होतील. द्वाणजे

क्षक्ष - २ = ० हें समीकरण स्थापण्याबद्दल

क्षक्ष - २ = काहीं गणित परिमाण ( ) याहून कमी

असें मात्र स्थापितां येईल. कुंडलीमध्ये इच्छेप्रमाणें कसाही लहान अपूर्णांक मांडितां येईल.

सर्व व्यवहारकामाकरितां वर सांगितलें इतकें पुरे; कां की व्यवहारकामांत जेव्हां बीजगणित लावावें लागतें त्याचा सूक्ष्मपणा मापण्याचे सुयंत्राचें सहाय्य पावलेल्या दृष्टीचा मर्यादेबाहेर, असण्याचें प्रयोजन नाहीं. जो अतिसूक्ष्म रेघ दृष्टीनें पहाण्यास शक्य, तो जर एक इंचाचा दशसहस्रांश असेल, तर ती पुढील समीकरण उलगडण्यासाठीं खचित् सत्यतेचा जवळ जवळ पुरतेपणीं होईल, द्वाणजे

जर क्षक्ष - २ = ० हें समीकरण निश्चित खरें होण्यासाठीं

क्षक्ष - २ = अंकगणितानें एक इंचाचा दशसहस्रांशापेक्षां कमी इतका पुरे

क्षक्ष - २ = ० असें समीकरण जवळ जवळ जें उत्तर स्थापितें तें उत्तर

कदाचित् फार लहान किंवा मोठें असेल; द्वाणजे, क्षक्ष हा २ पेक्षां किंचित् कमी असेल किंवा किंचित् अधिक असेल. १८५, १८६ वें पृष्ठ पहा, त्यांत

क्षक्ष - १० = ० या समीकरणाचा उलगडण्याचा दोन्ही तऱ्हा दाखविल्या आहेत.

यावरून जरी क्ष अथवा  $\sqrt{१०}$  यांस खरी स्थिती नाहीं, तथापि, इच्छेप्रमाणें परस्पर जवळ जवळ होत, असे दोन अपूर्णांक काढितां येतील, ते अ आणि ब हे दोन अपूर्णांक आहेत असें मनांत आण, त्यातून पहिला अ कमी आहे, अथवा अअअ हा १० पेक्षां कमी, आणि दुसरा ब अधिक आहे, अथवा बबब हा १० पेक्षां अधिक; आणि अशा कृतीनें शुद्ध बरोबरीजवळ जाण्यास किंचित् अंतर



रहातें, तर पुढीलप्रमाणें बोलण्याची रीति कामांत घेण्याची चाल आहे; झणजे १० यांस घनमूळ आहे, परंतु तें घनमूळ असममान परिमाण आहे, झणजे समीपतेवांचून काहीं पूर्ण किंवा अपूर्णांकानें बरोबर दाखविलें जात नाही; झणजे;

१/१० यांचे हवा तेवढा जवळ असा अपूर्णांक काढितां येईल.

तथापि हें पुढील विचारायाचें राहिलें; जरी, क्ष-२=० हें समीकरण इच्छे-प्रमाणें जवळ जवळ उलगडलें जातें, तरी त्या जवळ जवळ आलेल्या उत्तरावर अधिक काहीं कृति लावायाची गरज पडेल. अशा काहीं कृती असतील कीं नाहीं आणि जा परिमाणास त्या कृती लाविल्या, त्यांत कितीहि लहान चूक असली ती चूक, आरंभी कशीहि लहान असली तरी तीपासून अशी चूक होती कीं ती कांढा मर्यादेबाहेर कमी होणार नाहीं, असा गुण त्या कृतीत असेल कीं नाहीं? उदाहरण, जेव्हां शिकणारास अंकांचें लाग्रतंम झणजे काय हें समजू लागल्यावर, असें एकादें कृत्य येईल कीं जाचें उत्तर क्षचें लाग्रतंम असेल आणि त्या क्षची किंमत क्ष-२=० या समीकरणांतून काढायाची असेल तर या पुढील दोन प्रतिज्ञेतून शिकणारानें कोणती घ्यावी! त्यांतून एक तरी खरी असावी.

१. क्षची किंमत काढितानां जीं काहीं चूक केली असेल ती चूक क्षचें लाग्रतंम घेतानां इतकी कमी होईल, कीं लाग्रतंमांतील चूक कोणत्याहि सांणीतल्या अपूर्णांकपेक्षां कमी होईल.

२. अंक काढण्यांत कितीहि लहान चूक केली असली तर लाग्रतंमांतली चूक कोणत्याहि दिलेल्या अपूर्णांकपेक्षां अधिक असावी, सांणीतलेला अपूर्णांक ०.०१ हाच आहे असें मनांत आण.

या पुढील सूचनेवांचून वरचा दोन गोष्टींविषयीं काहीं उत्तर देववत नाहीं;

जेव्हां एकादी नवी कृति किंवा नवी पद्धति कामांत आणितात तेव्हां जा कृत्यांत ती कृति येती त्या कृत्याचें उलगडणें जरी केवळ बरोबर होत नाहीं, तरी बरोबरीचे जवळ जवळ येईल असें मानून घेईल नये, परंतु हें प्रत्यक्ष सिद्ध करून दाखवावें.

पूर्वी जा कृती सांगितल्या आहेत, त्यांविषयींची ही वरची गोष्ट शिकणारानें सिद्ध करण्याकडे लक्ष द्यावें. यासाठीं एक उदाहरण विस्तारपूर्वक करून दाखवितों.

$\frac{a+b}{k+d}$  हें काहीं कृत्याचें उत्तर आहे असें मनांत आण. ब आणि इ यांची किं-

\* झणजे १ याचीं काहीं सममान नाहीं; झणजे १ याचे कोणत्याहि भागाचा भागाचे मिळणीनें ती दाखवितो येत नाहीं.



मत काढिते समयी, कांहीं चूक केली आणि ती चूक इच्छेप्रमाणें हवी तितकी लहान आहे असें मनांत आण. अथवा वरचे बोलण्याचे रितीप्रमाणें बब-२=०, आणि इइइ-३=० जाचें उत्तर इच्छेप्रमाणें केवळ जवळ येत अशा दोन समीकरणांत ब आणि इ आहेत असें घे. बचा जवळ जवळचा किमती दाखविण्यासाठीं ब आणि ब घे, त्यांतून ब किमी, आणि ब अधिक; इचा जवळ जवळचा किमती दाखवायासाठीं इ आणि इ घे. तर वरचे पद्धतीमध्ये या जवळचा किमती मांडित्यानें याप्रमाणें होईल,

$$\frac{a+b}{k+i} \text{ आणि } \frac{a+b}{k+i}$$

या दोन पद्धतींस ताडून पाहायासाठीं, पहिलींतून दुसरी वजा कर, झणजे याप्रमाणें होईल,

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{k+i} - \frac{a+b}{k+i} &= \frac{(ak+ai+kb+bi) - (ak+ai+kb+bi)}{kk+ki+ki+ii} \\ &= \frac{a(i-i) - k(b-b) + (bi-bi)}{kk+(i+i)k+ii} \end{aligned}$$

आणि १८५, १८६ पृष्ठांप्रमाणें इ याचे जवळ जवळ इ आणि ब याचे जवळ जवळ ब इच्छेप्रमाणें करितां येतील, यामुळे इ-इ आणि ब-ब इच्छेप्रमाणें फार लहान करितां येतील; यावरून अ(इ-इ) आणि क(ब-ब) १८८ पृष्ठावरचे टीपेवरून हवे तितके लहान करितां येतील. आणि त्याचसारखे बइ-इब हेहि. कां की ती आणि खाली लिहिलेली पद्धति सारखीच आहे असें दिसेळ.

$$b(i-i) - i(b-b).$$

यावरून वरचे अपूर्णाकांचीं वेगळालीं पदे इच्छेप्रमाणें लहान करितां येतात त्यावरून त्या अपूर्णाकाचा अंश इच्छेप्रमाणें लहान करितां येईल. परंतु इ या पेक्षा इ नेहेमी अधिक आहे, म्हणून १८२ पृष्ठावरचे ५ व्या लेम्माप्रमाणें त्या अपूर्णाकाचा छेद या पुढीलपेक्षा नेहेमी मोठा होईल,

$$kk + (i+i)k + ii$$

या उदाहरणावरून दिसतें, कीं एक अपूर्णाक आहे जाचा अंश इच्छेप्रमाणें लहान लहान करितां येईल, परंतु त्याचा छेद तसा लहान करितां येत नाही; यामुळे, तो अपूर्णाक हवा तितका लहान करितां येईल. म्हणजे,  $\frac{a+b}{k+i}$  याचा नि-

रनिराळ्या किमती  $\frac{अ+ब}{क+इ}$  आणि  $\frac{अ+ब}{क+इ}$  हे अपूर्णांक आहेत जे इच्छेप्रमाणे जवळ जवळ आणितां येतील, अथवा जांचें अंतर इच्छेप्रमाणे लहान करितां येईल. पूर्वी सारखे विस्तीर्ण अर्थाचे भाषणानें,  $\frac{अ+ब}{क+इ}$  या अपूर्णांकास वास्तवीक किंमत आहे, ब आणि इ यांचा जवळ जवळ किमती मांडिल्या असतां, त्या वास्तवीक किमतीचे जवळ जवळ होतील.

बीज गणितरूप पद्धतीमध्ये जो क्रमनियम आहे असे मानिलें, तो या पुढील सिद्धांतांत आहे, आणि तो नियम विशेष पक्षांनीं शिकणारानें सिद्ध करावा.

### सामान्य सिद्धांत

प एक बीजरूप पद्धति आहे जीमध्ये क्ष येतो, त्या पद्धतीत क्षचे जागीं अ मांडिला असतां त्या पद्धतीची किंमत प बरोबर होईल.

क्षचे जागीं अ+म मांडला असतां प पद्धति क चे बरोबर होईल असें मनांत आण.

तेव्हां जर इच्छेप्रमाणे अ आणि अ+म हे हवे तितकें जवळ जवळ करितां येतील; ह्मणजे, हवा तितका म लहान करितां येईल; तेव्हां प आणि क यांचें अंतर जितकें पाहिजे तितकें लहान करितां येईल.

### विशेषपक्ष

$$प = क्ष + क्ष^२$$

$$प = अ + अ^२$$

$$क = (अ+म) + (अ+म)^२$$

$$= अ + अ^२ + (१+२अ)म + म^२$$

$$= प + (१+२अ)म + म^२$$

या वरचे समीकरणां पासून

$$क - प = (१+२अ)म + म^२$$

जर हवा तितका म लहान केला तर यांतील प्रत्येक पद हवें तितकें लहान करितां येईल.

या पूर्वी जा पद्धती काढिल्या आहेत, त्यांविषयीं एक गोष्टीवर मात्र संशय येतो, म्हणजे,  $\sqrt{क्ष}$ ,  $\sqrt[३]{क्ष}$ , इत्यादि, जसा जसा पक्ष असेल, तसा तसा तो संशय यांचे खऱ्या किंवा जवळजवळचा किमतीविषयीं असतो. जर इच्छेप्रमाणे हवा तितका म लहान करितां येतो, तर  $\sqrt{अ}$  आणि  $\sqrt[३]{अ+म}$  यांचा जवळ जवळचा किमती इच्छेप्रमाणे हव्या तितक्या जवळ जवळ करितां येतील कीं काय?

या प्रश्नास उत्तर देण्यासाठी, एक सिद्धांत अगोदर सांगितला पाहिजे, जो सिद्धांत दुसऱ्या पुष्कळ जागी उपयोगी पडेल.

तो सिद्धांत या पुढीलप्रमाणे आहे.

$$क्ष^2 - य^2 = (क्ष - य)(क्ष + य)$$

$$क्ष^3 - य^3 = (क्ष - य)(क्ष^2 + क्षय + य^2)$$

$$क्ष^4 - य^4 = (क्ष - य)(क्ष^3 + क्ष^2य + क्षय^2 + य^3)$$

.....

$$क्ष^n - य^n = (क्ष - य)(क्ष^{n-1} + क्ष^{n-2}य + \dots + क्षय^{n-2} + य^{n-1})$$

वरची समीकरणे गुणाकारापासून समजतील; उदाहरण,

$$\begin{array}{r} क्ष^3 + क्ष^2य + क्षय^2 + य^3 \\ क्ष - य \\ \hline क्ष^3 + क्ष^2य + क्ष^2य^2 + क्षय^3 \\ - क्ष^3य - क्ष^2य^2 - क्षय^3 - य^4 \\ \hline क्ष^2 + 0 + 0 + 0 - य^2 \end{array}$$

वरचा गुणाकार, प्रवेशकांतील गुणाकाराचे दुसरे रितीप्रमाणे केला आहे असे पाहाण्यांत येईल आणि पुढेहि या रितीप्रमाणे गुणाकार नेहेमी केले जातील.

क्ष+य, क्ष<sup>२</sup>+क्षय+य<sup>२</sup>, क्ष<sup>३</sup>+क्ष<sup>२</sup>य+क्षय<sup>२</sup>+य<sup>३</sup>, इत्यादि.

ह्या पद्धतीचा क्रम शोधिला असता पाहाण्यांत येईल, की प्रत्येक पद्धति तिचे पूर्वीचे पद्धतीस यने गुणून, त्या गुणाकाराला क्षचा एक घात अधिक मिळवून झाली आहे. जसें,

$$क्ष^2 + क्षय + य^2 = क्ष + य(क्ष + य)$$

$$क्ष^3 + क्ष^2य + क्षय^2 + य^3 = क्ष^2 + य(क्ष^2 + क्षय + य^2) \text{ इत्यादि.}$$

वरचा तीन पद्धतींचे जागीं  $p_1, p_2, p_3$ , इत्यादि अशीं चिन्हे घेतलीं\*, तर याप्रमाणें होईल  $p_2 = क्ष^2 + यp_1$ ,  $p_3 = क्ष^3 + यp_2$ ,  $p_4 = क्ष^4 + यp_3$ , इत्यादि.

$$\text{अथवा सामान्यतः } p_n = क्ष^n + यp_{n-1}$$

हेहि पहाण्यांत येईल, कीं क्षनें गुणून आणि यचा एक घात मिळवून त्याच पद्धती निघतील, असें ;

$$क्ष^2 + क्षय + य^2 = य^2 + क्ष(क्ष + य)$$

$$क्ष^3 + क्ष^2य + क्षय^2 + य^3 = य^3 + क्ष(क्ष^2 + क्षय + य^2) \text{ इत्यादि.}$$

$$\text{अथवा } p_2 = य^2 + क्षp_1, p_3 = य^3 + क्षp_2, p_4 = य^4 + क्षp_3, \text{ इत्यादि}$$

$$\text{अथवा सामान्यतः, } p_n = य^n + क्षp_{n-1}$$

हा सिद्धांत याप्रमाणें मांडितां येतो ;

$$क्ष^n - य^n = (क्ष - य)p_{n-1}$$

आणि याप्रमाणें सिद्ध करितां येतो ;

सामान्य सिद्धांत	विशेषपक्ष
$p_n = क्ष^n + यp_{n-1}$	$p_4 = क्ष^4 + यp_3$
$p_n = य^n + क्षp_{n-1}$	$p_4 = य^4 + क्षp_3$
$(-)^0 = क्ष^n - य^n - (क्ष - य)p_{n-1}$	$(-)^0 = क्ष^4 - य^4 - (क्ष - य)p_3$
$क्ष^n - य^n = (क्ष - य)p_{n-1}$	$क्ष^4 - य^4 = (क्ष - य)p_3$

आतां  $\sqrt[3]{10}$  आणि  $\sqrt[3]{10} + म$  यांस शोधितो, जांत म इच्छेप्रमाणें लहान करितां येतो. यांचा जवळ जवळ किंमती दाखविण्यासाठीं य आणि क्ष घे, अशा-  
नें १८५ आणि १८६ व्ये पृष्ठावरून

\* या सोबे पचे पायांखालीं जे अंक आहेत त्यांसीं आणि मूळप्रकाशकचिन्हांनीं घालमेल होई देई नये. १०७ पृष्ठावरचे छाशाचे चिन्हांप्रमाणें हे कामांत घेतले आहेत, आणि त्यांस प एक, प दोन, प तीन, इत्यादि, याप्रमाणें वाचितात.

$\text{क्ष}^3 = (१० + \text{म}) + \text{वि}$  } यांत वि आणि व इच्छेप्रमाणें  
 $\text{य}^3 = १० + \text{व}$  } लहान करितां येतील.

(-)  $\text{क्ष}^3 - \text{य}^3 = \text{म} + \text{वि} - \text{व}$

अथवा  $(\text{क्ष} - \text{य})(\text{क्ष}^2 + \text{क्षय} + \text{य}^2) = \text{म} + \text{वि} - \text{व}$

$$\text{क्ष} - \text{य} = \frac{\text{म} + \text{वि} - \text{व}}{\text{क्ष}^2 + \text{क्षय} + \text{य}^2}$$

आतां क्ष आणि य हे दोन्ही २ पेक्षा मोठे आहेत, कां कीं  $२^3 = ८$  म्हणून १० पेक्षा लहान आहेत; यामुळे वरचे अपूर्ण पद्धतीचा छेद १२ पेक्षा अगत्य मोठा होईल; आणि तिचे अंश इच्छेप्रमाणें लहान लहान करितां येतील. यावरून वरची अपूर्ण पद्धति जी  $\text{क्ष} - \text{य}$ , ती इच्छेप्रमाणें हवी तितकी लहान करितां येती, यामुळे इच्छेप्रमाणें क्ष आणि य हवे तितक जवळ जवळ करितां येतील. परंतु क्ष आणि य हे  $\sqrt[3]{१० + \text{म}}$  आणि  $\sqrt[3]{१०}$  यांचा जवळ जवळचा किमती आहेत.

शिकणारानें हा पुढील सिद्धांत उलगडून सिद्ध करावा;

$$\text{क्ष}^3 - \text{य}^3 = (\text{क्ष} + \text{य})(\text{क्ष} - \text{य})$$

$$\text{क्ष}^3 - \text{य}^3 = (\text{क्ष} + \text{य})(\text{क्ष}^2 - \text{क्ष}^2\text{य} + \text{क्षय}^2 - \text{य}^3)$$

$$\text{क्ष}^3 - \text{य}^3 = (\text{क्ष} + \text{य})(\text{क्ष}^2 - \text{क्ष}^2\text{य} + \text{क्ष}^2\text{य}^2 - \text{क्ष}^2\text{य}^3 + \text{क्षय}^2 - \text{य}^4)$$

इत्यादि इत्यादि

$$\text{क्ष}^3 + \text{य}^3 = (\text{क्ष} + \text{य})(\text{क्ष}^2 - \text{क्षय} + \text{य}^2)$$

$$\text{क्ष}^3 + \text{य}^3 = (\text{क्ष} + \text{य})(\text{क्ष}^2 - \text{क्ष}^2\text{य} + \text{क्ष}^2\text{य}^2 - \text{क्षय}^3 + \text{य}^4)$$

इत्यादि इत्यादि

आतां घात आणि मूलप्रकाशक चिन्हांची सामान्य सिद्धता दाखवितां.

क्षचे घाताचा कोणताहि घात करायाचा असेल, तर दोन्ही घातांचीं घातप्रकाशक चिन्हे परस्पर गुणून तो गुणाकार घाताचें प्रकाशक चिन्ह होईल;

उदाहरण,

$$(\kappa^3)^2 = \kappa^{3 \times 2} = \kappa^{12} \text{ कां कीं } (\kappa^3)^2 = \kappa^3 \cdot \kappa^3 \cdot \kappa^3 \cdot \kappa^3 = \kappa^{3+3+3+3}$$

या सारिखें,

$$(\kappa^3)^{12} = \kappa^{36} \quad (\kappa^3)^4 = \kappa^{12} \quad (\kappa^3)^7 = \kappa^{21}$$

$$(\kappa^{a+b})^{a-b} = \kappa^{a^2-b^2} \quad (\kappa^{a-b})^{a+b} = \kappa^{a^2-b^2}$$

$$(\kappa^m)^n = (\kappa^n)^m = \kappa^{mn}$$

गुण्य आणि गुणक यांचे घातांचे गुणाकाराबरोबर गुणाकाराचा घात आहे.

$$\text{जसे, } (\text{अवक})^3 = \text{अवक} \cdot \text{अवक} \cdot \text{अवक} = \text{अअवववककक} = \text{अ}^3 \text{ब}^3 \text{क}^3$$

$$(\text{अव}^2 \text{क}^3)^2 = \text{अ}^4 (\text{ब}^2)^2 (\text{क}^3)^2 = \text{अ}^4 \text{ब}^4 \text{क}^{12}$$

$$(\text{अ}^m \text{ब}^n \text{क}^p)^r = (\text{अ}^m)^r (\text{ब}^n)^r (\text{क}^p)^r = \text{अ}^{mr} \text{ब}^{nr} \text{क}^{pr}$$

हीच रीति भागाकारास लागती. जसे,  $(\frac{अ}{ब})^3 = \frac{अ^3}{ब^3}$ ; कां कीं पहिलें पद याज बरोबर आहे  $\frac{अ}{ब} \times \frac{अ}{ब} \times \frac{अ}{ब}$ , अथवा १८१ पृष्ठावरचे २ लेम्मा प्रमाणे  $= \frac{अअअ}{बबब}$

मूळाचें मूळ तेंच आहे, जाचें प्रकाशक चिन्ह दोन पहिल्या सांगितलेल्या दोन मूळांचे प्रकाशक चिन्हांचे गुणाकारा बरोबर आहेत. जसे घनमूळ अथवा त्रिघातमूळ याचें चतुर्घातमूळ, बाराघातमूळ आहे. हें सिद्ध करायासाठीं,  $\kappa$  याचे त्रिघातमूळाचें चतुर्घातमूळ दाखवायासाठीं य घे. तेव्हां

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{\kappa}} = \kappa \therefore \sqrt[3]{\kappa} = \kappa^3 \quad \kappa = (\kappa^3)^3 = \kappa^{27}$$

$$\text{अथवा } \kappa = \sqrt[27]{\kappa}, \text{ परंतु } \kappa = \sqrt[3]{\sqrt[3]{\kappa}}$$

१७९ व्या पृष्ठावरचे ६ व्या सिद्धांतांत असे दाखविले गेले कीं क्षळा अंकगणित रूपांचे केवळ एक घनमूळ, किंवा १२ घातमूळ होऊं शकते; आणि घनमूळाला अंकगणितरूपाने केवळ एक चतुर्घातमूळ होऊं शकते. यावरून वरची कृति सिद्ध झाली; ह्मणजे क्षचे एक घनमूळाचे एक चतुर्घातमूळ हे क्षचे एक १२ घातमूळ आहे; आणि प्रत्येक तऱ्हेचे मूळाचे अंकगणितरूपाने केवळ एक मूळ आहे, असे वरचे गोष्टीवरून दाखवितां येते. परंतु जीं बीजरूप चिन्हे क्ष चीं मूळे आहेत, त्यांस अंकगणितरूपाचा अर्थ असेल किंवा नसेल, अशा या सर्व चिन्हाविषयीं मनन करिते समयीं, शिकणाराने स्मरण ठेवावे, कीं वरचे कृतीपासून हे सिद्ध होत नाही कीं क्ष चे हरएक तृतीय घातमूळाचे हरएक चतुर्घातमूळ क्ष चे १२ घातमूळ आहे. अशी गोष्ट घडेल. परंतु अद्यापि सिद्ध झाली नाही.

साध रीतीने सिद्ध करितां येते, कीं

$$\sqrt{\sqrt[3]{\text{क्ष}}} = \sqrt[6]{\text{क्ष}}; \quad \sqrt{\sqrt[4]{\text{क्ष}}} = \sqrt[8]{\text{क्ष}} = \sqrt[4]{\sqrt[2]{\text{क्ष}}}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{\text{क्ष}}} = \sqrt[12]{\text{क्ष}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{\text{क्ष}}}; \quad \sqrt[4]{\sqrt[3]{\text{क्ष}}} = \sqrt[12]{\text{क्ष}}$$

गुणाकाराचे मूळ, गुण्यगुणकाचे मूळांचा गुणाकार केल्याने निघते. जसे.

$$\sqrt[3]{\text{अवक}} = \sqrt[3]{\text{अ}} \times \sqrt[3]{\text{ब}} \times \sqrt[3]{\text{क}} \dots \dots \dots (अ)$$

वरचे दोन पद्धतींचा चतुर्घात एकच आहे. ह्मणजे, अवक. कां कीं

१७४ व्या पृष्ठावरचे व्याख्यानाप्रमाणे

$$(\sqrt[3]{\text{अवक}})^3 = \text{अवक}$$

आणि २०० पृष्ठावरून,

$$(\sqrt[3]{\text{अ}} \times \sqrt[3]{\text{ब}} \times \sqrt[3]{\text{क}})^3 = (\sqrt[3]{\text{अ}})^3 \times (\sqrt[3]{\text{ब}})^3 \times (\sqrt[3]{\text{क}})^3 = \text{अ} \times \text{ब} \times \text{क}$$

ह्मणजे, (अ) समीकरणाची प्रत्येक बाजू अवकचें चतुर्घातमूळ आहे. परंतु अवक यास अंकगणितरूपाचें केवळ एक चतुर्घातमूळ आहे; यामुळे (अ) समीकरणाची प्रत्येक बाजू तें मूळ आहे; आणि त्यामुळे त्या दोन बाजू बरोबर आहेत. तसेच रितीनें सिद्ध करितां येतें, कीं

$$\sqrt{\text{अवक}} = \sqrt{\text{अ}} \times \sqrt{\text{ब}} \times \sqrt{\text{क}} \quad \sqrt{\text{अब}^2} = \sqrt{\text{अ}} \times \sqrt{\text{ब}^2} = \text{ब} \sqrt{\text{अ}}$$

$$\sqrt{\text{अ}^2 \text{ब}^2 \text{क}^2} = \sqrt{\text{अ}^2} \times \sqrt{\text{ब}^2} \times \sqrt{\text{क}^2} \quad \sqrt{32} = \sqrt{16} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

हीच रीति भागाकारास लागेल, जसे.  $\sqrt[3]{\frac{\text{अ}}{\text{ब}}} = \frac{\sqrt[3]{\text{अ}}}{\sqrt[3]{\text{ब}}}$ ; कां कीं

या दोहोंचा घन एकच आहे असें काढितां येईल, ह्मणजे,  $\frac{\text{अ}}{\text{ब}}$ .

जर क्षचा भलता घात वाढविला, आणि त्या घाताचें मूळ काढिलें, तर कृतीचा क्रम बदल केल्यानें उत्तरामध्ये कांहीं फेर पडत नाहीं.

ह्मणजे,  $\sqrt[3]{\text{क्ष}^2}$  आणि  $\{\sqrt[3]{\text{क्ष}}\}^2$  हीं दोन्ही बरोबर आहेत

हें सिद्ध करायासाठीं, २०० वे पृष्ठ पाहा,

$$\sqrt[3]{\text{क्ष}^2} = \sqrt[3]{\text{क्षक्षक्ष}} = \sqrt[3]{\text{क्ष}} \times \sqrt[3]{\text{क्ष}} \times \sqrt[3]{\text{क्ष}} \times \sqrt[3]{\text{क्ष}} = \{\sqrt[3]{\text{क्ष}}\}^2$$

याचसारखें.  $\sqrt[3]{\text{क्ष}^3} = (\sqrt[3]{\text{क्ष}})^3; \quad \sqrt{\text{क्ष}^2} = (\sqrt{\text{क्ष}})^2.$

$\sqrt[3]{\text{क्ष}^2}$  या पद्धतींतले, जर अ आणि ब हे दोन्ही एकच अंकानें गुणिले किंवा भागिले, तर त्या पद्धतीचे किमतींत फेर पडत नाहीं. ह्मणजे,

$$\sqrt[3]{\text{क्ष}^2 \text{मव}} = \sqrt[3]{\text{क्ष}^2} \sqrt[3]{\text{मव}}$$

-कारण, पूर्वी दाखविलें गेलें, कीं



$$म\sqrt[m]{क्ष^मव} = \sqrt[m]{म\sqrt[m]{क्ष^मव}} \text{ ही याप्रमाणें आहेत } \sqrt[m]{म\sqrt[m]{(क्ष^व)^म}} = \sqrt[m]{क्ष^व}$$

$$\text{कां कीं } \sqrt[m]{(क्ष^व)^म} = क्ष^व$$

$$\text{याचसारखें, } \sqrt[६]{अ^१२} = \sqrt[३]{अ^४} = \sqrt[२]{अ^६} = \sqrt[१२]{अ^८}$$

घाताचें मूळ काढायाचें असेल, तेव्हां जर घातप्रकाशक आणि मूळप्रकाशक यांचा भागाकार निःशेष होत असल्यास, घातप्रकाशकास मूळप्रकाशकानें भाग.

जसें,  $\sqrt[१२]{क्ष^{१२}} = क्ष^१ = क्ष^३$ . कां कीं  $क्ष^{१२} = (क्ष^३)^४$ ; यामुळे  $\sqrt[१२]{क्ष^{१२}} = क्ष^३$ .

याचसारखें,  $\sqrt[६]{क्ष^{१६}} = क्ष^२$ ,  $\sqrt[४]{क्ष^{१०}} = क्ष^{२.५}$ ; आणि याप्रमाणें पुढेहि.

जेव्हां घाताचें प्रकाशक चिन्ह मूळाचे प्रकाशकानें निःशेष भागिलें जात नाही, जसें,  $\sqrt[३]{क्ष^४}$ , यापक्षीहि, अद्यापि बीजगणिताचे तऱ्हेनें करण्याची रीति कांहीं सांपडली नाही, जिणेकरून  $\sqrt[३]{क्ष^४}$  यास याचें  $\sqrt[३]{\quad}$  चिन्ह नाहीसें होई\* असें रूप देवत नाही. यामुळे, क्ष हा कोणत्या पूर्ण किंवा अपूर्णाकाचे स्थळीं आहे हें काढावें, आणि नंतर† त्या कि.

\* याप्रमाणें कृति करावी.  $क्ष^४ = क्ष^३ \cdot क्ष$ , तर  $\sqrt[३]{क्ष^४} = \sqrt[३]{क्ष^३ \cdot क्ष} = \sqrt[३]{क्ष^३} \times \sqrt[३]{क्ष} = क्ष \times \sqrt[३]{क्ष}$ ; यांत तरी  $\sqrt[३]{\quad}$  हें चिन्ह राहिलें.

† बीजगणित आणि अंकगणित यांचे कृतिमध्ये कांहीं फेर आहे असें समजलें पाहिजे. बीजगणितामध्ये उत्तरे काढितात असें वास्तवीक झणवत नाही, परंतु उत्तरांस केवळ असें रूप देवतें कीं जा रूपासून त्यांची किंमत अंकगणित रीतीनें सहज काढता येईल. उदाहरण, अ आणि ब यांची बेरीज काय आहे? खरे झटलें असता अ+ब हें या प्रश्नाचें उत्तर नाही, परंतु त्याचें दर्शक मात्र आहे, झणून अ आणि ब हे कोणत्या अंकस्थळीं आहेत, हें कळ पावेतो प्रश्नाचें योग्य उत्तर काढण्यास थांबलें पाहिजे. परंतु ८अ+५अ यांची बेरीज काय आहे? असा प्रश्न केव्हावर पूर्वीपेक्षा एक पायरी पुढें जाऊ शकतो; कां कीं, ८अ+५अ ही पद्धती जरी बीजगणितरूप दर्शक आहे, तथापि या विद्येचे भाषणानें जें अति सरळरूप होऊ शकतें तें रूप नाही. परंतु तें अति सरळरूप १३ अ हें आहे; तथापि अ कोणत्या अंकस्थळीं आहे हें कळपावेतो उत्तर सांपडत नाही. उलगाडण्याचे अशे क्रमास पोंचल्यावर पुढें उत्तराचे जवळ जाण्यासाठीं बीज सोडून अंकगणित घ्यावें लागतें, तेव्हां असें झणतात

मतीनें  $\sqrt[3]{\text{क्ष}^9}$  अथवा  $\text{क्ष}^3 \sqrt[3]{\text{क्ष}}$  याची किंमत अंकगणित रितीनें काढायाची मात्र राहिली.

$\sqrt[3]{\text{क्ष}^9}$  यास दर्शविण्याचे रितीविषयींचा मात्र प्रश्न राहिला, आणि तो प्रश्न १७५ आणि १७६ व्या पृष्ठांवर हा प्रश्न मनांत आला, आणि तेथें कळलें, कीं  $\sqrt[3]{\text{क्ष}}$ ,  $\sqrt[3]{\text{क्ष}}$ , इत्यादिकांचे जागीं  $\text{क्ष}^{\frac{1}{3}}$ ,  $\text{क्ष}^{\frac{1}{3}}$ , इत्यादि अशे रूपानें मांडणें एकपक्षीं मोठ्ये सोयीस पडलें असतें. परंतु त्या ठिकाणीं इतकेंच सांगून पुढें काहीं लिहिलें नाहीं. कां कीं, व्यवहारी अपूर्णाकांस जा रिती लावितां येतात, त्यांहून निराळ्या रिती अपूर्ण घातप्रकाशकांस लावण्याचे अगत्यावांचून, अथवा पूर्णांक प्रकाशक चिन्हांस जा रिती लागतात त्यांहून निराळ्या रिती अपूर्ण घातप्रकाशकांस लावण्याचे अगत्यावांचून, या प्रकाशक चिन्हे लिहिण्याचे तऱ्हेपासून मूळांचे सर्व दुर्बोध संबंध जाणण्यास काहीं स्पष्ट कारण नव्हतें. पूर्ण घातप्रकाशकाविषयीं जा रिती सिद्ध केल्या त्यांचीं, आणि अपूर्ण घातप्रकाशकाविषयींचा जा रितींचा शोध करायाचा आहे, या दोहोंचीं उदाहरणें दोन उभ्ये ओळींत लिहून दाखवितों; आतां हें विचारायाचें आहे, कीं पुढें लिहिलेल्या कल्पनेवरून दुसरे ओळींतले सिद्धांत खरे आहेत कीं काय? ती कल्पना याप्रमाणें

जर  $\text{क्ष}^{\frac{m}{n}}$  हा  $\sqrt[n]{\text{क्ष}^m}$  यास दाखवितों.

$\text{क्ष}^{\frac{1}{3}} \times \text{क्ष}^{\frac{2}{3}} = \text{क्ष}^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}} = \text{क्ष}^1$	$\text{क्ष}^{\frac{2}{3}} \times \text{क्ष}^{\frac{1}{3}} = \text{क्ष}^{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}} = \text{क्ष}^1$ हे खरे आहे कीं नाहीं?
$\frac{\text{क्ष}^{\frac{1}{3}}}{\text{क्ष}^{\frac{2}{3}}} = \text{क्ष}^{\frac{1}{3} - \frac{2}{3}} = \text{क्ष}^{-\frac{1}{3}}$	$\frac{\text{क्ष}^{\frac{2}{3}}}{\text{क्ष}^{\frac{1}{3}}} = \text{क्ष}^{\frac{2}{3} - \frac{1}{3}} = \text{क्ष}^{\frac{1}{3}}$ हे खरे ०?
$(\text{क्ष}^{\frac{1}{3}})^2 = \text{क्ष}^{\frac{1}{3} \times 2} = \text{क्ष}^{\frac{2}{3}}$	$(\text{क्ष}^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} = \text{क्ष}^{\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}} = \text{क्ष}^{\frac{1}{3}}$ हे खरे ०?
$\sqrt[3]{\text{क्ष}^9} = \text{क्ष}^{\frac{9}{3}} = \text{क्ष}^3$	$\sqrt[3]{\text{क्ष}^{\frac{27}{3}}} = \text{क्ष}^{\frac{27}{3 \times 3}} = \text{क्ष}^3$ हे खरे ०?

कीं अंकगणिताचे शेवटील रूपास पोवला. जसें अ+ब हें शेवटील रूप आहे; परंतु अ+ब हें वसें नाहीं. पुनः  $\sqrt[3]{\text{क्ष}^9}$ , अथवा  $\text{क्ष}^3 \sqrt[3]{\text{क्ष}}$ , हें शेवटील रूप आहे;  $\sqrt[3]{\text{क्ष}^{12}}$  हें तसें नाहीं.

पहिल्यानें हें लक्षांत येतें, कीं जा तऱ्हेनें पूर्वीचा दुसरा विस्तार झाला होता, त्या तऱ्हेनें वरचे शेवटील रितीपासून हा विस्तार होतो. यावरून हेंच कळलें कीं जर व हा अनें भागिला जातो, तर  $\sqrt[3]{\frac{व}{अ}}$  हा  $\sqrt[3]{\frac{व}{अ}}$  याचा खरा दर्शक आहे. परंतु जेव्हां व हा अनें भागिला जात नाही. तेव्हां  $\sqrt[3]{\frac{व}{अ}}$  यास कांहीं अर्थ नाही. तर त्याला अर्थ देतों; ह्मणजे  $\sqrt[3]{\frac{व}{अ}}$ , हें कसेहि असो तथापि हें पद त्यास दर्शवितें, असें ह्मणतों. आतां या नवे चिन्हास जा रिती लावल्या पाहिजेत त्यांचा शोध करितों. खालच्या पहिल्या उभये ओळीमध्ये सामान्य पक्ष दाखविला आहे आणि दुसऱ्ये उभये ओळींत विशेष पक्ष दाखविला आहे. जा जा पृष्ठांवर वेगळाल्या रिती आहेत, त्या पृष्ठांचा अंक एकमे बाजूस मांडिला आहे.

$\sqrt[3]{\frac{म}{न}} \times \sqrt[3]{\frac{प}{क}}$  हें काय आहे ?

$\sqrt[3]{\frac{म}{न}}$  याचा अर्थ  $\sqrt[3]{\frac{म}{न}}$

$$२०२ \text{ पृ०} = \sqrt[3]{\frac{मक}{नक}}$$

$\sqrt[3]{\frac{प}{क}}$  याचा अर्थ  $\sqrt[3]{\frac{प}{क}}$

$$२०२ \text{ पृ०} = \sqrt[3]{\frac{मक}{नप}}$$

$$\text{यामुळे, } \sqrt[3]{\frac{म}{न}} \times \sqrt[3]{\frac{प}{क}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{मक}{नक}} \times \sqrt[3]{\frac{नप}{नक}}$$

$$२०२ \text{ पृ०} = \sqrt[3]{\frac{मक}{नक}} \times \sqrt[3]{\frac{नप}{नक}}$$

$$१७१ \text{ पृ०} = \sqrt[3]{\frac{मक+नप}{नक}}$$

हें याप्रमाणें दर्शविलें जातें

$\frac{मक+नप}{नक}$

$$\text{परंतु, } \frac{मक+नप}{नक} = \frac{म}{न} + \frac{प}{क}$$

$$\text{यामुळे, } \sqrt[3]{\frac{म}{न}} \times \sqrt[3]{\frac{प}{क}} = \sqrt[3]{\frac{म}{न} + \frac{प}{क}}$$

$\sqrt[3]{\frac{म}{न}} \times \sqrt[3]{\frac{प}{क}}$  हें काय आहे?

$\sqrt[3]{\frac{म}{न}}$  याचा अर्थ  $\sqrt[3]{\frac{म}{न}}$

$$२०२ \text{ पृ०} = \sqrt[3]{\frac{मक}{नक}}$$

$\sqrt[3]{\frac{प}{क}}$  याचा अर्थ  $\sqrt[3]{\frac{प}{क}}$

$$२०२ \text{ पृ०} = \sqrt[3]{\frac{मक}{नप}}$$

$$\text{यामुळे, } \sqrt[3]{\frac{म}{न}} \times \sqrt[3]{\frac{प}{क}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{मक}{नक}} \times \sqrt[3]{\frac{नप}{नक}}$$

$$२०२ \text{ पृ०} = \sqrt[3]{\frac{मक}{नक}} \times \sqrt[3]{\frac{नप}{नक}}$$

$$१७१ \text{ पृ०} = \sqrt[3]{\frac{मक+नप}{नक}}$$

हें याप्रमाणें दर्शविलें जातें

$\frac{मक+नप}{नक}$

$$\text{परंतु, } \frac{मक+नप}{नक} = \frac{म}{न} + \frac{प}{क}$$

$$\text{यामुळे, } \sqrt[3]{\frac{म}{न}} \times \sqrt[3]{\frac{प}{क}} = \sqrt[3]{\frac{म}{न} + \frac{प}{क}}$$

आतां हीं पुढील पृष्ठांचे खुणेवांचून, अधिक संक्षेपानें दाखविलीं आहेत.

$\sqrt[m]{\frac{म}{न}} \div \sqrt[k]{\frac{प}{क}}$  हें काय आहे ?

ह्मणजे  $\sqrt[m]{\frac{म}{न}} \div \sqrt[k]{\frac{प}{क}}$  हें आहे

अथवा  $\sqrt[m]{\frac{म}{न}} \div \sqrt[k]{\frac{प}{क}}$

अथवा  $\sqrt[m]{\frac{म}{न}} \div \sqrt[k]{\frac{प}{क}}$

अथवा  $\sqrt[m]{\frac{म}{न}} \div \sqrt[k]{\frac{प}{क}}$

अथवा  $\sqrt[m]{\frac{म}{न}} \div \sqrt[k]{\frac{प}{क}}$

परंतु,  $\frac{\sqrt[m]{\frac{म}{न}}}{\sqrt[k]{\frac{प}{क}}} = \frac{म}{न} - \frac{प}{क}$

यामुळे,  $\sqrt[m]{\frac{म}{न}} \div \sqrt[k]{\frac{प}{क}} = \frac{म}{न} - \frac{प}{क}$

$(\sqrt[m]{\frac{म}{न}})^{\frac{प}{क}}$  हें काय आहे ?

याचा अर्थ  $\sqrt[m]{\left\{ \sqrt[k]{\frac{म}{न}} \right\}^{\frac{प}{क}}}$  हा आहे

अथवा २०२ पृ०  $\sqrt[m]{\sqrt[k]{\frac{म}{न}}}$

अथवा २०० पृ०  $\sqrt[m]{\sqrt[k]{\frac{म}{न}}}$

अथवा  $\sqrt[m]{\frac{म}{न}}$

परंतु,  $\frac{\sqrt[m]{\frac{म}{न}}}{\sqrt[k]{\frac{प}{क}}} = \frac{म}{न} \times \frac{प}{क}$

यामुळे,  $(\sqrt[m]{\frac{म}{न}})^{\frac{प}{क}} = \frac{म}{न} \times \frac{प}{क}$

$\sqrt[m]{\frac{म}{न}} \div \sqrt[k]{\frac{प}{क}}$  हें काय आहे ?

ह्मणजे  $\sqrt[m]{\frac{म}{न}} \div \sqrt[k]{\frac{प}{क}}$  हें आहे

अथवा  $\sqrt[m]{\frac{म}{न}} \div \sqrt[k]{\frac{प}{क}}$

अथवा  $\sqrt[m]{\frac{म}{न}} \div \sqrt[k]{\frac{प}{क}}$

अथवा  $\sqrt[m]{\frac{म}{न}} \div \sqrt[k]{\frac{प}{क}}$

अथवा  $\sqrt[m]{\frac{म}{न}} \div \sqrt[k]{\frac{प}{क}}$

परंतु,  $\frac{1}{2} = \frac{3}{5} - \frac{1}{2}$

यामुळे,  $\sqrt[m]{\frac{म}{न}} \div \sqrt[k]{\frac{प}{क}} = \sqrt[m]{\frac{म}{न}}$

$(\sqrt[m]{\frac{म}{न}})^{\frac{प}{क}}$  हें काय आहे ?

याचा अर्थ  $\sqrt[m]{\left\{ \sqrt[k]{\frac{म}{न}} \right\}^{\frac{प}{क}}}$  हा आहे

अथवा २०२ पृ०  $\sqrt[m]{\sqrt[k]{\frac{म}{न}}}$

अथवा २०० पृ०  $\sqrt[m]{\sqrt[k]{\frac{म}{न}}}$

अथवा  $\sqrt[m]{\frac{म}{न}}$

परंतु,  $\frac{1}{2} = \frac{3}{5} \times \frac{2}{3}$

यामुळे,  $(\sqrt[m]{\frac{म}{न}})^{\frac{प}{क}} = \sqrt[m]{\frac{म}{न} \times \frac{प}{क}}$

या शेवटील कृतींत, २०४ व्हे पृष्ठावरचे तिसऱ्ये आणि चवथे प्रश्नांची उत्तरे आहेत.

१७३ आणि १७४ पृष्ठ पाहून, स्मरण केल्यानें जा मूळ रिती तेंथें कामांत आणिल्या, त्या अपूर्ण घातमूळप्रकाशक चिन्हांस लावितां

येतात, त्या एथें सिद्ध झाल्या त्यावरून ऋण अपूर्ण घातमूळप्रकाश-  
कांचा अर्थ, आणि सांविषयींचा रिती स्थापितां येतील. जसें

$$\text{क्ष}^{-\frac{1}{3}} \text{ हे } \text{क्ष}^{\frac{1}{3}} \text{ अथवा } \sqrt[3]{\text{क्ष}} \text{ अथवा } \sqrt[3]{\left(\frac{1}{\text{क्ष}}\right)^2} \text{ याचे जागीं आहेत.}$$

वर्ग, घन आणि चतुर्घातमूळांविषयीं किती बीजगणित रूप मूळें  
असतील, आणि तीं कोणकोणत्या जातीचीं आहेत, तीं आतां शोधितों.  
यापुढें जाण्यास सद्यः शिकणारास अवघड पडेल.

पहिल्यानें वर्गमूळाविषयीं. +१ आणि -१ हीं दोन्ही +१ याचीं  
वर्गमूळें, आणि +अ आणि -अ हीं दोन्ही, + अअ यांचीं वर्गमूळें आ-  
हेत, हें स्पष्ट आहे. कां कीं,

$$-१ \times -१ = +१$$

$$-अ \times -अ = +अअ$$

$$+१ \times +१ = +१$$

$$+अ \times +अ = +अअ$$

आतां हेंच विचारायाचें आहे, कीं +१ याचीं दोन वर्गमूळांपेक्षां  
अधिक वर्गमूळें होऊं शकतात कीं नाहीं? +१ याचें भलते कांहीं  
वर्गमूळ क्ष असो, तर वर्गमूळ शब्दाचे व्याख्याना प्रमाणें, क्षक्ष=१,  
अथवा क्षक्ष-१=० असें असावें, परंतु क्षक्ष-१=(क्ष+१)(क्ष-१);  
यामुळें (क्ष+१)(क्ष-१)=०. यावरून\*, क्ष+१ अथवा क्ष-१=०.  
क्ष+१=० याचें उत्तर क्ष=-१ हें मात्र आहे; क्ष-१=०, याचें उत्तर  
क्ष=+१ हें आहे; यामुळें +१ आणि -१ हीं मात्र १ याचीं वर्गमूळें  
आहेत. हीच कृति, क्षक्ष=अअ, अथवा (क्ष-अ)(क्ष+अ)=० यास  
लावितां येती.

यामुळें ऋण परिमाणाला, घन किंवा ऋण परिमाणरूप वर्गमूळ  
होऊं शकत नाहीं; कां कीं त्यांतून, कोणतेही एक, साणें तेंच गुणिलें

\* जेव्हां याप्रमाणें कांहीं गुणाकार अब=०, तेव्हां त्यांतून अ किंवा ब एक तरी ० अ-  
सावें, कां कीं जर दोहोंलाहि किंमत असेल, तर चालते रितीप्रमाणें, त्याचे गुणाकारासहि  
कांहीं किंमत होईल.

असतां, गुणाकार धन होतो. तथापि  $\sqrt{-१}$  हें कांहींच परिमाण नाही असें ह्मणवणार नाही, कां कीं गणिताचे रितीवरून जीं चिन्हे निघतात त्यांस तें नांव देण्यास ठरविलें. परंतु जेव्हां  $\sqrt{-१}$  येतो तेव्हां तो ११९ व्या पृष्ठावर जो -१ आहे त्याचे अर्थाचा आहे. ह्मणजे तो -१ कृत्याचे खोऱ्या कल्पनेचा दाखला आहे, याकरितां कृत्याला, अगत्यानु- रूप, तपासून फिरविलें पाहिजे, किंवा त्याचा विस्तार केला पाहिजे, किंवा त्याला टाकून दिलें पाहिजे. परंतु-१ याचा अर्थ जा क्रमांनीं स्थापिला आहे, त्याजवर लक्ष्य दिलें असतां, ते या पुढीलप्रमाणें आहेत असें कळेल;

१. पूर्वी ३-४ इत्यादि, अशे जातीचे चिन्हांचे संयोग आढळले, आणि ३, -, ४, या चिन्हांस जो तेव्हां अर्थ होता त्याचे विरुद्ध कृति करण्याचें त्या संयोगांत सुचविलें होतें.

२. जा कृत्यांपासून अशे तऱ्हेचे संयोग उत्पन्न झाले, त्यांस तपासून कृति पुनः केल्यावांचून तीं नीट कशीं करावीं हें समजलें; यावरून ३-४ इत्यादि, पद्धतींपासून काय समजावें, कीं तेणेंकरून त्या केव्हां येतील याचें अनुमान करितां यावें, अथवा त्या आल्या असतां त्यांचा अर्थ सांगतां यावा याचा निश्चय केला.

३. ३-४ इत्यादि यांस चालती रीति लाविल्यानें काय काय उत्पन्न होईल हें, आणि खोऱ्या कल्पनेचें नीट करणें कृतीचा कोणत्याहि पुढल्या क्रमापावेतो बंद ठेविलें असतां काय घडेल हें शोधिलें.

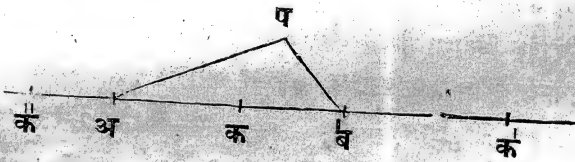
४. पूर्वी जें सर्व सांगितलें त्यावरून, व्यवहारांतील शब्दांचे अर्थाचा विस्तार अशे तऱ्हेनें केला, कीं त्यापूर्वी जीं केवळ, खोऱ्या कल्पनेचीं उत्तरे होती तीं, नियमित अर्थाचीं असून ओळखीचीं चिन्हे झालीं, आणि तीं सिद्ध केलेल्या रितीनीं, कामांत आणिलीं गेलीं, अशांनं यांत आणि संकोचित अर्थानें कामांत घेतलीं होती त्यांत कांहीं भेद नव्हता.

५. सर्व पक्षांत असें दिसून आलें, कीं जेव्हां निघालेलें उत्तर केवळ अंकगणित रूपाचें होतें, ह्मणजे जेव्हां पदांस संकोचित अर्थ होता, तेव्हां तें उत्तर यथायोग्य आणि समजायाजोगें होतें. तेव्हां पूर्वीचे क्रमांचे संकोचित अर्थ ठेऊन न समजाया जोगे चिन्हांनं, कृति करून उत्तरामध्ये कांहीं चूक राहिली नव्हती; परंतु जरी आपल्ये कृतीचा क्रम

उलटून, प्रत्येक क्रम अंकगणितरूपानें केला असता, तर उत्तर वरचे कृतीचे उत्तरासारिखेंच आलें असतें असें सर्व पक्षांत दिसून आलें.

यावरून दिसण्यांत आलें कीं, ३ अशे कांहीं संख्येचे पूर्वी+ हें चिन्ह असलें, तर त्याचा अर्थ मिळवणीचा आहे, तें+ चिन्ह-३ यांचे पूर्वी आलें असतां, पद्धतीचे पूर्व भागास-३ जोडायाचे आहेत असा अर्थ सुचवितें; आणि त्यावरून दिसण्यांत आलें, कीं + (-६)-(+४) या-पद्धतीमध्ये+ आणि- यांचा विस्तार अर्थ जरी सोडवत नाही, तथापि +६+३ हें जरी कित्येक विस्ताररूप कृतीचें उत्तर आहे, तरी त्यास गणितरूपाचा अर्थ होतो.

$\sqrt{-१}$ ,  $\sqrt{-२}$ , इत्यादि यांस प्रस्तुत कांहीं अर्थ नाही, आणि विरुद्ध रूपाचीं आहेत, तथापि वरचे सांगितलेल्या कृतीचे क्रमाप्रमाणें+ आणि-यांचे अर्थाचा अधिक विस्तार करून,  $\sqrt{-१}$ ,  $\sqrt{-२}$ , इत्यादि यांस कामांत आणण्याची आणि याचा अर्थ करण्याची योग्य रीति देतां येईल, असें वरचे सगळ्ये गोष्टीवरून, अनुमान करितां येतें. केवळ अनुमान असै ह्मणतों, कां कीं जरी एकच उदाहरणापासून कार्य झालें, तथापि जा रीतीवरून तें झालें ती रीति सर्वत्र लागू पडेल असा निश्चय करवत नाही. पूर्वी अशी रीति सांगितली आहे, परंतु त्या रीती विषयी कांहीं एथें सांगण्याचा अभिप्राय नाही. ती समजून घेण्यास जागा पुष्कळ राहिली आहे इतकें मात्र एथें दाखवितों.



कोणी पुरुष अ स्थळापासून निघून, प्रथम कोठे तरीं अब रेघेवर, किंवा तिचे वाढविलेल्या दोन टोंकांवर थांबून, शेवटीं ब स्थळां थांबतो असे मनांत आण; आणि उजव्या कडेस मोजलेलें अंतर धन आणि डाव्याकडेस मोजलेलें अंतर ऋण अशी कल्पना केली असतां, त्याचा पहिल्या स्थळापासून जितका लांब जातो त्या सर्व अंतरांतून + अब याचें अंतर मागव्ये रीतीचे सहाय्यावरून काढितां येतें, तें याप्रमाणें;



१. जर तो क जवळ थांबतो, तर  $(+अक) + (+कब) = + अब$
२. जर तो क जवळ थांबतो, तर  $(+अक) + (-कब) = + अब$
३. जर तो क जवळ थांबतो, तर  $(-अक) + (+कब) = + अब$

आतां पहा, जर तो पुरुष अब रेघ अथवा तिचा वाढविलेला भाग या वरून निघून दुसऱ्येकडे जाईल, ह्मणजे जर तो अप, पब, रेघेवरून जाईल, तर अप इत्यादिकांचे संबंधाचीं कांहीं चिन्हे नाहींत; तर त्यांचे जागीं  $\parallel$  असें कांहीं नवे चिन्ह घेऊन मांडले असतां याप्रमाणें होईल

$$\parallel ( \parallel अप ) \parallel ( \parallel पब ) = + अब$$

यावरून बीजगणित लागू करण्यांत असें दिसतें, कीं कांहीं नवीं चिन्हे कामांत घ्यावीं लागतील, आणि  $\sqrt{-१}$ , इत्यादि अशीं निरर्थक चिन्हे आढळतील. तर+ आणि-या चिन्हांस विस्तारपूर्वक कामांत आणून, जीं जीं नवीं चिन्हे या पुढे योजून काढावीं लागतील त्यांचे जागीं,  $\sqrt{-१}$  इत्यादि, हें येई असा कांहीं विस्तार करितां येणार नाहीं कीं काय ! ही गोष्ट शिकणारास केवळ अनुमान करण्याविषयीं आहे, परंतु यावरून त्यास ही पुढील कृति करणें योग्य आहे.

१.  $\sqrt{-१}$ . इत्यादि तऱ्हेचा पद्धतीस बीजगणिताचा रिती लाविल्यानें काय होतें हें पहाण्याकरितां मात्र त्या रिती त्यांस लाव, परंतु त्यांचे उत्तरावर विश्वास ठेवूं नको, तथापि पुष्कळ उत्तरांचे अनुभवावरून विश्वास ठेवण्याचें अगत्य वाटे, त्यांहून अधिक विश्वास ठेवूं नको.

२. कृति करितानां  $\sqrt{-१}$ , इत्यादि तऱ्हेची पद्धती नाहींशी झाली असें जेव्हां दिसेल, तेव्हां उत्तर खरें आहे कीं नाहीं तें तपास.

आतां घनमूळाचा विचार करितों. क्ष हा १ याचें कोणतेंहि घनमूल असो. तेव्हां  $क्ष^३ = १$ , अथवा  $क्ष^३ - १ = ०$ ;  $क्ष^३ - १ = (क्ष - १)(क्ष^२ + क्ष + १) = ०$  १९३ पृष्ठ पहा, आणि  $य = १$  असें घे;

यामुळे,  $क्ष - १ = ०$ . अथवा  $क्ष^२ + क्ष + १ = ०$

पहिल्यापासून  $क्ष = १$ , असें निघतें. आणि स्पष्ट आहे, कीं १ हा १ चें



घनमूळ आहे. पुढला अध्याय समजल्याचे पूर्वी दुसऱ्या रूपाचें उल-  
गडणें शिकणाराचानें करवणार नाहीं; परंतु एथें जाणावें कीं त्यास  
दोन उत्तरे आहेत, आणि दोहोंमध्ये  $\sqrt{-3}$  अ हें चिन्ह जाचा अर्थ अजून  
कळला नाहीं तें त्यांत येतें. तीं दोन उत्तरे याप्रमाणें आहेत

$$\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \text{ आणि } \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

यांतून दुसरें उत्तर शिकणारानें स्वबुद्धीनें काढावें. आणि पहिल्याविषयीं  
ह्या पुढील गोष्टी दाखवितों; १.  $\sqrt{-3}$  यास जर चालत्या रिती  
लागतात असें मानिलें, तर तें  $\kappa^3 + \kappa + 1$  या समीकरणास स्थापितें; २.  
त्याच कल्पनेनें, तें १ चें घनमूळ आहे.

$$\begin{aligned} \text{जर } \kappa &= \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}, \text{ तर } \kappa^3 = \frac{(-1)^3 + 2(-1)(\sqrt{-3}) + (\sqrt{-3})^3}{8} \\ &= \frac{1-2\sqrt{-3}+(-3)}{8} = \frac{-2-2\sqrt{-3}}{8} = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \end{aligned}$$

यामुळे

$$\kappa^3 + \kappa + 1 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} + \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} + 1 = \frac{-1-1}{2} + 1 = 0$$

$$\text{पुनः } \kappa^3 = \kappa^2 \times \kappa = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \times \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$

$$= \frac{(-1)^2 - (\sqrt{-3})^2}{4} = \frac{1-(-3)}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$प = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \quad क = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}, \text{ असें घे,}$$

तर अअअ अथवा अ<sup>३</sup> याचीं तीन घनमुळे अ, प अ, आणि कअ,  
अगस असावीं. कां कीं अ × अ × अ = अ<sup>३</sup>.

$$प अ \times प अ \times प अ = प^३ अ^३ = अ^३ कां कीं प^३ = १$$

$$क अ \times क अ \times क अ = क^३ अ^३ = अ^३ कां कीं क^३ = १$$

आणि  $\kappa^2 + \text{अक्ष} + \text{अ}^2 = 0$  हें उलगडण्याचें समजल्यानंतर,  $\kappa^3 - \kappa^3 = 0$  या समीकरणांतून वर प्रमाणें निघेल.

क्ष हा १ याचा चतुर्घातमूळांतून एक चतुर्घातमूळ असो. तेव्हां  $\kappa^4 = 1$ , अथवा  $\kappa^4 - 1 = 0$ ; ह्मणजे,

$(\kappa^2 - 1)(\kappa^2 + 1) = 0$ , यामुळे,  $\kappa^2 - 1 = 0$  अथवा  $\kappa^2 + 1 = 0$ ,  $\kappa^2 - 1 = 0$  याचीं उत्तरे पूर्वीप्रमाणें,  $-1$  आणि  $+1$  अशीं आहेत; आणि  $\kappa^2 + 1 = 0$  याचीं उत्तरे,  $\kappa = +\sqrt{-1}$  अथवा  $\kappa = -\sqrt{-1}$ . यामुळे १ यास चार चतुर्घातमूळे आहेत, ह्मणजे  $+1, -1, +\sqrt{-1}$  आणि  $-\sqrt{-1}$ . चालती रीति लाविल्यानें हें खरें आहे असें कळेल; उदाहरण,

$$\begin{aligned} (\sqrt{-1})^2 &= -1, (\sqrt{-1})^3 = (\sqrt{-1})^2 \cdot \sqrt{-1} = -\sqrt{-1} \\ (\sqrt{-1})^2 &= (\sqrt{-1})^3 \cdot \sqrt{-1} = -\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \\ &= -(\sqrt{-1})^2 = -(-1) = 1 \end{aligned}$$

अधिक शोध झाल्यावांचून  $\sqrt{-\kappa}$  असे तऱ्हेचा पद्धतीचा केवळ तर्कानें उपयोग करणें पुढीलप्रमाणें आहे; अ, ब, क, आणि ड, हीं धन किंवा ऋण परिमाणें असोत. तर

$$\text{अ} + \text{ब} \sqrt{-\kappa} = \text{क} + \text{ड} \sqrt{-\kappa}$$

अ = ब आणि क = ड असे नसतील तर वरचें समीकरण खरें होणार नाही. कां तर मनांत आण कीं अ = क  $\pm$  ई असें आहे, ह्मणजे क आणि अ यामध्ये कांहीं भेद आहे, तेव्हां

$$\text{क} \pm \text{ई} + \text{ब} \sqrt{-\kappa} = \text{क} + \text{ड} \sqrt{-\kappa} \quad \sqrt{-\kappa} = \frac{\pm \text{ई}}{\text{ड} - \text{ब}}$$

ह्मणजे  $\sqrt{-\kappa}$  हा धन किंवा ऋण परिमाण आहे, हें अशक्य. यामुळे  $(\pm \text{ई}) \div (\text{ड} - \text{ब})$  हें चालीप्रमाणें बीजगणितानुरूप परिमाण होण्यास अशक्य. आतां जर ई = 0, आणि ड आणि ब हे बरोबर नसतील, तर याप्रमाणें होईल.  $\sqrt{-\kappa} = 0 \div (\text{ड} - \text{ब}) = 0$ , हेंही खरें नाही; जर

ईला कांहीं नियमित किंमत असेल आणि  $ड = ब$  असेल तेव्हां याप्रमाणें होईल,  $\sqrt{-क्ष} = \pm ई \div ०$ , हें ८७ पृष्ठावरचे लिहिलेल्या विषयाशीं मिळत नाहीं, कां कीं कोणतेंहि परिमाण त्याणें तेंच गुणिलें असतां तें मोठें आहे ह्मणून गुणाकार ऋण होत नाहीं, अथवा जरी परिमाण अधिक मोठें होत जातें तरीहि तो गुणाकार ऋण होण्यास अधिक जवळ होत नाहीं. ही कल्पना मात्र राहिली, कीं  $ई = ०$  आणि  $ड - ब = ०$ , ह्मणजे  $अ = क$  आणि  $ड = ब$ ; आणि  $\sqrt{-क्ष}$  यांविषयीं एथपर्यंत हेंच मात्र रूप मिळालें, ह्मणजे  $\frac{०}{०}$ . परंतु जा समीकरणापासून हें निघालें तें समीकरण नेहेमी खरें आहे इतकें मात्र हें दाखवितें; जर अद्यापि असें समीकरण अगदी खरें असें मान्य केले, तर जेव्हां  $अ = क$  आणि  $ब = ड$  असेल तेव्हां वरचे रूपाचें उत्तर निघेल. पहा वरचे गोष्टीवरून पुरता निर्वाह होत नाहीं; त्यापासून हें मात्र सिद्ध होतें, कीं  $अ = क$  आणि  $ब = ड$  असें नसेल, तर समीकरण कधींहि खरें होऊं शकत नाहीं; तथापि  $अ = क$  आणि  $ब = ड$  असें जरी आहे तरी समीकरण खरें आहे, याविषयीं अद्यापि वाद आहे. जर क्ष कांहीं तऱ्हेचे परिमाणाचा दर्शक नसेल, तर क्ष = क्ष ह्या समीकरणास खरें आहे असें विचारपूर्वक मानणार नाहीं; = या चिन्हाचे अर्थांत अशी कांहीं कल्पना आहे, कीं ती परिमाणावांचून दुसरे कशासहि लागत नाहीं, असें ह्मणण्यांत येईल. परंतु जर कोणी असें मानील, तर त्याणें १३१ पृष्ठावर, = या चिन्हाचे विस्तार रूप व्याख्यान पहावें, तथापि शिकणारानें ध्यानांत धरावें कीं जोंपर्यंत  $\sqrt{-क्ष}$  इत्यादि चिन्हाशीं चांगली माहितगारी झाली नाहीं, तोंपर्यंत  $\sqrt{-क्ष}$ , इत्यादि चिन्हांवर, खांतले व्याख्यानाची अर्थशक्ती लागू होती असें त्याचे ध्यानांत पकें येणार नाहीं.

परंतु वरचे सारिखीं दुसरीं कांहीं बीजानुरूप परिमाणें आहेत त्यांचा आतां विचार केला पाहिजे. तीं याप्रमाणें आहेत,  $\sqrt{३}$ ,  $\sqrt{५}$ ,  $\sqrt[३]{२}$ , इत्यादि यांचा निःशेष किंमती निघत नाहीत, परंतु १८३ पृष्ठाप्रमाणें जवळ जवळ मात्र निघतात. या पुढील समीकरणामध्ये,  $अ$ ,  $ब$ ,  $क$ , आणि  $ड$ , पूर्ण किंवा अपूर्णांक असतील, आणि जर  $अ = क$  आणि  $ब = ड$  असें नसेल, तर तें समीकरण खरें होऊं शकत नाहीं असें ह्मणतों. तें हें समीकरण

$$अ+ब\sqrt{३} = क+ड\sqrt{३}$$

$\sqrt{३}$  याचे जागीं  $\sqrt{क्ष}$  मांडिला असतां, प्रतिशब्दीं वरची कल्पना, लागू होईल, परंतु जर ड, व, ई, पूर्ण किंवा अपूर्णांक असतील, तर

$$\sqrt{३} = \frac{\pm ई}{ड-व}$$

असें खोटे रूप जें होऊं शकत नाहीं तें निघतें.

क्ष आणि य हे पूर्णांकाचे वर्ग अथवा अपूर्णांक नसतील, आणि जर नियमित पूर्ण किंवा अपूर्णांकांचे जागीं सर्व अक्षरें असतील, तर वरचे रितीप्रमाणें हें सिद्ध होईल कीं

$$अ+ब\sqrt{क्ष} = क+ड\sqrt{य} \dots\dots (अ)$$

तर यांत अ = क असावा, आणि यामुळे व  $\sqrt{क्ष} = ड\sqrt{य}$ . कां कीं जर असें नसलें, तर अ = क  $\pm ई$  घे; यास अचे जागीं मांड, आणि क वजा कर,

$$\text{तर} \quad \pm ई + व\sqrt{क्ष} = ड\sqrt{य}$$

दोन्ही बाजूंचा वर्ग करून याप्रमाणें होतें

$$(\pm ई)^2 + २(\pm ई) व\sqrt{क्ष} + (व\sqrt{क्ष})^2 = (ड\sqrt{य})^2$$

$$\text{अथवा} \quad ई^2 \pm २ ईव\sqrt{क्ष} + व^२क्ष = ड^२य$$

$$\text{यामुळे} \quad \sqrt{क्ष} = \frac{ड^२य - व^२क्ष - ई^२}{\pm २ईव}$$

झणजे,  $\sqrt{क्ष}$  यास नियमित अपूर्णांकानें दाखवितां येत नाहीं, तो येथें तसा दाखविला आहे हें खोटें आहे. तर यामुळे अ = क आणि व  $\sqrt{क्ष} = ड\sqrt{य}$  असें केल्यानें मात्र वरचे (अ) समीकरणास खरें रूप देतां येतें.

$४+२\sqrt{३}$ ,  $२१+४\sqrt{५}$ , इत्यादि जातीचे परिमाणांचें वर्गमूळ काढण्यास कांहीं पक्षीं हैं वरचें मूळकारण लावलें जाईल.  $२+\sqrt{७}$  असें परिमाण घे, आणि त्याचा वर्ग कर.

$$\begin{aligned}(२+\sqrt{७})^२ &= २^२ + २ \times २\sqrt{७} + (\sqrt{७})^२ \\ &= ४ + ४\sqrt{७} + ७ = ११ + ४\sqrt{७}\end{aligned}$$

आतां मनांत आण कीं,  $११+४\sqrt{७}$  असें परिमाण दिलें असेल, तर या दोन पुढील गोष्टी कशा काढाव्या ? १. कीं त्यास त्याच रूपाचें वर्गमूळ आहे.\* २. तें वर्गमूळ  $२+\sqrt{७}$  असें आहे कीं काय ? यापुढील प्रमाणें काढाव्या; जर  $११+४\sqrt{७}$  यास वर्गमूळ तशेंच रूपाचें असेल, तर तें वर्गमूळ  $क्ष+\sqrt{य}$  आहे असें मान, ह्मणून

$\sqrt{११+४\sqrt{७}} = क्ष+\sqrt{य}$ , या समीकरणाचे दोन्ही बाजूंचा वर्ग कर.

$$\begin{aligned}११+४\sqrt{७} &= क्ष^२ + २क्ष\sqrt{य} + (\sqrt{य})^२ \\ &= क्ष + य + २क्ष\sqrt{य}\end{aligned}$$

यावरून  $क्ष^२ + य = ११$  आणि  $२क्ष\sqrt{य} = ४\sqrt{७}$

यामुळे  $(-)$   $क्ष^२ - २क्ष\sqrt{य} + य = ११ - ४\sqrt{७}$

परंतु या समीकरणाची पहिली बाजू,  $क्ष-\sqrt{य}$ , याचा वर्ग आहे. अथवा

$$\begin{aligned}(क्ष-\sqrt{य})^२ &= ११-४\sqrt{७} \text{ ह्मणजे, } क्ष-\sqrt{य} = \sqrt{११-४\sqrt{७}} \\ \text{परंतु } क्ष+\sqrt{य} &= \sqrt{११+४\sqrt{७}}\end{aligned}$$

हीं वरचीं दोन समीकरणें परस्पर गुण. तर

\* पाहा, कीं  $११+४\sqrt{७}$  आणि  $क्ष+\sqrt{य}$  या दोहोंमध्ये रूपाचा बहुत फेर नाही, कीं कीं  $४\sqrt{७} = \sqrt{(४)^२ \times ७} = \sqrt{११२}$ ; यावरून  $११+४\sqrt{७} = ११ + \sqrt{११२}$ .

$$(\text{क्ष} + \sqrt{य})(\text{क्ष} - \sqrt{य}) = \sqrt{११+४\sqrt{७}} \sqrt{११-४\sqrt{७}}$$

$$\text{अथवा } \text{क्ष}^2 - य = \sqrt{(११+४\sqrt{७})(११-४\sqrt{७})} = \sqrt{१२१-११२} = ३$$

$$\text{परंतु } \text{क्ष}^2 + य = ११$$

$$(+)\ २ \text{ क्ष}^2 = १४ \quad \text{क्ष}^2 = ७ \quad \text{क्ष} = \sqrt{७}$$

$$(-)\ २ य = ८ \quad य = ४ \quad \sqrt{य} = २$$

यामुळे  $\sqrt{११+४\sqrt{७}}$  अथवा  $\text{क्ष} + \sqrt{य} = \sqrt{७+२}$ , क्षणून, जा रितीने  $११+४\sqrt{७}$  असे निघाले तसेच हे आहे.

$\sqrt{अ+ब\sqrt{क}}$  हे करण्यासाठी वरची रीति लावितो. याचे जागीं  $\text{क्ष} + \sqrt{य}$  घे,

$$\begin{aligned} \text{तर} \quad अ + ब\sqrt{क} &= (\text{अ} + \sqrt{य})^2 \\ &= \text{क्ष}^2 + य + २ \text{क्ष}\sqrt{य} \end{aligned}$$

$$\text{यामुळे} \quad अ = \text{क्ष}^2 + य \quad \text{आणि} \quad ब\sqrt{क} = २ \text{क्ष}\sqrt{य}$$

$$\text{यामुळे} \quad अ - ब\sqrt{क} = \text{क्ष}^2 + य - २ \text{क्ष}\sqrt{य} = (\text{क्ष} - \sqrt{य})^2$$

$$\text{अथवा} \quad \text{क्ष} - \sqrt{य} = \sqrt{अ - ब\sqrt{क}}$$

$$\text{परंतु} \quad \text{क्ष} + \sqrt{य} = \sqrt{अ + ब\sqrt{क}}$$

$$(x) \quad \text{क्ष}^2 - य = \sqrt{(अ - ब\sqrt{क})(अ + ब\sqrt{क})} = \sqrt{अ^2 - ब^2 क}$$

$$\text{परंतु} \quad \text{क्ष}^2 + य = \quad \quad \quad अ$$

$$(+)\ २ \text{ क्ष}^2 = अ + \sqrt{अ^2 - ब^2 क}$$

$$\text{क्ष} = \sqrt{\frac{१}{२} अ + \frac{१}{२} \sqrt{अ^2 - ब^2 क}}$$

$$(-)\ २ य = अ - \sqrt{अ^2 - ब^2 क}$$

$$\sqrt{य} = \sqrt{\frac{१}{२} अ - \frac{१}{२} \sqrt{अ^2 - ब^2 क}}$$

$$\text{क्ष} + \sqrt{य} = \sqrt{\frac{१}{२} अ + \frac{१}{२} \sqrt{अ^2 - ब^2 क}} + \sqrt{\frac{१}{२} अ - \frac{१}{२} \sqrt{अ^2 - ब^2 क}}$$

आणि या समीकरणाची दुसरी बाजू  $a + b\sqrt{c}$  चें वर्गमूल आहे.

ताळा  $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - b^2c}$  हें दाखविण्यासाठी प घे.

$\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - b^2c}$  हें दाखविण्यासाठी क घे.

$$\begin{aligned} \text{पक} &= \left(\frac{1}{2}a\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{a^2 - b^2c}\right)^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}(a^2 - b^2c) \\ &= \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2c = \frac{1}{4}b^2c; \text{ यामुळे } \sqrt{\text{पक}} = \frac{1}{2}b\sqrt{c}. \end{aligned}$$

पूर्वीचे सिद्धांताप्रमाणे,

$$\begin{aligned} \sqrt{a + b\sqrt{c}} &= \sqrt{p} + \sqrt{q}, (a + b\sqrt{c}) = (\sqrt{p} + \sqrt{q})^2 \\ &= (\sqrt{p})^2 + 2\sqrt{p}\sqrt{q} + (\sqrt{q})^2 = p + 2\sqrt{pq} + q \end{aligned}$$

$$\text{परंतु } p + q = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a = a, \quad 2\sqrt{pq} = b\sqrt{c}$$

यामुळे  $p + q + 2\sqrt{pq} = a + b\sqrt{c}$ ; यावरून दिसते, की वरचा सिद्धांत खरा आहे.

हा सिद्धांत व्यवहारी कामाचे फार उपयोगी नाही, परंतु  $b\sqrt{c}$  इत्यादि तऱ्हेचीं पदे कामांत आणायचे अभ्यासासाठी फार उपयोगी आहे. जेव्हां  $a^2 - b^2c$  याचें खरें वर्गमूल असेल, तेव्हां तो सिद्धांत याचें केवळ सरळ रूप करितो; असें नसलें, तर त्याचे उलटें करितो, कांकीं  $\sqrt{a + b\sqrt{c}}$  यांत वर्गमूलाचें वर्गमूल एक वेळा येतें, परंतु त्याचे वर काढलेल्या किमतीमध्ये त्याचे वर्गमूलाचें वर्गमूल दोन वेळा येतें. असें, या पुढील दोन पद्धती जरी सारख्या खऱ्या आहेत तरी तो सिद्धांत पहिल्या पद्धतीला सरळ रूप देतो, परंतु दुसऱ्या पद्धतीस सरळ रूप देत नाही.

$$\sqrt{12 + 2\sqrt{30}} = \sqrt{10} + \sqrt{2}$$

$$\sqrt{12 + 2\sqrt{31}} = \sqrt{\frac{13}{2}} + \frac{1}{3}\sqrt{84} + \sqrt{\frac{13}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{84}}$$

उलटा विषय.  $a^2$  पेक्षां  $b^2c$  अधिक आहे. किंवा  $a^2 - b^2c$

ऋण परिमाण आहे, अशा पक्षाला वरचे उत्तर लाव, उदाहरण,  
 $२ + \sqrt{८}$ , यांत  $अ=२$ ,  $ब=१$ ,  $क=८$  असा पक्ष ह्याण,

$$\sqrt{२ + \sqrt{८}} = \sqrt{१ + \frac{१}{२}\sqrt{-४}} + \sqrt{१ - \frac{१}{२}\sqrt{-४}} \dots \dots (अ)$$

$\sqrt{-१}$ , इत्यादि अशे तऱ्हेचे चिन्हाचा अर्थ अद्यापि समजाविला नाही, तर  $२ + \sqrt{८}$  याचे वर्गमूल त्याच तऱ्हेचे आहे कीं काय ? खचित् नाही; कांकीं अंकगणित रितीने त्याचे वर्गमूल  $२ + \sqrt{४}$  आणि  $२ + \sqrt{९}$  या दोहोंचे वर्गमूळामध्ये किंवा ४ आणि ९ यांचे वर्गमूळामध्ये, कोठे तरी अवळ अवळ सांपडेल.

तर (अ) ही पद्धति खचित् अंकगणित रूपाची आहे असे मान्य करावे कीं काय ? याविषयीं हें लक्षांत आलें पाहिजे, कीं जी पद्धति खरी अंकगणितरूपाची पद्धति आहे, ती केवळ रितीने, अशक्यरूप दिसे असे करितां येईल.

उदाहरण,

$$क्ष + य = (क्ष + क\sqrt{-१}) + (य - क\sqrt{-१})$$

$$\begin{aligned} क्ष^२ + य^२ &= क्ष^२ - (-य^२) = (क्ष)^२ - (य\sqrt{-१})^२ \\ &= (क्ष + य\sqrt{-१})(क्ष - य\sqrt{-१}) \end{aligned}$$

(अ) ही पद्धति अधिक तपासून पहाण्यासाठीं, तिचे प्रत्येक पदाचे वर्गमूल रितीप्रमाणें काढ.

$$अ = १, ब = \frac{१}{२}, क = -४, असे घे.$$

$$\sqrt{१ + \frac{१}{२}\sqrt{-४}} = \sqrt{\frac{१}{२} + \frac{१}{२}\sqrt{२}} + \sqrt{\frac{१}{२} - \frac{१}{२}\sqrt{२}}$$

$$\sqrt{१ - \frac{१}{२}\sqrt{-४}} = \sqrt{\frac{१}{२} + \frac{१}{२}\sqrt{२}} - \sqrt{\frac{१}{२} - \frac{१}{२}\sqrt{२}}$$

वरचे दोन समीकरणांचे दुसऱ्ये दोन बाजूंमध्ये अद्यापि ऋण परिमाणाचे वर्गमूल आहे; कांकीं,  $\sqrt{२}$  पक्षां १ कमी आहे, यामुळे  $\frac{१}{२}\sqrt{२}$



यापेक्षां  $\frac{1}{2}$  कमी आहे, अथवा  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}$  ऋण आहे, वरचे दोन समीकरणांची बेरीज कर;

$$\sqrt{1 + \frac{1}{2}\sqrt{-8}} + \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sqrt{-8}} = 2\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}}$$

परंतु जा पद्धतीने आरंभ केला ती वेगळ्या रूपाने हीच आहे;

$$\sqrt{8(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2})} \text{ अथवा } \sqrt{2 + 2\sqrt{2}} \text{ अथवा } \sqrt{2 + \sqrt{8 \times 2}}$$

वरचा क्ष+य, यामध्ये बुद्ध्या जो फेरफार केला त्या सारिखी हयगय, लागू पडे अशी रीति घेतल्याने घडली; आणि जर बँक यापेक्षां अ<sup>३</sup> कमी असेल, तर  $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ , अथवा सामान्य रूपाने  $\sqrt{अ + ब\sqrt{क}}$  यास उत्तराचे जागीं जर क ऋण परिमाण नसेल तर पुढे लिहिलेल्या रूपाप्रमाणे मांडतां येणार नाहीं,

$$\sqrt{प + \sqrt{क}} + \sqrt{प - \sqrt{क}}$$

$\sqrt{अ + ब\sqrt{क}}$  याचें मूळ काढायास अवघड आहे आणि तें फार उपयोगी नाहीं, याजकरितां तें सोडून देतों.

अभ्यासाकारितां उदाहरणें. हे पुढील सांगीतलेले सिद्धांत सिद्ध कर;

१. -१ याचीं तीन बीजगणितरूप घनमूळें आहेत. पहिलें -१ आणि  $क्ष^३ - क्ष + १ = ०$  याचीं उत्तरे;  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-३}$  आणि  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-३}$  हीं दोन, मिळून तीन.

२. -१ याचीं चार बीजगणितरूप चतुर्घातमूळें या पुढीलप्रमाणे आहेत.

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{2}\sqrt{2}(१ + \sqrt{-१}) & \frac{1}{2}\sqrt{2}(१ - \sqrt{-१}) \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}(-१ + \sqrt{-१}) & \frac{1}{2}\sqrt{2}(-१ - \sqrt{-१}) \end{array}$$

३. १ याचीं आठ बीजगणितरूप अष्टघातमूळें या पुढीलप्रमाणे आहेत.

$$\pm 1, \pm \sqrt{-1}, \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}(1+\sqrt{-1}), \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}(1-\sqrt{-1}),$$

$\sqrt{-1}$  याचा सगळ्या किमती वरचे पद्धतीमध्ये आहेत, त्या कशा सार्थी आहेत याचे कारण सांग ?

असे परिमाण दिले असेल, जामध्ये दुसऱ्या वर्णाचीं करणीचिन्हे असतील ह्मणजे जामध्ये वर्गमूळे आहेत, तर असा एक गुणक काढ कीं त्यानें ते परिमाण गुणिलें असतां, गुणाकार, करणी मुक्त होईल.

१. एकाकी करणी पद जसे,  $\sqrt{3}$ . एथें  $\sqrt{3}$  हा त्याचा गुणक आहे अथवा जर अ \* राशिनल् आहे, तर अ  $\sqrt{3}$  हाहि त्याचा गुणक आहे; कांकीं  $\sqrt{3} \times \text{अ} \sqrt{3} = 3\text{अ}$ , हाहि राशिनल् आहे.

२. द्वियुक्पद, जाचीं एक किंवा दोन्ही पदे निख करणी असतील, जसे  $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ .  $(\text{अ} + \text{ब})(\text{अ} - \text{ब}) = \text{अ}^2 - \text{ब}^2$ , तेव्हां जर अ आणि ब हीं एकाकी करणी पदे असतील, तर अ-ब राशिनल् आहे; यामुळे अ+ब यांचा गुणक अ-ब आहे, आणि याचे उलटेंहि. उदाहरण,  $\sqrt{3} + \sqrt{2}$  हे  $\sqrt{3} - \sqrt{2}$  यांनीं गुणिले तर  $3 - 2$ , अथवा १ होतो;  $2\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{6}$  हे  $2\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{6}$  यांनीं गुणिले तर  $4 \times 3 - \frac{1}{4} \times 6$ , अथवा  $10\frac{1}{4}$  होतात.

३. त्रियुक्पद, जामध्ये दोन किंवा तीन करणी पदे आहेत; जसे  $\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{7}$ , अथवा  $\sqrt{\text{अ}} + \sqrt{\text{ब}} + \sqrt{\text{क}}$ . शेवटची पद्धति  $\sqrt{\text{अ}} + \sqrt{\text{ब}} - \sqrt{\text{क}}$  यांनीं गुण. त्यापासून हें होतें,  $(\sqrt{\text{अ}} + \sqrt{\text{ब}})^2 - (\sqrt{\text{क}})^2$  अथवा  $\text{अ} + 2\sqrt{\text{अब}} + \text{ब} - \text{क}$  अथवा  $\text{अ} + \text{ब} - \text{क} + 2\sqrt{\text{अब}}$ . आतां  $\text{अ} + \text{ब} - \text{क} - 2\sqrt{\text{अब}}$  यांनीं गुण; त्यापासून हें होतें,  $(\text{अ} + \text{ब} - \text{क})^2 - (2\sqrt{\text{अब}})^2$  अथवा

\* राशिनल्. हा शब्द बीजगणितामध्ये कामांत आणितात, त्याचा अर्थ करणीचिन्हापासून मोकळा असा आहे; ह्मणजे काहीं व्यवहारी पूर्ण किंवा अपूर्णाक राशिनल् आहेत, जसे २ हा अंक राशिनल् आहे आणि  $\sqrt{8}$  यास जरी करणी चिन्ह आहे तरी ते राशिनल् आहे परंतु  $\sqrt{2}$  हा अंक करणीगत अथवा इरराशिनल् आहे.

$(अ+ब-क)^2 - ४$  अब. यामुळे  $\sqrt{अ} + \sqrt{ब} - \sqrt{क}$  आणि  $अ+ब-क-२\sqrt{अब}$  या दोहोंचा गुणाकार इच्छिलेला गुणक आहे,

$$(\sqrt{३} + \sqrt{५} - \sqrt{७})(\sqrt{३} + \sqrt{५} + \sqrt{७}) = १ + २\sqrt{१५}$$

$$(१ + २\sqrt{१५})(१ - २\sqrt{१५}) = १ - ६० = -५९$$

त्रियुक्पदापेक्षां दुसऱ्या बहुयुक् करणीपदांचा विचार करण्याचें प्रयोजन क्वचित् पडतें किंवा कधीहि पडत नाहीं.

अपूर्णांकाचा छेदस्थळीं करणीपदें असतील तर त्यांची किंमत काढायास वरची कल्पना लावितां येईल. उदाहरण,  $१ \div (\sqrt{३} + १)$  याची किंमत काढणें असेल, तर छेद शुद्ध करायासाठीं तिहींचें वर्गमूल काढूं नको, परंतु अंश आणि छेद या दोहोंस  $\sqrt{३} - १$  यांणीं गुण, यावरून हें होईल.

$$\frac{१}{\sqrt{३} + १} = \frac{\sqrt{३} - १}{(\sqrt{३} + १)(\sqrt{३} - १)} = \frac{\sqrt{३} - १}{३ - १} = \frac{१}{२}(\sqrt{३} - १)$$

स्पष्ट आहे कीं या समीकरणाचे पहिल्ये बाजूची किंमत काढण्यापेक्षां दुसऱ्या बाजूची किंमत काढायास सोपी आहे;

$$\frac{\sqrt{६} + \sqrt{७}}{\sqrt{६} - \sqrt{५}} = \frac{(\sqrt{६} + \sqrt{७})(\sqrt{६} + \sqrt{५})}{(\sqrt{६} - \sqrt{५})(\sqrt{६} + \sqrt{५})} = ६ + \sqrt{४२} + \sqrt{३०} + \sqrt{३५}$$

यापेक्षां अधिक मोठे मूळाचा विचार करण्याचें प्रयोजन असेल तेव्हां जा एकाकी करणीपदांत असें पद येतें, जसें  $\sqrt[३]{८}$ , अंश  $\sqrt[३]{५}$ . यांतून प्रथमाचा गुणक  $(\sqrt[३]{८})^३$  अथवा  $८^{\frac{३}{३}}$  आहे, कां कीं  $८^{\frac{१}{३}} \times ८^{\frac{२}{३}} = ८^{\frac{३}{३}} = ८$ . या तऱ्हेनें हीं पुढील उत्तरें निघतील;

$$\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}} = \frac{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3}} = \frac{\sqrt[3]{12}}{3}; \quad \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{84}}{2}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \text{ अथवा } \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \frac{a^{\frac{1}{n}} \times b^{\frac{n-1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}} \times b^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{n-1}{n}}}{b}$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}} = \frac{a^{\frac{n-1}{n}} b^{\frac{n-1}{n}}}{a b}; \quad \frac{2}{\sqrt[3]{3} \sqrt[3]{8}} = \frac{2 \sqrt[3]{9} \sqrt[3]{18}}{12}$$

या अध्यायांतील सर्व गोष्टीविषयींचीं हीं पुढील उदाहरणें आहेत ;  
त्यांस जपून उलगडून ताळा पहावा.

$$a \times b^{-1} \times a^{-2} \times b^{\frac{2}{3}} = a^{-2} b^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{a^2 b^{\frac{1}{3}}}$$

$$a^m \div a^{-n} = a^{m+n} = a^m \times a^n = 1 \div a^{-m-n}$$

$$a^m \times b^{-n} = b^{-n} \div a^{-m} = a^m \div b^{n-m} = 1 \div a^{-m} b^{n-m}$$

$$\sqrt{a} \sqrt{a} \sqrt{a} = a^{\frac{3}{2}} \quad \sqrt[3]{(a \sqrt{(a \sqrt[3]{a})})} = a^{\frac{2}{3}}$$

$$\sqrt[3]{\left\{ \frac{m+1}{a^{m-1} b} \right\}^{\frac{1}{3}} m} = \frac{m^{\frac{1}{3}} m}{a^{\frac{m-1}{3} + n} b^{\frac{m-1}{3} + n}}$$

$$\left\{ \frac{p}{k-1} \right\}^{\frac{1}{2}} \times \left\{ \frac{k}{p-2} \right\}^{\frac{1}{2}} = (pk^{-1}r)^{\frac{1}{2}} \times (p^{-2}kr^{-1})^{\frac{1}{2}}$$

$$= p^{\frac{1}{2}} k^{-\frac{1}{2}} r^{\frac{1}{2}} \times p^{\frac{1}{2}} k^{-\frac{1}{2}} r^{\frac{1}{2}} = p^{\frac{1}{2}} k^{-\frac{1}{2}} r^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt[2]{\frac{p^{11} r^{12}}{k^{18}}} = \sqrt[2]{p^{11}} \sqrt[2]{\left(\frac{r}{k}\right)^{\frac{12}{18}}} = \frac{p^{\frac{11}{2}} k^{\frac{1}{3}} r^{\frac{2}{3}}}{k}$$

$$\sqrt{a^2 b^2 c^2} = \sqrt{a^2 b^2} \cdot \sqrt{c^2} = ab \sqrt{c^2} = \frac{ab^2 c}{\sqrt{b^2 c}}$$

$$\sqrt[3]{a^3 b^3 c^3} = \sqrt[3]{a^3 b^3 c^3} \cdot \sqrt[3]{a^3 b^3 c^3} = a^2 b^2 c^2 \sqrt[3]{a^3 b^3 c^3}$$

$$a^{\frac{8}{3}} b^{\frac{4}{3}} c^{\frac{1}{3}} = a^{1+\frac{1}{3}} b^{2+\frac{1}{3}} c^{\frac{1}{3}} = a^1 b^2 c^{\frac{1}{3}}$$

$$\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}} \quad \sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{असें लिहिण्याचा पाठ नाही, परंतु} \\ \text{लिहितां येईल, कां तें सांग !} \end{array} \right.$$

$$\sqrt{160} = \sqrt{16 \times 10} = 4\sqrt{10}; \quad \sqrt[3]{160} = \sqrt[3]{8 \times 20} = 2\sqrt[3]{20}$$

$$\sqrt{3332} = 18\sqrt{17} \quad \sqrt[3]{3332} = 3\sqrt[3]{128}, \quad \sqrt[3]{32} = 2\sqrt[3]{2}$$

$$\sqrt[3]{\frac{3}{8}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{2}, \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{ab}}$$

$$a: \sqrt{ab} :: \sqrt{ab}: b \quad a^{\frac{1}{2}}: a^{\frac{1}{2}} :: a^{-\frac{1}{2}}: a^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{3}}}, \quad \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{ab}} = \frac{1 + \sqrt{b}}{\sqrt{a}(1 - b)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a+1}-1} = \frac{1}{a} (\sqrt{a+1} + 1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{a+k} + \sqrt{a-k}} = \frac{1}{2k} (\sqrt{a+k} - \sqrt{a-k})$$

$$\frac{\sqrt{a+k} + \sqrt{a-k}}{\sqrt{a+k} - \sqrt{a-k}} = \frac{2a + 2\sqrt{a^2 - k^2}}{2k} = \frac{a}{k} + \sqrt{\frac{a^2}{k^2} - 1}$$

$$\sqrt{a^2 - k^2} = a \sqrt{1 - \frac{k^2}{a^2}} = k \sqrt{\frac{a^2}{k^2} - 1} = \sqrt{ak} \sqrt{\frac{k}{a} - \frac{a}{k}}$$

$$\sqrt{a+k} = \sqrt{a} \sqrt{1 + \frac{k}{a}} = \sqrt{k} \sqrt{\frac{a}{k} + 1} = \sqrt{ak} \sqrt{\frac{1}{k} + \frac{1}{a}}$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{b^2 - 4ak} = \sqrt{\frac{b^2}{4}} - ak = \frac{b}{2} \sqrt{1 - \frac{4ak}{b^2}} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ak}{4}}$$

$$\sqrt{2ak - k^2} = k \sqrt{2\frac{a}{k} - 1} = \sqrt{k} \sqrt{2a - k} = a \sqrt{2\frac{k}{a} - \frac{k^2}{a^2}}$$

$$\frac{a + b\sqrt{-1}}{k + y\sqrt{-1}} = \frac{a + b + (b^2 - ay)\sqrt{-1}}{k^2 + y^2}$$

$$\begin{aligned}
 (१ + \sqrt{-१}) &= \sqrt{-१} (१ - \sqrt{-१}) & \sqrt{-७} &= \sqrt{७} \cdot \sqrt{-१} \\
 \sqrt{-८} &= २\sqrt{-१} & \sqrt{-१} &= \frac{१}{२}\sqrt{२} \cdot \sqrt{-१} \\
 \sqrt{-\frac{अ}{ब}} &= \frac{\sqrt{अब}}{ब} \cdot \sqrt{-१} & \sqrt{-८} \times \sqrt{-३} &= -\sqrt{१२}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (अ-ब) &= (अ^{\frac{१}{२}}-ब^{\frac{१}{२}})(अ^{\frac{१}{२}}+ब^{\frac{१}{२}}) = (अ^{\frac{१}{२}}-ब^{\frac{१}{२}})(अ^{\frac{१}{२}}+अ^{\frac{१}{२}}ब^{\frac{१}{२}}+ब^{\frac{१}{२}}) \\
 &= (अ^{\frac{१}{२}}-ब^{\frac{१}{२}})(अ^{\frac{१}{२}}+अ^{\frac{१}{२}}ब^{\frac{१}{२}}+अ^{\frac{१}{२}}ब^{\frac{१}{२}}+ब^{\frac{१}{२}})
 \end{aligned}$$

$$अ+ब = (अ^{\frac{१}{२}}+ब^{\frac{१}{२}})(अ^{\frac{१}{२}}-अ^{\frac{१}{२}}ब^{\frac{१}{२}}+अ^{\frac{१}{२}}ब^{\frac{१}{२}}-अ^{\frac{१}{२}}ब^{\frac{१}{२}}+ब^{\frac{१}{२}})$$

$$(अ^{\frac{१}{२}}+अ^{\frac{१}{२}}+१)^२ = अ^{\frac{१}{२}}+२अ+३अ^{\frac{१}{२}}+२अ^{\frac{१}{२}}+१$$

$$(अ^{\frac{१}{२}})^{\frac{१}{२}} = अ \quad (अब^{\frac{१}{२}}क^{-२})^{-\frac{१}{२}} = अ^{-\frac{१}{२}}ब^{-\frac{१}{२}}क^{\frac{१}{२}}$$

पहा. अ  $\sqrt{-१}$  अथवा  $\sqrt{-अ^२}$ , अ +  $\sqrt{-ब}$  अथवा अ +  $\sqrt{ब} \sqrt{-१}$ , या रूपाचे परिमाणांस अशक्यरूप परिमाणें ह्मणण्याची चाल आहे. त्यांला अर्थ दिला नाहीं ह्मणून आद्यपि त्यांला तेंच नांव आहे; तशेच रितीनें पहिले अध्यायामध्ये १०-१४ अशक्यरूपाचे होते. या पुस्तकांत त्यांचा मोठा बीज अर्थ समजायाचा नाहीं परंतु त्यांचा अर्थ याहून पुढील विषयांत कळेल; तर त्यांस एथें शुद्धचिन्हे ह्मणतों. बीजगणिताची भाषा चिन्हरूप आहे; परंतु एथपर्यंत जितक्या पद्धती आल्या आहेत, जांमध्ये अक्षर किंवा अंक आहे, त्यांस अंकसंबंधीं अर्थ आहे, ह्मणून त्या पद्धती महत्वाचा दर्शक आहेत. परंतु  $\sqrt{-१}$  यास अशे तऱ्हेचा अर्थ दिला नाहीं, यामुलें तें + किंवा - या चिन्हासारिखें, किंवा यापेक्षा अधिक चिन्हरूप जातीचें आहे कां कीं त्यापासून महत्वाचा बोध अथवा कृति करण्याचा समज होत नाही. यावरून

शुद्ध चिन्हाशीं कृति करितांना, आपल्यास अनुभव मात्र आश्रय आहे, आणि जेव्हां अनुभवापासून कार्य होत नाही, तेव्हां मनांत कांहीं नवा संकेत धरिला पाहिजे. जर अशे तऱ्हेचे चिन्हांचा अर्थ आपले दृष्टीस येत नाही, कीं जेणेकरून त्या चिन्हांशीं चालते रितीने कृति करितां येईल, तर पूर्वीच समजांत आले आहे, कीं कृतीचे शेवटीं तीं सर्व टाकितां येतील, आणि त्या चिन्हांस ह्या रिती मात्र लावितां येतील. लक्ष्य देण्याजोगा पुढला मात्र पक्ष आहे, ह्मणजे,  $\sqrt{-अ} \times \sqrt{-ब}$  याला दर्शवायास चिन्ह करावें. चालते रितीप्रमाणें, ही पद्धति  $\sqrt{-अ} \times -ब$  अथवा  $\sqrt{अब}$ , अथवा  $\sqrt{अ} \times \sqrt{-१}$  गुणिता  $\sqrt{ब} \times \sqrt{-१}$  अथवा  $\sqrt{अब} \times -१$ , ह्मणजे  $-\sqrt{अब}$ . शिकणारानें नेहमी हें शेवटचें रूप घ्यावें, ह्मणजे  $\sqrt{-अ} \times \sqrt{-ब}$  ही पद्धति  $+\sqrt{अब}$  अशी नसावी परंतु  $-\sqrt{अब}$  अशी असावी याचें कारण पुढें दिसेल.

अचें न मूळ दाखविण्यास  $\sqrt[३]{अ}$  आणि  $अ^{\frac{१}{३}}$  अशीं दोन चिन्हे आहेत, यांतून पहिलें चिन्ह शुद्ध अंकगणिताचे अर्थानें घेतां येईल, आणि दुसरें कोणतेंहि बीजरूप मूळ दाखविण्यास घेतां येईल, ह्मणजे जर कांहीं विशेष मूळ सांगितलें नसलें, तर इच्छेप्रमाणें हवें तें रूप घेतां येईल. जसें, चिन्ह मनांत न आणितां  $\sqrt[४]{४}$  हे २ आहेत; परंतु  $(४)^{\frac{१}{४}}$  हे  $+२$  अथवा  $-२$  होतील. जसें  $\sqrt[३]{अ}$  हें गणितरूपाचें घनमूळ आहे, परंतु  $(अ)^{\frac{१}{३}}$  हा  $\sqrt[३]{अ}$ , किंवा  $\frac{-१+\sqrt{-३}}{२} \times \sqrt[३]{अ}$ , किंवा  $\frac{-१-\sqrt{-३}}{२} \times \sqrt[३]{अ}$  या प्रमाणें आहे.

$(अ)^{\frac{१}{३}}$  हा  $\sqrt[३]{अ}$ , किंवा  $-\sqrt[३]{अ}$ , किंवा  $\sqrt{-१} \cdot \sqrt[३]{अ}$  किंवा  $-\sqrt{-१} \cdot \sqrt[३]{अ}$  याप्रमाणें आहे.

याच प्रमाणे  $अ+ब^{\frac{1}{2}}$  यास दोन किमती आहेत, ह्मणजे,  $अ+ \sqrt{ब}$ , किंवा  $अ- \sqrt{ब}$ .

यावरून जेव्हां ब धन आहे तेव्हां  $\sqrt{ब}$  हा नेहेमी धन गणितरूप परिमाणाचें चिन्ह आहे. चिन्हरहित, ब याची गणितरूपाची किंमत मात्र दर्शवयाची इच्छा असेल, तर हें पुढील संक्षेप वाक्य सांगण्यानें होईल; ब धन किंवा ऋण असेल, तर जा अंकस्थळीं ब घेतला तो अंक धन मानून,  $\sqrt{ब}$  याणें दर्शविला जातो ह्मणजे ते दोन्ही\* एकच आहेत. जसें ब धन किंवा ऋण असेल त्याप्रमाणें  $ब=\pm \sqrt{ब^2}$  होईल.

दोन वर्णांचे पद्धतीचा सामान्य विचार आतां पुढें करितों.

\*  $अ+क्ष$ , अथवा त्याच अर्थाचा  $अ + (क्ष^2)^{\frac{1}{2}}$ , यास  $अ + \sqrt{क्ष^2}$  या रूपानें मांडिताना पाहिलें, यांत चिन्हाविषयीं भ्रम  $\sqrt{\quad}$ . या चिन्हास लाविला होता. परंतु असें एके ठिकाणीं मात्र पाहिलें, आणि वर्गमूल चिन्हे आणि अपूर्णांक जाति मूळप्रकाशक चिन्हे यांमध्यें भेद दाखविण्यास कांहीं नियमित रीति नवती, झणून तीं कामांत आणण्याचा तऱ्हेतऱ्हेचा चाली पडल्या आहेत, तथापि वर लिहिलेले संकेत दुसऱ्या पुष्कळ ग्रंथकत्यांचा चालीस मिळतील असें वाटतें.  $\pm \sqrt{अ}$  हें बहुतकरून पहाण्यांत येतें, तसें  $\pm अ^{\frac{1}{2}}$  हें पहाण्यांत येत नाहीं.



## पांचवा अध्याय.

पहिल्या आणि दुसऱ्या वर्णांचे पद्धतींचा सामान्य सिद्धांत या-  
मध्ये दुसऱ्या वर्णांचे समीकरणांचे अंकगणित रूपाने उलगडण्या-  
चा विचार आहे.

पहिल्या अध्यायामध्ये एकवर्ण समीकरणांचे जे मनन केले ते, त्यांचे  
केवळ अंकगणितरूपाचे उलगडण्याविषयी होतें; ह्मणजे क्षविषयी  
पहिल्यावर्णापेक्षा अधिक वर्णांचा नाहींत, अशा दोन पद्धती दिल्या  
असून, त्यांपासून क्ष ची किंमत काढायाची होती, जिणेकरून त्या दोन  
पद्धती बरोबर होतील. या अध्यायामध्ये असे पाहिले की, पहिल्याव-  
र्णाचा सगळ्या समीकरणांस याप्रमाणे संक्षेपरूप देता येत होतें, ह्मणजे  
अक्ष = व; जसे ५४ पृष्ठावर

$$\frac{क्ष}{२} + \frac{क्ष}{३} = १ - \frac{क्ष}{४} \text{ यास } १२ \text{ क्ष} = १२ \text{ असे संक्षेपरूप केले.}$$

समीकरणाची सगळी पदे समीकरणाचे एकमे बाजूस आणल्याने सोईस  
पडतें; जसे अक्ष = व यापेक्षा अक्ष - व = ० हें रूप समीकरण शोधायास  
अधिक सोईस पडतें. समीकरणांचे सगळ्या सिद्धांतांमध्ये दोन मुख्य  
विचार आहेत. त्यांतील पहिला विचार; जामध्ये क्ष येतो अशी  
बीजानुरूप पद्धति दिली आहे, तर क्षचा एक किंवा अधिक किंम-  
ती काढाव्या, अशा की त्याहीकरून ती पद्धति नाहींशी होईल,  
ह्मणजे ती शून्याबरोबर होईल.

याचे पूर्वीचे अध्यायामध्ये मूल हा शब्द जा अर्थाने घेतला, त्याहून  
भिन्न अर्थाने तो एथें वहिवाटीचे चालीप्रमाणे कामांत आणितो. जा  
पद्धतीमध्ये क्ष येतो तीस जी कोणतीहि क्षची किंमत शून्याबरोबर  
करिती, अथवा बोलण्याचे चालीप्रमाणे तीस नाहींसें करिते, या



किमतीस त्या पद्धतीचें मूळ ह्मणतात. जसे ५२ व्ये पृष्ठावरचें जें बोलणें कामांत आणिलें तें आतां या पुढीलप्रमाणें फिरवितां येईल;  
 $२\text{क्ष} - १ - ५\text{क्ष} + १९$  याचें मूळ ६ आहे;  $१६\text{क्ष} - \text{क्ष}^२ - ४८$  याचीं मुळें ४ आणि १२ आहेत;  $\text{क्ष}^३ - ६\text{क्ष}^२ + ११\text{क्ष} - ६$  याचीं मुळें १, २, आणि ३ आहेत.

दुसरा मुख्य विचार या पुढीलप्रमाणें आहे; जामध्ये क्ष येतो अशी बीजानुरूप पद्धति दिली आहे, तर क्षचा कोणत्या किमती त्या पद्धतीस धन करितात, व कोणत्या किमती तीस ऋण करितात, आणि कोणत्या किमती तीस शुद्ध चिन्हरूप करितात? २२४ वें पृष्ठ पहा. एकवर्ण समीकरणांचे पद्धतीविषयी, या वरचे दोन प्रश्नांचें उत्तर आतां सांगतों. आरंभी ही पुढील सूचना लिहितों.

१. क्षचा निरनिराळ्या किमती, आणि त्या किमतींपासून पद्धतीचा चिन्हांवरून जीं उत्तरें निघतात त्यांचा विचार करितों, तर जेव्हां अगत्य पडेल तेव्हां मूळ दाखविण्यासाठी, त्या अक्षरास कांहीं फेर करून कामांत आणूं. जसे जेव्हां  $\text{क्ष} = ७$ , अथवा  $\text{क्ष} = ७$  हें मूळ आहे, तेव्हां  $२\text{क्ष} - १४$  ही नाहींशी होईल असे ह्मणण्याचे जागीं, मूळाला क्ष असें ह्मणूं; दुसरें मूळ असेल त्याला क्ष, आणि इत्यादि असें ह्मणूं, हें शिकणारानें मनांत धरावें.

२. उलटी गोष्ट स्पष्ट करून सांगितली नसली तर,  $\text{अक्ष} + \text{ब}$ ,  $\text{अक्ष}^२ + \text{बक्ष} + \text{क}$ , इत्यादि अशा पद्धतीतील अ, ब, इत्यादि, गुणक धन किंवा ऋण बीजगणित रूपाचीं परिमाणें आहेत, अशी नेहेमी कल्पना धरिली पाहिजे. जसे जेव्हां अ हा  $१, २, -१, -\frac{१}{२}\sqrt{३}$ , इत्यादि असेल अशे पक्षांशीं कृति करितां येईल; परंतु स्पष्ट सांगितल्या वांचून जा पक्षां अ हा  $\sqrt{-१}$ , अथवा  $१ + \sqrt{-३}$ , इत्यादि अशे जातीचें परिमाण आहे, त्या पक्षां अशी कधी कल्पना करित नाहीं. परंतु क्षविषयीं अशे तऱ्हेचा निबंध होत नाहीं.

३. असें मनांत धरिलें पाहिजे कीं १५५ पृष्ठावरचे स्थळांतरकरण्याचे रीतीशीं शिकणारा माहितगार आहे; ह्मणजे,  $\text{अ} = २$ ,  $\text{ब} = -३$ , असें कल्पून आणि  $२\text{क्ष} - ३$  यास  $२\text{क्ष} + (-३)$  अशा रूपानें लिहून,  $\text{अक्ष} + \text{ब}$  हा  $२\text{क्ष} - ३$  याशीं मिळती होई असें शिकणारा करूं शकतो.

जांत क्ष येतो अशे एकवर्ण पद्धतीचें सामान्यरूप अक्ष+ब आहे.

उदाहरण.

$$\frac{\text{क्ष}-५}{२} - \frac{\text{क्ष}-२}{३} + \text{क्ष ही } \frac{\text{क्ष}}{२} - \frac{५}{२} - \frac{\text{क्ष}}{३} + \frac{२}{३} + \text{क्ष ही आहे}$$

$$\text{अथवा } \left(\frac{१}{२} - \frac{१}{३} + १\right)\text{क्ष} - \left(\frac{५}{२} - \frac{२}{३}\right)$$

$$\text{अ} = \frac{१}{२} - \frac{१}{३} + १ \text{ आणि } \text{ब} = -\left(\frac{५}{२} - \frac{२}{३}\right)$$

अशी कल्पना केल्याने वरची पद्धति अक्ष+ ब याशीं मिळेल  
अक्ष+ब याचें मूळ सहज काढितां येतें; कां कीं

अक्ष+ब=० असें असल्यास क्ष=- $\frac{\text{ब}}{\text{अ}}$ , यास क्ष ह्मण. जेव्हां अक्ष+ब हि पद्धति नाहींशी होते, तेव्हां ती अक्ष+ब या प्रमाणें मांडितां येईल, आणि यांत- $\frac{\text{ब}}{\text{अ}}$  यास क्ष दर्शवितो. क्ष=- $\frac{\text{ब}}{\text{अ}}$  यापासून अक्ष=-ब अथवा ब=-अक्ष असें होतें. वचीहि किंमत अक्ष+ब या पद्धतींत बचे जागीं मांड, तेव्हां ती याप्रमाणें होती. ह्मणजे अक्ष-अक्ष अथवा अ(क्ष-क्ष). यावरून हा पुढील सिद्धांत होतो. अक्ष+ब याचें मूळ जर क्ष असेल, तर

अक्ष+ब=अ(क्ष-क्ष) असें क्ष चे सगळ्ये किमतीविषयीं होईल.

हें वरचें संकेत समीकरण नाहीं, परंतु त्याशीं एकरूप समीकरण आहे. त्यापासून ध्वनित होतें, कीं त्याचा दोन्ही बाजू अगदी सारिल्या आहेत, परंतु त्यांचीं रूपे निरनिराळीं आहेत; रूप बदल केल्या-शिवाय, दुसरे काहीं भेदावांचून अक्ष+ब यापासून लागलेंच तें निघतें असें दिसेल.

अक्ष+ब=अ(क्ष+ $\frac{\text{ब}}{\text{अ}}$ )=अ{क्ष-(- $\frac{\text{ब}}{\text{अ}}$ )}=अ(क्ष-क्ष) कारण वर सांगितलें गेलें कीं- $\frac{\text{ब}}{\text{अ}}$  याचे जागीं क्ष मांडितां येतो.

वरचें हें पुनःपुनः सांगणें अनुपयोगी दिसेल, परंतु जेव्हां दोन वर्णांचे पद्धतींचा विचार करण्याचा प्रसंग येईल, तेव्हां याचें कारण समजेल.

अभ्यासा करितां उदाहरणें. या पुढील पद्धतींचीं मूळे नुसतीं पाहून काढून दाखीव.

$$\text{पद्धती } ३\text{क्ष} + \frac{१}{२}, \quad -४\text{क्ष} - ३, \quad \frac{१}{२}\text{क्ष} - \frac{२}{३}$$

$$\text{मूळ } -\frac{१}{२}, \quad -\frac{३}{४}, \quad -\frac{२}{३}$$

$$\text{संक्षेप मूळ } -\frac{१}{६}, \quad -\frac{३}{४}, \quad +\frac{४}{३}$$

$$\text{रूपांतर पद्धती } ३ \left\{ \text{क्ष} - \left( -\frac{१}{६} \right) \right\}, -४ \left\{ \text{क्ष} - \left( -\frac{३}{४} \right) \right\}, \frac{१}{२} \left\{ \text{क्ष} - \frac{४}{३} \right\}$$

सिद्धांत. मूळापेक्षां जेव्हां क्ष अधिक असेल, तर अक्ष+ब ही पद्धति अचे चिन्हाची आहे, आणि जेव्हां मूळापेक्षां क्ष कमी असेल, तर ही पद्धति अ हून निराळ्या चिन्हाची आहे.

कां कीं, अक्ष+ब=अ(क्ष-क्ष); जर क्ष पेक्षां क्ष अधिक असेल, तर क्ष-क्ष धन आहे, १४२ पृष्ठ पहा, आणि अ× धन परिमाणानें, तर अ चें चिन्ह राहातें, १४२ पृष्ठ पहा; परंतु जर क्ष पेक्षां क्ष कमी असेल, तर क्ष-क्ष ऋण आहे, आणि अ× ऋण परिमाणानें, तर अ चें चिन्ह बदलतें.

उदाहरणें. प्रत्येक क्ष ची किंमत जी  $-\frac{१}{६}$  पेक्षां अधिक आहे, तिज-विषयीं  $३\text{क्ष} + \frac{१}{२}$  ही पद्धति धन आहे; ह्मणजे  $-\frac{१}{६}$  याविषयीं; ही गोष्ट ताडून पहातों. जर क्ष  $= -\frac{१}{६}$  तर

$$३\text{क्ष} + \frac{१}{२} = ३ \times -\frac{१}{६} + \frac{१}{२} = +\frac{१}{२} - \frac{३}{६} = +\frac{१}{६}$$

प्रत्येक क्ष ची किंमत जी  $-\frac{१}{६}$  पेक्षां कमी आहे तिजविषयीं  $३\text{क्ष} + \frac{१}{२}$  ही पद्धति ऋण आहे; उदाहरण, जर क्ष  $= -\frac{१}{६}$  तर

$$३\text{क्ष} + \frac{१}{२} = ३ \times -\frac{१}{६} + \frac{१}{२} = \frac{१}{२} - \frac{३}{६} = -\frac{१}{६}$$

याचप्रमाणें, प्रत्येक क्ष ची किंमत जी  $-\frac{३}{४}$  या पेक्षां अधिक आहे, तिज-विषयीं  $-४\text{क्ष} - ३$  ही पद्धति किंवा तिचे बरोबरीचे  $-\frac{३}{४}$  ऋण आहेत, आणि प्रत्येक क्षची किंमत जी  $-\frac{३}{४}$  पेक्षां कमी आहे तिजविषयीं ही पद्धति धन आहे; परंतु क्षची किंमत जी  $\frac{४}{३}$  पेक्षां अधिक आहे, तिज-

विषयीं  $\frac{1}{2}$  क्ष -  $\frac{2}{3}$  ही पद्धति धन आहे; आणि प्रत्येक क्षची किंमत जी  $\frac{4}{3}$  पेक्षां कमी आहे, तिजविषयीं तीच पद्धति ऋण आहे.

दोन वर्णांचे पद्धतीविषयीं जी गोष्ट आतां पुढें सांगायची आहे, तिशीं एकवर्ण पद्धतीचा कल्पना मिळतात, यासाठीं वर सांगितलेल्या गोष्टीनें निर्वाह होतो.

१. लेम्मा. जर क्ष+य = प+क, आणि क्षय = पक, तर क्ष त्या दोहोंतून प अथवा क याचे बरोबर आहे, आणि य राहिलेल्या दुसऱ्याचे बरोबर आहे.

पहिल्या समीकरणाचा वर्ग कर, नंतर दुसरें समीकरण ४ नीं गुणून त्या वर्गातून वजा कर, असें पुढील प्रमाणें,

$$\text{क्ष}^2 + २\text{क्षय} + \text{य}^2 = \text{प}^2 + २\text{पक} + \text{क}^2$$

$$(\times ४) \quad ४\text{क्षय} = ४\text{पक}$$

$$(-) \quad \text{क्ष}^2 - २\text{क्षय} + \text{य}^2 = \text{प}^2 - २\text{पक} + \text{क}^2$$

या समीकरणाचे पहिल्ये बाजूचें वर्गमूल, क्ष-य किंवा य-क्ष आहे; दुसऱ्या बाजूचें वर्गमूल, प-क किंवा क-प आहे. या दोहों बाजूचें वर्गमूल काढ, ह्मणजे या पुढील चार समीकरणांतून एक निघेल;

$$\text{क्ष}-\text{य} = \text{प}-\text{क} \dots (१) \quad \text{य}-\text{क्ष} = \text{प}-\text{क} \dots (२)$$

$$\text{क्ष}-\text{य} = \text{क}-\text{प} \dots (३) \quad \text{य}-\text{क्ष} = \text{क}-\text{प} \dots (४)$$

परंतु क्ष+य = प+क; हें समीकरण वरल्या चार समीकरणांशीं, वेगळालें मिळविलें असतां या पुढीलप्रमाणें होईल;

(१)अथवा (४) यांशीं मिळविलें असतां क्ष = प य = क ) हें सिद्ध करा-  
(२)अथवा (३) यांशीं मिळविलें असतां क्ष = क य = प ) याचें होतें

हा लेम्मा सांगण्याची गरज नव्हती असें शिकणाराचे मनांत येईल;

परंतु त्याणें लक्षांत घरावें कीं जर  $\text{क्ष}=\text{प}$  अथवा  $\text{क}$ , आणि  $\text{य}=\text{क}$  अथवा  $\text{प}$ , तर  $\text{क्ष}+\text{य}=\text{प}+\text{क}$ , आणि  $\text{क्षय}=\text{पक}$  हें उघड आहे; तथापि याचें उलटें, झणजे जर  $\text{क्ष}+\text{य}=\text{प}+\text{क}$  आणि  $\text{क्षय}=\text{पक}$ , तर  $\text{प}$  किंवा  $\text{क}$  याशिवाय दुसऱ्या कशाचे बरोबर  $\text{क्ष}$  होत नाही, आणि  $\text{क}$  अथवा  $\text{प}$  याशिवाय दुसऱ्या कशाचे बरोबर  $\text{य}$  होत नाही, हें मागल्यासारखें उघड नाही. जसें जर

$$\text{क्ष}^2 - २\text{अक्ष} = \text{ब}^2 - २\text{अब}$$

तर  $\text{क्ष}=\text{ब}$  हें या समीकरणास स्थापितें हें साफ उघड दिसतें, परंतु  $\text{क्ष}=\text{ब}$  याशिवाय दुसरें कोणतें समीकरण त्यास स्थापील, असें निखालस उघड नाही. खरें झटलें असतां  $\text{क्ष}=२\text{अ}-\text{ब}$  हें त्या समीकरणास स्थापील असें दिसेल.

२. लेम्मा.  $\text{अक्ष}+\text{ब}$  आणि  $\text{अक्ष}+\text{ब}$  या पद्धतीस, क्षशीं निराधार परिमाणानें गुणून किंवा भागून, जर  $\text{कक्ष}+\text{इ}$  आणि  $\text{कक्ष}+\text{इ}$  या पद्धती उत्पन्न होत नाहीत, तर पहिल्या दोन पद्धतींचा गुणाकार, या दुसऱ्या दोन पद्धतींचा गुणाकाराबरोबर सर्वदां होऊं शकत नाही, झणजे,  $\text{अक्ष}+\text{ब}=\text{म}(\text{कक्ष}+\text{इ})$  आणि  $\text{अक्ष}+\text{ब}=\frac{१}{\text{म}}(\text{कक्ष}+\text{इ})$ , यांत  $\text{म}$ , क्षशीं निराधार असून जर याप्रमाणें होऊं शकणार नाही, तर ते गुणाकार बरोबर होणार नाहीत. कां कीं

$$(\text{अक्ष}+\text{ब})(\text{अक्ष}+\text{ब}) = \text{अअक्ष}^2 + (\text{अब}+\text{अब}) \text{क्ष}+\text{बब} \dots\dots\dots (\text{अ})$$

$$(\text{कक्ष}+\text{इ})(\text{कक्ष}+\text{इ}) = \text{ककक्ष}^2 + (\text{कइ}+\text{कइ}) \text{क्ष}+\text{इइ} \dots\dots\dots (\text{ब})$$

जर असें होऊं शकतें, तर क्षला कशीहि किंमत दिली, तरी वरचा दोन उलगाडलेल्या पद्धती, सर्वदां बरोबर होतात अशी कल्पना कर. झणजे, याप्रमाणें असो,

$$पक्ष^२ + कक्ष + र = पक्ष^२ + कक्ष + र$$

यांत अक्ष यांचे जागीं प घेतला, कक्ष यांचे जागीं प घेतला; अव + अव यांचे जागीं क घेतला, वव यांचे जागीं र घेतला, इत्यादि. असें हें संक्षेपासाठीं घेतलें. आतां प = प, क = क आणि र = र अशीं स्पष्ट एकरूप नसतील, तर या दोन पद्धती सर्वदां बरोबर होऊं शकत नाहींत. पुढें याचा ताळा दाखवितों; जर वरचा समीकरणाचा दोन बाजू सर्वदां बरोबर आहेत, तर क्ष = १, असें असलें तर त्या दोन बाजू बरोबर आहेत, आणि जेव्हां क्ष = २ अथवा क्ष = ३ असें असलें, तरी त्याचा दोन बाजू बरोबर आहेत. जेव्हां क्ष अनुक्रमानें १, २, आणि ३ याप्रमाणें केला आहे, तेव्हां समीकरणाचा पहिल्या बाजूचा किमती दाखविण्यासाठीं त<sub>१</sub>, त<sub>२</sub>, त<sub>३</sub>, असें अनुक्रमानें घे. यावरून कल्पना केल्याप्रमाणें, समीकरणाचा दुसऱ्या बाजूचा किमती त्याच होतील ह्मणजे;

$$\begin{aligned} \text{जेव्हां क्ष} &= १. & प + क + र &= त_१ \text{ आणि } प + क + र = त_१ \\ \text{जेव्हां क्ष} &= २. & ४प + २क + र &= त_२ \text{ आणि } ४प + २क + र = त_२ \\ \text{जेव्हां क्ष} &= ३. & ९प + ३क + र &= त_३ \text{ आणि } ९प + ३क + र = त_३ \end{aligned}$$

त<sub>१</sub>, त<sub>२</sub>, त<sub>३</sub>, हे व्यक्त आहेत अशी कल्पना करून, १६४ पृष्ठावरचे रितीवरून, वरचे समीकरणाचे पहिल्या समुदायापासून प, क, आणि र, यांचा किमती काढ. नंतर त्याच रितीवरून प, क, आणि र, यांचा किमती काढ. वरचीं समीकरणें बहुतकरून सारिखीं दिसतात. यास्तव जा रितीनें प, क, आणि र, यांचा किमती जा परिमाणापासून काढिल्या, त्याच रितीनें प, क, आणि र, यांचा किमती निघतील. यामुळे, उत्तरे एक सारिचीच होतील, ह्मणजे, प = प, क = क, आणि र = र असें होईल. अभ्यासासाठीं, पहिल्या समुदायाचीं उत्तरे सांगतो, तीं याप्रमाणें आहेत,

$$प = \frac{त_३ - २त_२ + त_१}{२}, \quad क = \frac{८त_२ - ३त_३ - ५त_१}{२}, \quad र = त_३ - ३त_२ + ३त_१,$$

\* या तऱ्हेची संक्षेप रिती मांडण्याविषयीं १९८ पृष्ठ पहा.

वरचे ताळ्यापेक्षां हा पुढील ताळा अधिक सोपा आहे, परंतु एक अक्षर ० याचे बरोबर आहे अशी कल्पना करावी लागती, याचे पुढला अध्याय पक्षा ध्यानांत येईपर्यंत अशी कल्पना करायास इच्छित नाहीं.

जर सर्वदां  $\text{पक्ष}^१ + \text{कक्ष} + \text{र} = \text{प}^१\text{क्ष}^१ + \text{क}^१\text{क्ष} + \text{र}^१$  असें आहे, तर जेव्हां  $\text{क्ष} = ०$ , या पक्षांत, आणि दुसऱ्या पक्षांत; ही गोष्ट खरी आहे परंतु तेव्हां त्याचा रूपभेद याप्रमाणें होतो,

$$० + ० + \text{र} = ० + ० + \text{र}^१ \text{ अथवा } \text{र} = \text{र}^१$$

यामुळे, सर्वदां,  $\text{पक्ष}^१ + \text{कक्ष} + \text{र} = \text{प}^१\text{क्ष}^१ + \text{क}^१\text{क्ष} + \text{र}^१$  असें आहे

(-) र सर्वदां,  $\text{पक्ष}^१ + \text{कक्ष} = \text{प}^१\text{क्ष}^१ + \text{क}^१\text{क्ष}$  असें आहे

(÷) क्ष सर्वदां,  $\text{पक्ष} + \text{क} = \text{प}^१\text{क्ष} + \text{क}^१$  असें आहे

जेव्हां  $\text{क्ष} = ०$  तेव्हां हेहि खरें आहे, अथवा

$$० + \text{क} = ० + \text{क}^१ \text{ ह्मणजे, } \text{क} = \text{क}^१$$

यामुळे  $\text{पक्ष} + \text{क} = \text{प}^१\text{क्ष} + \text{क}^१$  (-) क,  $\text{पक्ष} = \text{प}^१\text{क्ष}$  अथवा  $\text{प} = \text{प}^१$

याचप्रमाणें सिद्ध झालें, कीं क्ष कसाहि असो, २३२ पृष्ठावरचा (अ) आणि (ब) पद्धती सर्वदां बरोबर होऊं शकत नाहीं, या संकेता खेरीज, ह्मणजे,

$\text{अअ} = \text{कक}$ ,  $\text{अब} + \text{अब} = \text{कइ} + \text{कइ}$ , आणि  $\text{बब} = \text{इइ}$

दुसरें आणि तिसरें पहिल्याने भाग, तर हें होतें

$$\frac{\text{अब}}{\text{अअ}} + \frac{\text{अब}}{\text{अअ}} = \frac{\text{कइ}}{\text{कक}} + \frac{\text{कइ}}{\text{कक}}, \text{अअ} = \frac{\text{इइ}}{\text{कक}}$$

$$\text{अथवा } \frac{\text{ब}}{\text{अ}} + \frac{\text{ब}}{\text{अ}} = \frac{\text{इ}}{\text{क}} + \frac{\text{इ}}{\text{क}}, \frac{\text{ब}}{\text{अ}} \times \frac{\text{ब}}{\text{अ}} = \frac{\text{इ}}{\text{क}} \times \frac{\text{इ}}{\text{क}}$$



यावरून, पहिल्या लेम्माप्रमाणे  $\frac{व}{अ} = \frac{इ}{क}$ , आणि  $\frac{व}{अ} = \frac{इ}{क}$  अथवा  $\frac{व}{अ} = \frac{इ}{क}$   
आणि  $\frac{व}{अ} = \frac{इ}{क}$ .

यांतून पहिला संकेत घे.

$$\begin{aligned} \text{परंतु, } अक्ष+व &= अ \left( क्ष+\frac{व}{अ} \right) = अ \left( क्ष+\frac{इ}{क} \right) \\ &= अ - \frac{कक्ष+इ}{क} = \frac{अ}{क} (कक्ष+इ) \end{aligned}$$

$$\text{याचप्रमाणे } अक्ष+व = \frac{अ}{क} (कक्ष+इ)$$

$$\text{परंतु } \frac{अअ}{कक} = १ \text{ अथवा } \frac{अ}{क} \times \frac{अ}{क} = १, \text{ जर } \frac{अ}{क} = म, \text{ तर } \frac{अ}{क} = \frac{१}{म}$$

$$\text{यामुळे } अक्ष+व = म (कक्ष+इ)$$

$$\text{आणि } अक्ष+व = \frac{१}{म} (कक्ष+इ)$$

दुसऱ्या संकेताची कल्पना करून शिकणाराने उलगाडून दाखवावे, कीं  
यांपासून उत्तर यासारखेच होतें.

दोन वर्ण समीकरणांचें अंकगणितरूप उलगाडणें दाखविण्याकरितां, बी-  
जगणितांतील सर्वापेक्षां सरळरूप पद्धति घेतों, ती ही आहे,  $अक्ष^२ + बक्ष$   
 $+ क$ . दोन वर्णांचे कोणत्याहि दुसऱ्ये पद्धतीस, रूपांतर करून, अशे  
रूपांत आणितां येईल.

२२८ वें पृष्ठ पहा. जसे, जर  $अ = -\frac{१}{२}$ ,  $व = २$ , आणि  $क = -३$   
तर  $-\frac{१}{२} क्ष^२ + २क्ष - ३$  हें समीकरण त्या संक्षेपरूपाशीं मिळतें.

व्याख्या. क्षविषयीं त्या पद्धतीस पूर्णवर्ग ह्मणतात, जेव्हां तिचें वर्ग-  
मूल अशे रूपांने काढितां येतें कीं त्यांत  $\sqrt{\quad}$  या चिन्हांत क्ष येत नाहीं.  
शोधल्याने याप्रमाणें दिसेल, जसे,

$$\sqrt{अक्ष^२ + २अक्ष + अ^३} = \sqrt{अ} (क्ष+अ)$$

$$\sqrt{अक्ष^२ + २अक्ष + क्ष^३} = \sqrt{क्ष} (अ+क्ष)$$

यावरून क्षविषयीं  $अक्ष^२ + २अक्ष + अ^३$  हा पूर्ण वर्ग आहे, परंतु अविषयीं  $अक्ष^२ + २अक्ष + क्ष^३$  हा पूर्णवर्ग आहे. परंतु क्षविषयीं नाही. पहा, जर क्षविषयीं  $पक्ष^२ + कक्ष + र$  हा पूर्ण वर्ग असेल. तर कोणतीहि पद्धति जीमध्ये क्ष नाही तिणें गुणून पूर्णवर्ग रहातो, कां कीं जर

$$पक्ष^२ + कक्ष + र = (गक्ष + ह)^२$$

$$\text{तर } (\times) म \quad मपक्ष^२ + मकक्ष + मर = \{\sqrt{म} (गक्ष + ह)\}^२$$

लेम्मा. क्षविषयीं  $पक्ष^२ + कक्ष + र$  हा पूर्णवर्ग आहे खापासून या संकेताचा बोध होतो ह्मणजे,  $क^२ = ४$  पर

$पक्ष^२ + कक्ष + र$  याचें वर्गमूल  $गक्ष + ह$  आहे, अशी कल्पना कर. याशिवाय दुसरी कोणत्याहि रूपाची पद्धति होऊं शकत नाही, हें शोधल्यानें कळेल. तर

$$(गक्ष + ह)^२ = पक्ष^२ + कक्ष + र$$

अथवा  $गक्ष^२ + २गहक्ष + ह^२ = पक्ष^२ + कक्ष + र$ , असें सर्वदां आहे. यामुळे २३२ पृष्ठाप्रमाणें,

$$ग^२ = ५, \quad २गह = क, \quad ह^२ = र$$

एथें, तर, तीन समीकरणें आहेत, जांपासून जीं अद्यापि ठरविलेलीं नाहीं अशीं ग आणि ह परिमाणें ठरवायाचीं आहेत. जर पहिलें आणि तिसरें समीकरण परस्पर गुणून खांचा गुणाकार ४नीं गुणिला, आणि जर दुसऱ्याचा वर्ग केला, तर याप्रमाणें होईल,

$$४ग^२ह^२ = ४पर आणि (२गह)^२ अथवा ४ग^२ह^२ = क^२$$

यामुळे  $क^२ = ४पर$ , ग आणि ह यांचीं तीन समीकरणें खरीं होण्याकरितां, असा संकेत स्थापिला पाहिजे.

वरचे समीकरणापासून  $ग = \sqrt{प}$ ,  $ह = \sqrt{र}$ , अथवा, जर  $क^२ = ४$  पर, तर  $पक्ष^२ + कक्ष + र$  याचें वर्गमूल  $= \sqrt{प} \text{ क्ष} + \sqrt{र}$ , असें होतें.

$\sqrt{प}$  आणि  $\sqrt{र}$  या दोन पदांपासून कांहीं भ्रांती होईल. कां कीं २०८ पृष्ठाप्रमाणें,  $ग^२ = ५$  यापासून  $ग = +\sqrt{प}$  अथवा  $-\sqrt{प}$  होईल, आणि त्यासारखें,  $ह$  हा  $+\sqrt{र}$  अथवा  $-\sqrt{र}$  होईल.

परंतु एथें ध्यानांत आणलें पाहिजे, कीं  $२गह = क$  यास  $४ग^२ह^२ = क^२$  असा रूपभेद केल्यानें  $क^२ = ४$  पर हें समीकरण मिळालें. परंतु  $२गह = -क$ , जांत कचे जागीं  $-क$  मांडिला आहे, यापासून  $क^२ = ४$  पर हें समीकरण निघेल; यामुळें, त्याच समीकरणापासून असें कळलें, कीं  $पक्ष^२ + कक्ष + र$  आणि  $पक्ष^२ - कक्ष + र$ , हे दोन्ही पूर्णवर्ग आहेत. आणि जर  $गक्ष + ह$  या पद्धतीशीं  $ग$  आणि  $ह$  या दोहोंचा किमतीचा, होईल तितक्या तऱ्हांनीं संयोग केला असतां, या पुढील चार पद्धती होतात ;

$$\begin{array}{ll} \sqrt{प} \text{ क्ष} + \sqrt{र} & -\sqrt{प} \text{ क्ष} + \sqrt{र} \\ \sqrt{प} \text{ क्ष} - \sqrt{र} & -\sqrt{प} \text{ क्ष} - \sqrt{र} \end{array}$$

यांतून कोणतीहि पद्धति  $पक्ष^२ + कक्ष + र$  अथवा  $पक्ष^२ - कक्ष + र$  यांचें वर्गमूल होईल. परंतु  $२गह = क$  हें समीकरण पहिल्या पद्धतीस मात्र लागतें, आणि त्याचप्रमाणें  $२गह = -क$ , हें दुसरे पद्धतीस मात्र लागतें, आणि हीं दोन्ही समीकरणें  $४ ग^२ह^२ = क^२$  याणें दर्शवितां येतात, तर पहिलें समीकरण रूपभेद न करितां घेतलें, तर  $गक्ष + ह$  याचा सगळ्या चार किमती  $पक्ष^२ + कक्ष + र$  यांचीं वर्गमुळे होऊं शकत नाहींत, परंतु जांत  $ग$  आणि  $ह$  यांचीं चिन्हें अशीं आहेत कीं त्यांचा गुणाकार  $गह$  याचें चिन्ह कचे चिन्हासारखें होईल, तींच पदे मात्र या पद्धतीचीं वर्गमुळे होतील. ह्मणजे, जर  $क$  धन आहे, तर  $ग$  आणि  $ह$  हीं दोन्ही धन किंवा दोन्ही ऋण असावीं; कां कीं त्यापक्षां गह धन असावा; जर  $क$  ऋण असला तर  $ग$  धन आणि  $ह$  ऋण अथवा  $ग$  ऋण आणि  $ह$  धन असावा.

जसें, जर,  $क$  धन आहे, आणि  $क^२ = ४$  पर, तर  $पक्ष^२ + कक्ष + र$  यांचीं वर्गमुळे  $\sqrt{प} \text{ क्ष} + \sqrt{र}$ , आणि  $-\sqrt{प} \text{ क्ष} - \sqrt{र}$  आहेत; जर  $क$  ऋण आहे तर  $पक्ष^२ - कक्ष + र$  यांचीं वर्गमुळे  $\sqrt{प} \text{ क्ष} - \sqrt{र}$  आणि  $-\sqrt{प} \text{ क्ष}$

$+\sqrt{r}$  आहेत. २०८ पृष्ठावर सांगितले की परिमाणाचे दोन वर्गमूलांमध्ये चिन्हांचा मात्र भेद असतो, ह्मणून वरची गोष्ट खाशी मिळती आहे; कां की

$$-\sqrt{p}k-\sqrt{r} = -(\sqrt{p}k+\sqrt{r})$$

$$-\sqrt{p}k+\sqrt{r} = -(\sqrt{p}k-\sqrt{r})$$

उदाहरणें.  $३k^२+२k+१$  हा पुरा वर्ग नाही, कां की  $(२)^२$ , अथवा ४ हें ४  $(३\times १)$ , अथवा १२ यांचे बरोबर नाही; परंतु  $२k^२-१२k+१८$  हा पूर्णवर्ग आहे, कां की  $(-१२)^२$ , अथवा १४४ हे  $= ४(२\times १८)$ , अथवा १४४. यांत क ऋण आहे ह्मणून त्याचें वर्गमूल  $\sqrt{२k}-\sqrt{१८}$  अथवा  $-\sqrt{२k}+\sqrt{१८}$  आहे.

जास वर्गपरीकरण असें ह्मणतात तें या वरचे सिद्धांताचें मुख्य कारण आहे; ह्मणजे  $p$ क्ष,  $k$ क्ष अथवा  $r$  या तिहींतून कोणत्याहि दोहोंचे सहाय्याने तिसऱ्या पदाची किंमत किंवा तें पद काढितां येईल. उदाहरण,  $२k^२+३k$  ही दिली असतां वर्ग पुरा कर. यांत  $p=२$ ,  $k=३$ ,  $r$ ची किंमत सांगितली नाही परंतु वरची पद्धति पूर्ण होण्यास  $k^२=४$ पर असावे, ह्मणजे,  $९=८r$ , अथवा  $r=\frac{९}{८}$ , यावरून असें दिसते की  $२k^२+३k+\frac{९}{८}$  हा पूर्ण वर्ग आहे, त्याचीं मूले

$$\sqrt{२k}+\frac{३}{\sqrt{८}} \text{ अथवा } -\sqrt{२k}-\frac{३}{\sqrt{८}} \text{ हीं आहेत.}$$

सामान्यतः, जर  $k^२=४$ पर, तर  $r=\frac{k^२}{४p}$  ह्मणजे  $p$ क्ष<sup>२</sup>+ $k$ क्ष याचा पूर्णवर्ग हें पुढील मिळविल्यानें होतो,

$$\frac{(k\text{चा गुणक})^२}{४(k\text{चा गुणक})}$$

असें,  $अक्ष^२+बक्ष+\frac{ब^२}{४अ}$  हा पूर्णवर्ग आहे, आणि त्याचप्रमाणें  $४अ^२+४अबक्ष+ब^२$ , हाही पुरा वर्ग आहे त्याचीं मूले  $\pm (२अब+ब)$  आहेत.

आतां या पुढील पद्धतीचे वेगळाल्ये रूपांचा विशेष लक्षणभेद दाखवितों.

$$अक्ष^२ + बक्ष + क.$$

या पद्धतींत, जर  $ब^२ = ४अक$  आहेत, तर ही पद्धति पूर्णवर्ग आहे असें पूर्वी दिसले. जा पक्षांत  $४अक$  पेक्षां  $ब^२$  अधिक आहे, आणि जा पक्षांत  $४अक$  पेक्षां  $ब^२$  कमी आहे, या दोन पक्षांचा निरनिराळा विचार करितों.

१.  $४अक$  यापेक्षां  $ब^२$  अधिक आहे, अशी कल्पना कर, अथवा या प्रमाणें

$$ब^२ = ४अक + इ^२ \text{ अथवा } ४अक = ब^२ - इ^२$$

$$\begin{aligned} \text{आतां } अक्ष^२ + बक्ष + क &= \frac{४अ^३क्ष^२ + ४अबक्ष + ४अक}{४अ} = \frac{४अ^३क्ष^२ + ४अबक्ष + ब^२ - इ^२}{४अ} \\ &= \frac{(२अक्ष + ब)^२ - इ^२}{४अ} = \frac{(२अक्ष + ब + इ)(२अक्ष + ब - इ)}{४अ} \end{aligned}$$

अथवा, हा पुढील सिद्धांत होतो,

जर  $इ^२ = ब^२ - ४अक$ . अथवा  $इ = \sqrt{ब^२ - ४अक}$ , तर

$अक्ष^२ + बक्ष + क = \frac{१}{४अ} (२अक्ष + ब + इ)(२अक्ष + ब - इ)$  या दोन्ही एकरूपानें बरोबर आहेत.

२.  $ब^२ = ४अक$  अशी कल्पना कर, तर  $अक्ष^२ + बक्ष + क$  पूर्णवर्ग आहे, आणि  $४अ^३क्ष^२ + ४अबक्ष + ४अक$  ही पद्धति आणि  $४अ^३क्ष^२ + ४अबक्ष + ब^२$  ही एकच आहे. तरी तीहि पूर्णवर्ग आहे; आणि

\*  $४अक + इ^२$  असें कां,  $४अक + इ$  कां नाही, कां की  $४अक$  हें खचित वाढविलें असें दाखवायाचें आहे. इ धन किंवा ऋण हें कळेपावेतो,  $४अक + इ$  ही वाढविली किंवा कमी झाली हें कळत नाही. परंतु इ धन किंवा ऋण असो तथापि इ धन आहे. शुद्ध-चिन्हरूप पडे एथें उपयोगीत घेत नाही. यावरून कोणतेहि वर्गरूप पद, परिमाण वाढविलें असें शिकणारानें समजावें.

$$अक्ष^२ + वक्ष + क = \frac{४अ^२क्ष^२ + ४अवक्ष + व^२}{४अ} = \frac{(२अक्ष + व)^२}{४अ}$$

३. ४अक यापेक्षां बकमी आहे, अशी कल्पना कर, ह्मणजे

$$व^२ = ४अक - इ^२ \quad \text{अथवा} \quad ४अक = व^२ + इ^२ \quad \text{तर}$$

$$\begin{aligned} अक्ष^२ + वक्ष + क &= \frac{४अ^२क्ष^२ + ४अवक्ष + ४अक}{४अ} = \frac{४अ^२क्ष^२ + ४अवक्ष + व^२ + इ^२}{४अ} \\ &= \frac{(२अक्ष + व)^२ + इ^२}{४अ} \end{aligned}$$

पुढे जाण्याचे पूर्वी वरचा पद्धती विशेष पक्षांस लावितों.

१.  $३क्ष^२ - ७क्ष + ४$ , अशी पद्धति असो. यांत  $अ = ३$ ,  $व = -७$ ,  $क = ४$ . आणि  $व^२ = ४९$ ,  $४अक = ४८$ . यावरून  $४अक$  पेक्षां  $व^२$  अधिक आहे, आणि  $व^२ - ४अक = १$ . हा  $इ^२$  आहे; यामुळे  $इ = +१$ , किंवा  $-१$ .  $इ = +१$  असें असो, तर

$$\begin{aligned} ३क्ष^२ - ७क्ष + ४ &= \frac{(६क्ष - ७ + १)(६क्ष - ७ - १)}{४ \times ३} = \frac{(६क्ष - ६)(६क्ष - ८)}{१२} \\ &= \frac{(६क्ष - १) \times २ (३क्ष - ४)}{१२} = (क्ष - १)(३क्ष - ४) \end{aligned}$$

गुणाकार केल्याने हें खरें आहे असें दिसेल.  $इ = -१$  असे कल्पनेवरून शिकणारानें दाखवावें कीं वरचासारखेंच उत्तर येतें.

$$\begin{array}{r} ३क्ष - ४ \\ क्ष - १ \\ \hline ३क्ष^२ - ४क्ष \\ - ३क्ष + ४ \\ \hline ३क्ष^२ - ७क्ष + ४ \end{array}$$

आतां हें विचारायाचें आहे, कीं या पद्धतीचीं मूळें, अथवा क्षचा

किमती काय आहेत, अशा कीं त्या किमतीनीं ती पद्धति नाहींशी होईल. गुण्य किंवा गुणक यांतून एक तरी=० असेल, तर गुणाकार० होतो; ह्मणजे क्ष-१=०, असें असो, अथवा ३क्ष-४=० असें असो, तर

$$\text{पहिल्या पक्षां, } ३क्ष^२-७क्ष+४=० \times (३-४)=०$$

$$\text{दुसरे पक्षां, } ३क्ष^२-७क्ष+४=(\frac{४}{३}-१) \times ०=०$$

परंतु जर क्ष-१=०, तर क्ष=+१, आणि जर ३क्ष-४=० तर क्ष= $\frac{४}{३}$ , यामुळे १ आणि  $\frac{४}{३}$  या क्ष चा किमती आहेत, जीहीं करून  $३क्ष^२-७क्ष+४$  ही पद्धति नाहींशी होती; किंवा ते अंक त्या पद्धतीचीं मूळें आहेत, २२८ पृष्ठ पहा.

आतां विचार करितों कीं क्ष चा किमती काय असाव्या, अशा कीं  $३क्ष^२-७क्ष+४$  अथवा त्याचे बरोबरीची (क्ष-१)(३क्ष-४) ही धन किंवा ऋण होईल. पहाण्यांत येतें, कीं जर १ पेक्षां क्ष अधिक आहे, तर क्ष-१ धन आहे, आणि जर  $\frac{४}{३}$  पेक्षां क्ष अधिक आहे, तर ३क्ष-४ हे धन आहेत; परंतु जर १ पेक्षां क्ष कमी आहे, तर क्ष-१ ऋण आहे, आणि जर  $\frac{४}{३}$  पेक्षां क्ष कमी आहे, तर ३क्ष-४ ऋण आहेत, २३० पृष्ठ पहा.

क्षची किमत.	क्ष-१ याचें चिन्ह.	३क्ष-४ याचें चिन्ह.	(क्ष-१)(३क्ष-४) यांचे गुणाकाराचें चिन्ह.
१ पेक्षां कमी	-	-	+
१ पेक्षां अधिक	+	-	-
$\frac{४}{३}$ पेक्षां कमी	+	+	+
$\frac{४}{३}$ पेक्षां अधिक	+	+	+

१ आणि  $\frac{४}{३}$  या मूळांमध्ये क्ष असल्या शिवाय, वरची शेवटील पद्धति सर्वदां धन आहे. या तऱ्हेनें  $३क्ष^२-७क्ष+४$  याविषयीं या पुढील गोष्टी

सिद्ध झाल्या; ह्मणजे,  $\frac{४}{३}$  पेक्षां क्ष अधिक असेल, तर ती पद्धति+ आहे; जर क्ष =  $\frac{४}{३}$ , असेल तर ती० आहे; जर  $\frac{४}{३}$  पेक्षां क्ष कमी आहे, किंवा १ पेक्षां अधिक आहे, तर ती-आहे; जर क्ष १ आहे, तर ती० आहे; जर १ पेक्षां क्ष कमी आहे, तर ती+आहे.

१. या पुढील पद्धतींशीं अशीच कृति करावी.

$$२क्ष^२ + ३क्ष + १ = (क्ष + १)(२क्ष + १)$$

$$३क्ष^२ + ४क्ष - ७ = (क्ष - १)(३क्ष + ७)$$

$$-२क्ष^२ + ६क्ष - ४ = (२ - क्ष)(२क्ष - २)$$

जां पद्धतींपासून इरराशनल् उत्तरे येत नाहींत अशा पद्धती एथपर्यंत निवडून घेतल्या आहेत; आतां तर  $३क्ष^२ + ५क्ष - १$  या पद्धतीस तपासून पहा. यांत  $अ = ३$ ,  $ब = ५$ ,  $क = -१$ ; ४ अक अथवा -१२ यां पेक्षां ब<sup>३</sup> अथवा २५ अधिक आहेत १४० पृष्ठ पहा, आणि ब<sup>३</sup> - ४ अक =  $३७ = इ^२$ ; यामुळे  $इ = \pm\sqrt{३७}$ . इ बरोबर +  $\sqrt{३७}$  असो असो, तर, २३९ व्ये पृष्ठावरून

$$३क्ष^२ + ५क्ष - १ = \frac{(२ \times ३क्ष + ५ + \sqrt{३७})(२ \times ३क्ष + ५ - \sqrt{३७})}{४ \times ३}$$

$$= \frac{१}{१२} (२ \times ३क्ष + ५ + \sqrt{३७})(२ \times ३क्ष + ५ - \sqrt{३७})$$

या पद्धतीचीं मूळे दाखविण्यासाठीं क्ष आणि क्ष<sub>॥</sub> घे, तर मूळे याप्रमाणें आहेत.

$$क्ष = -\frac{\sqrt{३७} + ५}{६} \text{ आणि } क्ष_{॥} = \frac{\sqrt{३७} - ५}{६}$$

$$= -१.८४७१२७१ \quad = १.८०४६०४ \text{ जवळ जवळ}$$

क्ष आणि क्ष<sub>॥</sub> या मूळांमध्ये क्ष असल्या शिवाय, पूर्वीप्रमाणें, पहाण्यांत येईल, कीं वरची पद्धति ऋण कधीहि होणार नाहीं.



२. आतां  $३क्ष^२ - ६क्ष + ३$  ही पद्धति घे. यांत ब<sup>३</sup> अथवा  $(-६)^२$  हा ४अक अथवा  $४ \times ३ \times ३$  याचे बरोबर आहे. यावरून ही पद्धति पूर्णवर्ग आहे, आणि २३७ पृष्ठावरून

$$३क्ष^२ - ६क्ष + ३ = (\sqrt{३} क्ष - \sqrt{३})^२ = ३(क्ष-१)^२$$

जेव्हां  $\sqrt{३}क्ष - \sqrt{३}$  नाहीसे होतात, अथवा जेव्हां  $क्ष = १$ , तेव्हां मात्र वरची पद्धति नाहीशी होती. परंतु यांत गुण्यगुणक हे दोन्ही एक सारिखेच आहेत ह्मणजे,  $\sqrt{३}क्ष - \sqrt{३}$ , असे आहेत, या कारणास्तव आणि वरचा पक्षांशी सारिखेपणा राखण्यासाठी, असे ह्मणण्यांत येते, कीं अशे पद्धतीला दोन मूळें आहेत, आणि तीं बरोबर आहेत. यावरून या पद्धतीला दोन मूळें आहेत, आणि यांतून प्रत्येक  $= १$  आहे.

ही पद्धति ऋण कधींहि होणार नाही, कां कीं सर्व पक्षांत  $(क्ष-१)^२$  धन आहे. क्षला केवळ चिन्हरूप किंमत दिल्याने त्या पद्धतीस ऋण करितां येते; उदाहरण,  $१ + \sqrt{-१}$  ही किंमत दे, तेव्हां २२५ पृष्ठावरून केवळ रिती प्रमाणें  $(क्ष-१)^२ = -१$  होईल.

३. जे पक्ष पूर्वी घेतले आहेत यांतून एकांतहि ४ अक यापेक्षां ब<sup>३</sup> कमी नव्हता. आतां तर  $२क्ष^२ - क्ष + ४$  या पद्धतीस शोधून पहा. यांत  $अ = २$ ,  $ब = -१$ ,  $क = ४$ ; आणि  $ब^३ = १$ , ४अक  $= ३२$  ह्मणजे हे ब<sup>३</sup> पेक्षां अधिक आहेत. २३९ पृष्ठाप्रमाणें ४अक  $- ब^३ = ३१$  असे असो, तर यामुळे  $३१ = ३१$  आहेत.

यावरून २३९ पृष्ठाप्रमाणें हे होईल.

$$२ क्ष^२ - क्ष + ४ = \frac{(२ \times २क्ष - १)^२ + ३१}{४ \times २} = \frac{(४क्ष - १)^२ + ३१}{८}$$

या पद्धतीस कांहीं धन किंवा ऋणमूल नाही, कां कीं जोंपर्यंत क्ष धन किंवा ऋण आहे, तोंपर्यंत  $(४क्ष-१)^२$  ही सर्वदां धन होईल, यास्तव ती ३१ यांशीं मिळविली असतां ३१ खचित् वाढतील, आणि यामुळे,  $(४क्ष-१)^२ + ३१$  ही  $= ०$  कधीं होणार नाही, परंतु ती सर्वदां धन आहे. तर, असें दिसते, कीं क्षचे प्रत्येक धन किंवा ऋण किमतीविषयीं,

$२क्ष^२ - क्ष + ४$  ही सर्वदा धन आहे. अशा बंधारणाने या पद्धतीची अति लहान किंमत.  $\frac{३१}{८}$  आहे, कां की  $४क्ष - १ = ०$ , अथवा  $क्ष = \frac{१}{४}$  असे केल्याने  $(४क्ष - १)^२$  याची अति लहान किंमत काढिता येती. यामुळे, वरचे पद्धतीत हा पुढील गुण आहे;  $क्ष = \frac{१}{४}$  असे केल्याने त्याची अति लहान किंमत  $\frac{३१}{८}$  आहे; का की क्षचे प्रत्येक दुसऱ्या किमतीविषयी ती  $\frac{३१}{८}$  यापेक्षा अधिक आहे.

हे पुढील पक्ष शिकणाराने शोधून पाहावे.

$$\begin{aligned} क्ष^२ + क्ष + १ &= \frac{१}{४} \{ (२क्ष + १)^२ + ३ \} \\ क्ष^२ - क्ष + १ &= \frac{१}{४} \{ (२क्ष - १)^२ + ३ \} \\ -२क्ष^२ + २क्ष - ५ &= -\frac{१}{८} \{ (४क्ष - २)^२ + ३६ \} \end{aligned}$$

वरचा पद्धतीस केवळ चिन्हरूपमूळे देऊं शकतात; ह्मणजे  $२क्ष^२ - क्ष + ४ = ०$ , असे करायाकरितां, याप्रमाणें करूं

$$\begin{aligned} (४क्ष - १)^२ + ३१ &= ० & (४क्ष - १)^२ &= -३१ \\ ४क्ष - १ &= +\sqrt{-३१} \text{ अथवा } ४क्ष - १ &= -\sqrt{-३१} \end{aligned}$$

जीं मूळे यांपासून निघतात, त्यांस दाखविण्यासाठीं क्ष आणि क्ष<sub>॥</sub> घे, तर

$$क्ष = \frac{१ + \sqrt{-३१}}{४} \quad क्ष_{॥} = \frac{१ - \sqrt{-३१}}{४}$$

२२५ पृष्ठाप्रमाणें हीं केवळ रितीनें मूळे आहेत असें दिसेल.

आतां वरचेपेक्षां कांहीं साधारण पक्ष घेतों.

१. अक्ष<sup>२</sup> + वक्ष + क = ०, यांत ब<sup>२</sup> - ४अक = इ<sup>२</sup>, २३९ पृष्ठाप्रमाणें, आणि अक्ष<sup>२</sup> + वक्ष + क =  $\frac{१}{४अ}$  (२अक्ष + ब + इ) (२अक्ष + ब - इ)

अक्ष<sup>२</sup> + वक्ष + क या पद्धतीचीं, पुढीलप्रमाणें, आठ वेगळालीं रूपें आहेत, तर अ, ब, क, ड, आणि अ, ब, क, ड, या आठ अक्षरांनीं तीं रूपें दर्शविलीं आहेत.

	अचें चिन्ह.	बचें चिन्ह.	कचें चिन्ह.
{ (अ) $२क्ष^२+५क्ष+१$	+	+	+
{ (अ') $-२क्ष^२-५क्ष-१$	-	-	-
{ (ब) $२क्ष^२-५क्ष+१$	+	-	+
{ (ब') $-२क्ष^२+५क्ष-१$	-	+	-
{ (क) $२क्ष^२+५क्ष-१$	+	+	-
{ (क') $-२क्ष^२-५क्ष+१$	-	-	+
{ (ड) $२क्ष^२-५क्ष-१$	+	-	-
{ (ड') $-२क्ष^२+५क्ष+१$	-	+	+

जो गुण या सर्व रूपांस साधारण आहे त्याचा आरंभी विचार करितों, आणि त्यानंतर प्रत्येक रूपाचे विशेष गुणाचा विचार होईल.

अक्ष<sup>२</sup>+बक्ष+क याचीं मूळें या पुढील समीकरणांचे उलगडण्याने निघतात ; मूळें दाखविण्याकरितां क्ष<sub>I</sub> आणि क्ष<sub>II</sub> घे.

$$२अक्ष+ब-इ=०$$

$$क्ष_I = \frac{-ब+इ}{२अ}$$

$$२अक्ष+ब+इ=०$$

$$क्ष_{II} = \frac{-ब-इ}{२अ}$$

परंतु  $इ = \sqrt{ब^२-४अक}$ , यामुळे,

$$क्ष_I = \frac{-ब+\sqrt{ब^२-४अक}}{२अ}$$

$$क्ष_{II} = \frac{-ब-\sqrt{ब^२-४अक}}{२अ}$$

आणि, २३० पृष्ठावरून,  $२अक्ष+ब-इ$  ही पद्धति आणि  $२अ(क्ष-क्ष_I)$  ही एकसारखीच आहे, आणि  $२अक्ष+ब+इ$  ही पद्धति आणि  $२अ(क्ष-क्ष_{II})$  ही एकसारखीच आहे. ही गोष्ट खरी आहे असे पुनः दाखवितों,

$$२अक्ष+ब-इ = २अ(क्ष+\frac{ब-इ}{२अ}) = २अ(क्ष-\frac{-ब+इ}{२अ}) = २अ(क्ष-क्ष_I)$$

$$२अक्ष+ब+इ = २अ(क्ष+\frac{ब+इ}{२अ}) = २अ(क्ष-\frac{-ब-इ}{२अ}) = २अ(क्ष-क्ष_{II})$$

$$\therefore अक्ष^२+बक्ष+क = \frac{४अ^२(क्ष-क्ष_I)(क्ष-क्ष_{II})}{४अ} = अ(क्ष-क्ष_I)(क्ष-क्ष_{II})$$

यावरून जेव्हां दुसरे वर्णांचे पद्धतीचीं दोन मूळें, आणि त्यांचे पहिल्ये पदाचा गुणक ठाऊक आहे, तेव्हां ती पद्धतिहि काढितां येईल. उदाहरण. २ आणि  $-\frac{1}{2}$  हीं जा पद्धतीचीं मूळें आहेत, आणि जिचे पहिल्ये पदाचा गुणक ४ आहे, तर ती पद्धति काय आहे? वरचे पद्धतीचे रूपाप्रमाणें, इच्छिली पद्धति याप्रमाणें असावी,

$$४(क्ष-२)(क्ष-(-\frac{1}{2})) \text{ अथवा } ४(क्ष-२)(क्ष+\frac{1}{2}) \text{ अथवा } ४क्ष^२-६क्ष-४,$$

वरची पद्धति उलगडली असतां, याप्रमाणें निघेल,

$$अ(क्ष-क्ष_॥)(क्ष-क्ष_॥) = अक्ष^२ - अ(क्ष_॥+क्ष_॥)क्ष + अक्ष_॥क्ष_॥$$

ही,  $अक्ष^२ + बक्ष + क$  याशीं एकरूप आहे; यामुळें २३३ पृष्ठावरून, याप्रमाणें होईल,

$$ब = -अ(क्ष_॥+क्ष_॥) \text{ अथवा } क्ष_॥+क्ष_॥ = -\frac{ब}{अ}$$

$$क = अक्ष_॥क्ष_॥ \text{ अथवा } क्ष_॥क्ष_॥ = \frac{क}{अ}$$

$$\text{मुळांची बेरीज} = -\frac{\text{क्षचा गुणक}}{\text{क्ष}^२\text{चा गुणक}}$$

$$\text{मुळांचा गुणाकार} = \frac{\text{क्ष वाचून पद}}{\text{क्ष}^२\text{चा गुणक}}$$

जेव्हां  $अ = १$ , अथवा पद्धति याप्रमाणें आहे, ह्मणजे,  $क्ष^२ + बक्ष + क$ , तेव्हां याप्रमाणें होईल.

मुळांची बेरीज  $= -ब$  होईल, मुळांचा गुणाकार  $= क$  होईल, पूर्वीचा उदाहरणावरून या सिद्धांतास ताडून पहा.

वरचीं रूपें दाखविण्यासाठीं, पद्धतीचीं चिन्हे कुंडलीत मांडिलीं आहेत; जसें अ पद्धति.  $(+++)$  यांणीं, आणि, अ पद्धति  $(---)$  यांणीं दाखवितां येईल, इत्यादि. हा पहिला पक्ष, जामध्ये  $ब^२ - ४अक$  धन आहेत; चिन्हाचा पुढीलप्रमाणें जा भिन्न भिन्नरचना होऊं शकतात त्या सर्व या पक्षांत आहेत.

$$(++-) \quad (---) \quad (+--) \quad (-++)$$

कां कीं या सर्वांमध्ये अ आणि क यांचीं चिन्हे भिन्न आहेत ; यामुळे अक ऋण आहे, आणि, यामुळे,  $b^2 - (-४अक)$  धन आहे, आणि  $b^2$  हून अधिक आहे. एथें तर, अ, ब, क, यांचा अंकगणित किमतीचे आश्रयावांचून,  $b^2 - (-४अक)$  धन आहे. याच पक्षांत ही पुढील रचना असेल किंवा नसेल.

$$(+ + +) \quad (- - -) \quad (+ - +) \quad (- + -)$$

या सर्वांमध्ये अक धन आहे ; आणि यामुळे  $b^2 - ४अक$  या पद्धतीचें चिन्ह  $b^2$  आणि अक यांचे केवळ अंकगणित किमतीचे आश्रयावर आहे.

जा पक्षांत मूळें आहेत त्यांचा आतां विचार करितों ; मनांत धरलें पाहिजे, कीं जोडीतून कोणत्याहि एक पद्धतीचीं, केवळ चिन्हे बदल करून, तीस तिचे जोडीचे दुसऱ्ये पद्धतीचें रूप देतां येईल. जसें,  $-क्ष - क्ष + १ = -(क्ष + क्ष - १)$ , अथवा केवळ चिन्हे बदल केल्यानें  $(- - +)$  यांचें रूप  $(+ + -)$  असें होतें. आणि, जेव्हां  $a = ०$ , तेव्हां  $-a = ०$ , यामुळे प्रत्येक प्रकार जो पदाचे केवळ चिन्हाचे आश्रयावर आहे, त्यांत या पुढल्या ओळींतील पहिल्या ओळीचे पद्धतीचीं मूळें दुसऱ्ये ओळींतील त्यांशीं मिळत्या पद्धतीचे मुळासारखीं आहेत.

$$\begin{array}{cccc} (+ + +) & (- - -) & (+ + -) & (- - +) \\ (+ - +) & (- + -) & (+ - -) & (- + +) \end{array}$$

१. जा पद्धतींस वास्तवीक मूळें नसतात, त्या पद्धती  $(+ + +)$   $(- - -)$  या रूपाचा असतात; आणि त्यांत  $b^2$  पेक्षां  $b^2 - ४$  अक कमी असतात. त्या पद्धतींस जर मूळें असलीं, तर तीं दोन्ही ऋण असतात. कां कीं जा पेक्षां  $b^2$  हून  $b^2 - ४$  अक कमी आहेत झणून, २२६ पृष्ठाप्रमाणें  $\sqrt{b^2}$  अथवा  $b$  ची अंकगणितरूप किंमत याहून  $\sqrt{b^2 - ४अक}$  कमी आहेत. यामुळे  $-b + \sqrt{b^2 - ४अक}$  आणि  $-b - \sqrt{b^2 - ४अक}$  या दोहों-

स-व अथवा व चे विरुद्ध चिन्ह सारिखेंच आहे\*. परंतु मूळें हीं पुढील आहेत.

$$\frac{-व + \sqrt{व^2 - ४अक}}{२अ}$$

$$\frac{-व - \sqrt{व^2 - ४अक}}{२अ}$$

चिन्हांविषयी, हीं दोन्हीं मूळें ऋण आहेत, कां कीं, व आणि अ यांचीं चिन्हे दोहों पद्धतींत सारिखेंच आहेत, आणि अ आणि व यांचे चिन्हाविरुद्ध अंशाचें चिन्ह आहे, आणि त्यांचे चिन्हासारिखे छेदाचें चिन्ह आहे.

२. जा पद्धतींस वास्तवीक मूळें नसतात, या पद्धती (+ - +) (- + -) या रूपाचा असतात; आणि त्यांत व हून व<sup>२</sup>-४ अक कमी असतात. आतां अ आणि व यांस निरनिराळीं चिन्हे आहेत, असें लक्षांत ठेऊन जर अशे पद्धतींस मूळें असलीं, तर वरचे सारिख्याच कृतीनें तीं दोन्हीं धन आहेत असें सिद्ध करितां येईल.

३. जा पद्धतींस वास्तवीक मूळें सर्वदां असतात, या पद्धती (+ + -) (- - +) या रूपाचा असतात; आणि त्यांत व हून व<sup>२</sup>-४ अक अधिक असतात. यांतून प्रत्येक पद्धतीस एक धन आणि एक ऋण अशीं दोन मूळें असतात, आणि ऋणमूळ अंकगणितरूपानें अधिक असतें. कां कीं या पक्षां\*, जापेक्षां व हून अंकगणितरूपानें  $\sqrt{व^2 - ४अक}$  अधिक आहेत, तर  $-व + \sqrt{व^2 - ४अक}$  आणि  $-व - \sqrt{व^2 - ४अक}$  यांस निरनिराळीं चिन्हे आहेत; ह्मणजे पहिलीचें चिन्ह + आहे, आणि दुसरीचें - आहे. या मूळें,

\* उदाहरण, - ३ + २ या पद्धतीचा दोन्ही किमती ऋण असाव्या; - ३ + ६ हिची एक धन आणि एक ऋण अशा दोन किमती आहेत.

\* लक्षांत ठेविलें पाहिजे, कीं प + क यांत जें पद अंकगणितरूपानें अधिक आहे, त्या पदाचे चिन्हावरून पद्धतीचें चिन्ह निश्चित होतें; आणि लक्षांत ठेवावें, कीं प + क यांत प + क अथवा प - क या दोहोंतून जामध्यें + प आणि + क या दोन पदांस एकसारिखें चिन्ह आहे तीच अंकगणितरूपानें अधिक आहे.

$$\frac{-ब + \sqrt{ब^2 - ४अक} \text{ (हें+आहे)}}{२अ} \left\{ \begin{array}{l} \text{ही पद्धति चिन्हानें अ आणि ब यांशीं} \\ \text{मिळती आहे.} \end{array} \right.$$

$$\frac{-ब - \sqrt{ब^2 - ४अक} \text{ (हें-आहे)}}{२अ} \left\{ \begin{array}{l} \text{ही अ आणि ब यांचे चिन्हांशीं मि-} \\ \text{ळत नाही.} \end{array} \right.$$

जर अ आणि ब+आहेत, तर दुसरी पद्धति जी-आहे, ती माग-  
ल्या टिपेप्रमाणें अंकगणित रूपानें अधिक आहे; जर अ आणि ब-  
आहेत, तर पहिली पद्धति-आहे, आणि अंकगणित रूपानें तीच  
अधिक आहे. या मुळें दोन्ही पक्षां ऋणमूळ अंकगणित रूपानें  
अधिक आहे.

४. जा पद्धतींस वास्तविक मूळें सर्वदा असतात, त्या पद्धती(+--),  
(-++) या रूपाचा असतात; आणि त्यांत ब<sup>२</sup>पक्षां ब<sup>२</sup>-४ अक अधिक  
असतात. एथें, वरचे सारख्याच तर्कानें, सिद्ध करितां येईल कीं,  
एक मूळ धन आणि एक मूळ ऋण अगत्य असावें; परंतु धनमूळ  
अंकगणितरूपानें अधिक आहे. लक्षांत आणावें कीं या पक्षां अ आ-  
णि ब यांचीं चिन्हे निरनिराळीं आहेत.

या सर्व पक्षांतून हा पुढील सिद्धांत निघतो. अक्ष<sup>२</sup>+बक्ष+क या पद्ध-  
तीस जेव्हां निरनिराळीं मूळें असतात, तेव्हां तिचें चिन्ह अचे चि-  
न्हाहून कधीं भिन्न असत नाही, परंतु जेव्हां क्षची किंमत दोन  
मुळांमध्ये येती तेव्हां मात्र तिचें चिन्ह भिन्न असतें. २४१ आणि  
२४२ पृष्ठे पुनः वाचून पहा. कां कीं,

$$अक्ष^2 + बक्ष + क = अ(क्ष-क्ष_1)(क्ष-क्ष_2) \text{ असें सर्वदां आहे,}$$

क्ष, आणि क्ष<sub>१</sub> या दोन मूळांतून एक तरी अधिक असावें; क्ष<sub>२</sub> अधिक  
आहे असें मनांत आण. तेव्हां, जर क्ष<sub>१</sub> पक्षां क्ष अधिक आहे, तर क्ष<sub>२</sub>  
पक्षांहि क्ष अधिक आहे; आणि क्ष-क्ष<sub>१</sub> आणि क्ष-क्ष<sub>२</sub> ह्या दोन्ही धन

आहेत. यामुळे अ (क्ष-क्ष<sub>१</sub>)(क्ष-क्ष<sub>२</sub>) हिचें चिन्ह अचे चिन्हासारिखें आहे. क्ष पेक्षां क्ष कमी, परंतु क्ष पेक्षां क्ष अधिक आहे, ह्मणजे क्षची किंमत या दोन मूलांमध्ये आहे अशी कल्पना कर, तेव्हां क्ष-क्ष<sub>१</sub> ऋण आहे, क्ष-क्ष<sub>२</sub> धन आहे; आणि अ(क्ष-क्ष<sub>१</sub>)(क्ष-क्ष<sub>२</sub>) हिचें चिन्ह अचे चिन्हाहून निराळें आहे. क्ष पेक्षां क्ष कमी आहे असें मनांत आण, तर तो क्ष या पेक्षांहि कमी आहे; आणि क्ष-क्ष<sub>१</sub> आणि क्ष-क्ष<sub>२</sub> या दोन्हीं ऋण आहेत; यामुळे, अ(क्ष-क्ष<sub>१</sub>)(क्ष-क्ष<sub>२</sub>) हीस अ सारिखेंच चिन्ह आहे, या तीन पक्षांचा पुनः विचार केला असतां इच्छिलेला सिद्धांत निघेल.

$$२. \text{अक्ष}^२ + \text{वक्ष} + \text{क} = ० \text{ यांत } \text{व}^२ = ४\text{अक अथवा } \text{व}^२ - ४\text{अक} = ०$$

या पक्षांत अ आणि क यांचें एकसारिखेंच चिन्ह असावें, कां कीं ४अक अगत्य धन असावे.

$$\text{एथें } \text{अक्ष}^२ + \text{वक्ष} + \text{क} = \frac{(२\text{अक्ष} + \text{व})^२}{४\text{अ}}$$

याचीं दोन बरोबरीचीं मूळे या पुढीलपासून निघतात,

$$२\text{अक्ष} + \text{व} = ० \quad \text{अथवा } \text{क्ष} = \text{क्ष}_१ = -\frac{\text{व}}{२\text{अ}}$$

जेव्हां व आणि अ यांचीं चिन्हे निरनिराळीं आहेत, ह्मणजे, जेव्हां पद्धती (+ - +) आणि (- + -) अशा आहेत, तेव्हां दोन्हीं मूळे धन आहेत; आणि जेव्हां व आणि अ यांचीं चिन्हे एकसारिखीं आहेत, ह्मणजे, जेव्हां पद्धती (+ + +) आणि (- - -) आहेत तेव्हां दोन्हीं मूळे ऋण आहेत. जापेक्षां अ आणि क यांचीं चिन्हे एकसारिखींच अगत्य असावीं ह्मणून सर्व दुसरे पक्ष या पक्षांत येत नाहींत.

अक्ष<sup>२</sup> + वक्ष + क ही पद्धति सर्वदां वर्ग ह्मणजे धन परिमाण असून तीस ४अ भाजक आहेत यामुळे तिचें चिन्ह नेहेमी अचे चिन्हासारिखें असतें; पहा कीं या पक्षांत क्षची किंमत मूलांमध्ये होऊं शकत नाहीं.



$$३. अक्ष^२ + बक्ष + क = ० \quad ४अक - ब^२ = इ^२ \quad २३९. \text{ पृष्ठाप्रमाणें.}$$

एथें अ आणि क यांचीं चिन्हे एकसारखींच अगळ्य असावीं, कां कीं ४अक धन आहेत, ह्मणजे ते ब<sup>२</sup> + इ<sup>२</sup>, या दोन धनपदांचे बेरिजेबरोबर आहेत. २३९ पृष्ठाप्रमाणें. अक्ष<sup>२</sup> + बक्ष + क =  $\frac{१}{४अ} \{ (२अक्ष + ब)^२ + इ^२ \}$  ही धनपद्धति ४अनीं भागिलेली आहे ह्मणून तिचें चिन्ह सर्वदां अचे चिन्हासारखें आहे.

केवळ चिन्हरूप मूळें या पुढील समीकरणापासून निघतात. २४४ आणि २४५ पृष्ठ पहा.

$$(२अक्ष + ब)^२ + इ^२ = ० \quad \text{अथवा} \quad (२अक्ष + ब)^२ = इ^२ \times -१$$

$$\text{अथवा}^* \quad २अक्ष + ब = \pm इ\sqrt{-१} = \pm \sqrt{४अक - ब^२}\sqrt{-१}$$

$$क्ष_1 = \frac{-ब + \sqrt{४अक - ब^२}\sqrt{-१}}{२अ} \quad क्ष_2 = \frac{-ब - \sqrt{४अक - ब^२}\sqrt{-१}}{२अ}$$

चालत्या रिती लाविल्यानें, हीं मूळें वर सांगितलेल्या समीकरणास, आणि या पुढील समीकरणांस स्थापितात, असें दिसेल.

$$क्ष_1 + क्ष_2 = -\frac{ब}{अ} \quad क्ष_1 क्ष_2 = \frac{क}{अ}$$

परंतु सद्यः २४९ व्या पृष्ठावरचा सिद्धांतास विस्ताररूप देवत नाहीं, कां कीं क्ष<sub>१</sub> आणि क्ष<sub>२</sub> यांस अधिक किंवा कमीपणाचा अर्थ लावितां येत नाहीं.

\* पहा कीं प<sup>२</sup> = क<sup>२</sup> अथवा +प = +क, यांसून केवळ दोन निरनिराळीं रूपें होतात; कां कीं +प = +क आणि -प = -क हीं दोन्ही एकच आहेत, आणि त्याचप्रमाणें +प = -क आणि -प = +क हींहि एकच आहेत.

दोन वर्णांचे समीकरणांचे अंकरूप उलगडणे बहुतेकसून कृत्तिके-  
माने होतें, केवळ सारणीने होत नाही, ह्मणजे, प्रत्येक पक्षास निरनि-  
राळी कृति आहे, जसे पुढीलप्रमाणे ;

$$\text{मनांत आण कीं } २क्ष^२ - ७क्ष + ३ = ०$$

$$(-)३ \quad २क्ष^२ - ७क्ष = - ३$$

$$(\div)२ \quad क्ष^२ - \frac{७}{२}क्ष = - \frac{३}{२}$$

$$\text{वर्ग पुरा कर*,} \quad क्ष^२ - \frac{७}{२}क्ष + \left(\frac{७}{४}\right)^२ = \left(\frac{७}{४}\right)^२ - \frac{३}{२} = \frac{२५}{१६}$$

$$\text{वर्गमूल काढ,} \quad क्ष - \frac{७}{४} = \pm \frac{५}{४}$$

$$क्ष = \frac{७}{४} + \frac{५}{४} \text{ अथवा } ३; \text{ अथवा } क्ष = \frac{७}{४} - \frac{५}{४} \text{ अथवा } \frac{१}{२}.$$

परंतु शिकणारानें हा पुढील सिद्धांत अवश्य पाठ करवा ;

जर

$$अक्ष^२ + बक्ष + क = ०$$

$$\text{तर } क्ष = \frac{-ब + \sqrt{ब^२ - ४अक}}{२अ} \text{ अथवा } \frac{-ब - \sqrt{ब^२ - ४अक}}{२अ}$$

उदाहरणें. १. या पुढील समीकरणाचीं उत्तरे काय आहेत ?

$$पक्ष^२ + कक्ष = कक्ष^२ - पक्ष + प^३$$

$$\text{अथवा } (प-क)क्ष^२ + (प^३ + क^३)क्ष - प^३ = ०$$

$$\text{यांत } अ = प-क \quad ब = प^३ + क^३ \quad क = - प^३$$

इच्छिलेलीं मूळे या पुढील पद्धतीचा दोन किमती आहेत,

\* २३८ वें पृष्ठ पहा, जेथें क्ष^२ + बक्ष +  $\frac{ब^२}{४}$ , हा क्ष +  $\frac{ब}{२}$  याचा पूर्ण वर्ग आहे असें दिसतें.

$$\frac{-(p^2+k^2) \pm \sqrt{(p^2+k^2)^2 - 8(p-k)(-p^3)}}{2(p-k)}$$

$$(p^2+k^2)^2 = p^4 + 2p^2k^2 + k^4$$

$$-8(p-k)(-p^3) = 8p^4 - 8p^3k$$

याजकरिता वरचे पद्धतीचीं मूळें या पुढील पद्धतीमध्ये आहेत.

$$\frac{-(p^2+k^2) \pm \sqrt{4p^4 - 8p^3k + 2p^2k^2 + k^4}}{2p-k}$$

२.  $\text{अक्ष}^2 - \text{अवक्ष} = \text{वक्ष} - \text{व}^3$  असें असो,  
 $\text{अक्ष}^2 - (\text{अव} + \text{व}^2)\text{क्ष} + \text{व}^3 = 0$

याचीं मूळें या पुढील पद्धतीमध्ये आहेत.

$$\frac{\text{अव} + \text{व}^2 \pm \sqrt{(\text{अव} + \text{व}^2)^2 - 8\text{अव}^3}}{2\text{अ}}$$

$$\begin{aligned} (\text{अव} + \text{व}^2)^2 - 8\text{अव}^3 &= \text{अ}^2\text{व}^2 + 2\text{अव}^3 + \text{व}^4 - 8\text{अव}^3 \\ &= \text{अ}^2\text{व}^2 - 2\text{अव}^3 + \text{व}^4 = (\text{अव} - \text{व}^2)^2 \end{aligned}$$

याकरिता याचीं मूळें या पुढील पद्धतीमध्ये आहेत.

$$\frac{\text{अव} + \text{व}^2 \pm (\text{अव} - \text{व}^2)}{2\text{अ}}$$

परंतु  $\frac{\text{अव} + \text{व}^2 + \text{अव} - \text{व}^2}{2\text{अ}} = \frac{2\text{अव}}{2\text{अ}} = \text{व}$  हें एक मूळ आहे,

$\frac{\text{अव} + \text{व}^2 - \text{अव} + \text{व}^2}{2\text{अ}} = \frac{2\text{व}^2}{2\text{अ}} = \frac{\text{व}^2}{\text{अ}}$  हें दुसरें मूळ आहे.

ताला,  $\text{व} + \frac{\text{व}^2}{\text{अ}} = \frac{\text{अव} + \text{व}^2}{\text{अ}} = -\frac{-(\text{अव} + \text{व}^2)}{\text{अ}} \left. \vphantom{\frac{\text{अव} + \text{व}^2}{\text{अ}}} \right\} \text{२४६ पृष्ठ पहा.}$   
 $\text{व} \times \frac{\text{व}^2}{\text{अ}} = \frac{\text{व}^3}{\text{अ}}$

आतां शिकणारानें या पुढीलप्रमाणें करावें ;

१. अंकगणितरूप समीकरण रचायाची रीति ; दोन मूळें आणि पहिल्या पदाचा गुणक हीं घे, नंतर २४६ पृष्ठाप्रमाणें यावरून जा पद्धतीचीं हीं दोन मूळें असावीं ती पद्धति रच ; नंतर वरचे सारणीवरून या रचिलेल्या पद्धतीचीं मूळें काढ, हीं मूळें, घेतलेले मुळांबरोबर अगस्य असावीं. नंतर दुसऱ्या कांहीं पद्धती घे ; आणि त्यांचीं मूळें काढून, त्यांचा योगानें ताळा पहा.

२. वर नुसतें एकादें समीकरण घ्यावयास सांगितलें, परंतु अक्षररूप समीकरण उलगडण्याविषयीं अधिक आस्था लागेल, ह्मणून अशा जातीचा पद्धती रचायासाठीं, भलती एकादी पद्धति घे, जी शून्याशीं बरोबर होईल आणि तीमध्ये अक्षरांविषयीं एक पदाचा वर्ण दुसऱ्या पदाचे वर्णापेक्षां अधिक नसेल ; जसें या पुढील पद्धतींत

$$\text{अव}^२ - \text{अवक} + \text{अवक} - \text{अव}^२ = ०$$

क्ष = व असें केल्यानें ती पद्धति नाहींशी होईल, ह्मणजे मनांत आण कीं वचे जागीं क्ष मांडिल्यानें एक पद्धति उत्पन्न होईल, जीविषयीं ही वरची गोष्ट पहिल्यानें लक्षांत येणार नाहीं. ह्मणजे

$$\text{अक्ष}^२ - \text{अवक} + \text{अक्ष} - \text{अवक्ष} = ०$$

हिचें एक मूळ व असावें. वरचे सारणीवरून मूळें काढ.

अथवा ही पुढील रीति घे ; कांहीं दोन सरळ पद्धती घे, त्यांतील एकीस मात्र छेद असावा ; जसें  $\frac{म}{न}$  आणि प. तेव्हां

$$\text{नक्ष}^२ - (\text{म} + \text{नप})\text{क्ष} + \text{मप} = ०$$

याचीं मूळें  $\frac{म}{न}$  आणि प अशीं असावीं. ह्मणजे, यांचे जागीं व आणि  $\frac{१-अप}{अ}$  हीं घे. तेव्हां

$$म = १ - अव, न = अ, प = व,$$

$$म + नप = १ - अव + अव = १; मप = व - अव^२$$

याजकरिता या पुढील पद्धतीचीं मूळें

$$अक्ष^२ - क्ष + व - अव^२ = ०$$

याप्रमाणें असावीं,  $क्ष = व$  आणि  $क्ष = \frac{१ - अव}{अ}$

उलटा विषय.  $अक्ष^२ + वक्ष + क = ०$  या पद्धतींत,  $अ = ०$  आहे असें मनांत आण. तेव्हां तिचें रूप याप्रमाणें होतें,  $वक्ष + क = ०$ , यापासून  $क्ष = -\frac{क}{व}$ ;  $अ = ०$  अशा कल्पनेनें  $अक्ष^२ + वक्ष + क = ०$  याचीं मूळें तपासलीं असतां, त्यांचीं रूपें याप्रमाणें होतात,

$$\frac{-व + \sqrt{व^२ - ४अक}}{२अ} \text{ या पहिल्या मूळाचें रूप } ० \text{ असें होतें } ८७ \text{ पृष्ठ पहा.}$$

$$\frac{-व - \sqrt{व^२ - ४अक}}{२अ} \text{ या दुसऱ्या मूळाचें रूप } \frac{-२व}{०} \text{ असें होतें } ८० \text{ पृष्ठ पहा.}$$

ह्मणून त्या दोन्ही पृष्ठांचे गोष्टींवरून, एक मूळ अनंत आणि दुसरें इच्छेप्रमाणें कांहीं परिमाण आहे असें ह्मणावें कीं काय? या पक्षां असें ह्मणवत नाहीं; यामुळे या पक्षाचा कांहीं अधिक विचार करावा. आतां  $अ = ०$  अशा कल्पनेचे जागीं, ८१ व्या पृष्ठाप्रमाणें, अ अगळ पडेल तसा लहान आहे अशी कल्पना कर. आतां पुढें जो लेम्मा सांगतों तो बीजगणितांत सर्वत्र उपयोगी पडेल.

**लेम्मा.**  $\sqrt{व^२ + वि}$  या पद्धतींत, वि, हवी तेवढी लहान कल्पून ही पद्धति बहून इच्छेस येईल तितक्या लहान परिमाणानें भिन्न करितां येईल; आणखी, याच कल्पनेवरून ती पद्धति  $व + \frac{वि}{२व}$  याहून हवे तेवढ्ये लहान अंतरानें भिन्न करितां येईल इतकेंच नाहीं, परंतु इच्छेप्रमाणें विचे हवे तेवढ्ये लहान अपूर्णाकाचे अंतरानें भिन्न करितां येईल.

वरची गोष्ट समजायासाठीं हें पुढें सांगतों;  $\sqrt{१ + वि}$  यांत वि,

कशीहि लहान घेतली, तरी ही पद्धति १ हून विचे अर्धाचेसुमारानें अधिक होईल; परंतु  $\sqrt{१+वि}$  ही  $१+\frac{१}{२}$  वि याहून पाहिजे तर विचा एक कोट्यांशपेक्षां कमी अंतरानें भिन्न अशी करितां येईल.

या लेम्माचा पहिला भाग स्पष्ट आहे; त्याचा दुसरा भाग या पुढील प्रमाणें सिद्ध होतो;

$$\begin{aligned} & \left(व + \frac{वि}{२व} + \sqrt{व^२+वि}\right) \left(व + \frac{वि}{२व} - \sqrt{व^२+वि}\right) \\ &= \left(व + \frac{वि}{२व}\right)^२ - (व^२+वि) \\ &= व^२ + २व \times \frac{वि}{२व} + \frac{वि^२}{४व^२} - व^२ - वि \\ &= व + वि + \frac{वि^२}{४व^२} - व - वि = \frac{वि^२}{४व^२} \end{aligned}$$

$$\text{यामुळे, } व + \frac{वि}{२व} - \sqrt{व^२+वि} = \frac{\frac{वि^२}{४व^२}}{व + \frac{वि}{२व} + \sqrt{व^२+वि}}$$

परंतु या शेवटील अपूर्ण बीजास जो छेद आहे, त्यांत वि कमी केली असतां,  $व + \sqrt{व^२}$  अथवा  $२व$  यांचे जवळ जवळ तो छेद होईल. तो छेद दाखवायासाठीं  $२व + व$  घे, त्यांत अगत्याप्रमाणें वि लहान केल्यानें, व इच्छेप्रमाणें लहान होत जाईल. तेव्हां

$$व + \frac{वि}{२व} - \sqrt{व^२+वि} = \frac{वि^२}{४व^२(२व+व)} = \frac{वि}{४व^२(२व+व)} \times वि$$

ह्मणजे,  $व + \frac{वि}{२व}$  आणि  $\sqrt{व^२+वि}$  यांचें अंतर केवळ विचे कांहीं अपूर्ण

बीजपदा इतकें आहे, ह्मणजे विचे  $\frac{वि}{४व^२(२व+व)}$  इतकें त्यांचें अंतर

आहे. परंतु वि हवी तेवढी लहान करितां येती, आणि वर सांगितलें या कारणास्तव व हि लहान होत जाईल, ह्मणजे  $४ब^३(२ब+व)$  ही पद्धति इच्छेप्रमाणें  $४ब^३ \times २ब$  अथवा  $८ब^४$  याचे जवळ करितां येईल, यावरून  $ब + \frac{वि}{२ब}$  आणि  $\sqrt{ब^३ + वि}$  यांचें अंतर जें विचें अपूर्ण बीजपद आहे, तें अपूर्णबीज या पुढीलप्रमाणें दाखवितां येईल;

वि (इच्छेप्रमाणें कांहीं लहान परिमाण)

$८ब^४$  (कांहीं दिलेलें परिमाण + इच्छेप्रमाणें कांहीं लहान परिमाण)

आणि या कारणास्तव हें अपूर्ण बीजपरिमाण इच्छेप्रमाणें हवें तेवढें लहान करितां येईल.

या पुढीलाची सिद्धता वरचेच प्रमाणें होईल; ह्मणजे,  $ब - \frac{वि}{२ब}$  आणि  $\sqrt{ब^३ - वि}$  या दोन्हीं पद्धती इच्छेप्रमाणें विचे हवे तेवढ्ये लहान अपूर्ण बीजानें भिन्न करितां येतील.

आतां इच्छेप्रमाणें हवा तेवढा अ लहान करितां येईल, या कल्पनेवरून या पुढील मूळांचे विचारास वरचा सिद्धांत लावितों.

$$\frac{-ब + \sqrt{ब^३ - ४अक}}{२अ} \text{ आणि } \frac{-ब - \sqrt{ब^३ - ४अक}}{२अ}$$

यांत क दिलेलें परिमाण आहे, यामुलें इच्छेप्रमाणें ४अक हवे तितके लहान होतील; आणि वरचे लेम्माप्रमाणें जर वि = ४अक, तर

$\sqrt{ब^३ - ४अक}$  ही पद्धति  $ब - \frac{४अक}{२ब}$  या पद्धतीहून ४अक यांचे हवे तेवढे लहान अपूर्ण बीजानें भिन्न करितां येईल.

तर,  $\sqrt{ब^३ - ४अक} = ब - \frac{४अक}{२ब} - ५ \times ४अक$  असें घे, यांत इच्छेप्रमाणें ५ आणि अ हवे तेवढे लहान करितां येतील.

तेव्हां मूळें याप्रमाणें आहेत,

$$\frac{-व+व-\frac{४अक}{२व}-४पअक}{२अ} \quad \text{आणि} \quad \frac{-व-व+\frac{४अक}{२व}+४पअक}{२अ}$$

$$\text{अथवा} \quad -\frac{क}{व}-२पक \quad \text{आणि} \quad \frac{-२व+\frac{२अक}{व}+४पअक}{२अ}$$

आतां अला उत्तरोत्तर कमी कर, तर अशे पक्षीं तशेच रितीनें प अधिक अधिक कमी होईल. पहिलें मूळ  $-\frac{क}{व}$ , आणि दुसरें मूळ  $-\frac{२व}{०}$  अशे रूपाचे जवळ जवळ येतात. परंतु जा पक्षांत  $अ=०$ , ह्मणजे जांत  $वक्ष+क=०$ , अशी कल्पना केली, ह्मणजे जा पक्षांत  $अक्ष^२+वक्ष+क=०$  असें समीकरण होतें, त्याचें एक मूळ वरचे पहिल्ये मूळाबरोबर आहे, त्यापासून,  $क्ष=-\frac{क}{व}$  असें निघतें. दुसरे मूळाविषयीं अर्थअशा-पि सांगितला नाही.

दृष्टांतार्थ कृत्य. अ, व, क, आणि इ, असे चार अंक आहेत, यांतून शेवटील तीन कांहीं अंकानें वाढविले आहेत, आणि त्यांतील पहिला त्या अंकाचे म वेळांनीं वाढविला आहे. असें केल्यावर ते अंक प्रमाणांत होतात. यावरून ते अंक काय आहेत?

अंक दाखविण्यासाठीं क्ष घे. तर  $मक्ष+अ, क्ष+व, क्ष+क$ , आणि  $क्ष+इ$  हे प्रमाणांत आहेत.

$$\text{अथवा} \quad \frac{मक्ष+अ}{क्ष+व} = \frac{क्ष+क}{क्ष+इ} \quad \text{अथवा} \quad (मक्ष+अ)(क्ष+इ) = (क्ष+व)(क्ष+क)$$

हे गुणाकार कर, आणि त्यांस  $प=०$  अशे रूपाचे समीकरणाचें रूप दिल्यानें, या पुढीलप्रमाणें होईल,

$$(म-१)क्ष^२+(मइ+अ-व-क)क्ष+अइ-वक=०$$

क्षचा किंमती या पुढील पद्धतींत आहेत.

$$\frac{-(मइ+अ-व-क) \pm \sqrt{(मइ+अ-व-क)^२-४(म-१)(अइ-वक)}}{२(म-१)}$$



आणि यामुळे, बहुत करून, कृष्यांचीं दोन उत्तरे आहेत. परंतु जर  $m=१$ , ह्यणजे जर क्ष असा घ्यावा लागतो कीं क्ष+अ, क्ष+ब, क्ष+क, क्ष+इ, प्रमाणांत आहेत, तर जा पक्षाचा विचार करण्याची इच्छा आहे तसा पक्ष उत्पन्न होतो; कांकीं  $m-१=०$ ; यामुळे समीकरणाचें रूप या प्रमाणें होतें,

$$(इ+अ-ब-क) क्ष+अइ-बक=०;$$

यांतून केवळ एक मूळ निघतें; आणि वरचे दोन मूळांतून एकाचें या-प्रमाणें रूप होतें,

$$\frac{-२(इ+अ-ब-क)}{०}$$

या रूपाचे पद्धतीचा अर्थ ८६ आणि ८७ पृष्ठांवरून हाच आहे, कीं कोणताहि मोठा अंक, कृष्याचे संकेतांस जवळ जवळ स्थापील, त्या-पेक्षां अधिक मोठा अंक त्यांस अधिक जवळ स्थापील, आणि याप्रमाणें पुढें. आतां हेंच विचारायाचें राहिलें. कीं जसा जसा क्ष वाढवावा तसतसे, क्ष+अ, क्ष+ब, क्ष+क, क्ष+इ, हे प्रमाणांत अधिक अधिक जवळ होत जातील कीं काय; ह्यणजे,

$$\frac{क्ष+अ}{क्ष+ब} = \frac{क्ष+क}{क्ष+इ} \text{ हें समीकरण खरेपणाचे जवळ होईल कीं काय ? }$$

या दोन अपूर्ण बीजांचे अंश आणि छेद क्षनें भाग; तेणेंकरून त्यांचें

$$\text{रूप याप्रमाणें होईल } \frac{१+\frac{अ}{क्ष}}{१+\frac{ब}{क्ष}} = \frac{१+\frac{क}{क्ष}}{१+\frac{इ}{क्ष}}, \text{ यांत क्ष हवा तितका मोठा केला}$$

असतां, हें समीकरण इच्छेप्रमाणें खरेपणाचे जवळ होईल; कां कीं, असें केल्यानें,  $\frac{अ}{क्ष}, \frac{ब}{क्ष}, \frac{क}{क्ष}$ , आणि  $\frac{इ}{क्ष}$  हवे तेवढे लहान होतील, आणि वरचें समीकरण  $\frac{१}{१} = \frac{१}{१}$  इच्छेप्रमाणें यांचे जवळ जवळ करितां येईल.

यावरून दिसतें, कीं कृष्यास जेव्हां बहुतकरून, दोन उत्तरे असतात आणि जेव्हां एकादे विशेष पक्षां त्यांचें एकच उत्तर निघतें, तेव्हां ८६ आणि ८७ पृष्ठांवरचे गोष्टीचे अर्थाप्रमाणें, असें झटलें पाहिजे, कीं अव्यक्त पदाचें दुसरें उत्तर अनंत आहे.

परंतु —  $\frac{२३}{०}$  याचा अर्थ जो ८६ आणि ८७ पृष्ठांवर सांगितला, तो जरी वरचे गोष्टीवरून स्थापिला जातो, तथापि हेहि पाहण्यांत येतें, कीं  $\frac{०}{०}$  हें दुसऱ्या मूळाचें रूप आहे, यास, क्षची कोणतीहि किंमत समीकरणास स्थापिल असा ८७ पृष्ठावर जो अर्थ आहे, तो लागू पडत नाही, परंतु तें रूप हें दाखवितें कीं खरें मूळ —  $\frac{०}{०}$  आहे. या गोष्टीविषयी पुढील अध्यायामध्ये पुनः विचार होईल.

वरचे पक्षांत  $अ=०$ , अशा कल्पनेनें नव्या गोष्टी दिसून येतात; आतां  $क=०$  अशी कल्पना कर. त्यावरून समीकरण याप्रमाणें होतें,  $अक्ष + वक्ष = ०$ , अथवा क्ष (अक्ष + व) = ०; हें समीकरण  $क्ष=०$  अथवा  $अक्ष + व=०$  असें असलें तरी स्थापिलें जातें. ह्मणजे, याचीं मूळें ० आणि  $\frac{०}{०}$  हीं आहेत. मूळांविषयींचा सामान्य सारणीपासून ही गोष्ट पाहण्यांत येईल.

याच सारखें, जर  $व=०$  आहे, तर समीकरण याप्रमाणें होतें,  $अक्ष + क=०$ .

$$क्ष = -\frac{क}{अ},$$

$$क्ष = +\sqrt{-\frac{क}{अ}} \text{ अथवा } -\sqrt{-\frac{क}{अ}}$$

क आणि अ यांची चिन्हे निरनिराळीं असतील, तर एक मूळ धन आहे, आणि दुसरें ऋण आहे, आणि क आणि अ यांची चिन्हे सारखीच असतील, तेव्हां दोन्ही मूळें केवळ चिन्हरूप आहेत. ही गोष्ट याच सामान्य सारणीपासून निघती.

वरचा सिद्धांत पुष्कळ कामांत येतो, यांतून एक उदाहरण सांगतों. दोन परिमाणांची बेरीज (स) आणि त्यांचा गुणाकार (प) हीं दोन्ही ठाऊक आहेत अशी कल्पना कर, तर अशी एक पद्धति काढ, कीं तीत ती बेरीज आणि गुणाकार यांशिवाय दुसरें कांहीं पद येणार नाही, आणि त्या पद्धतीचा योगानें त्या दोन परिमाणांचे वर्गांची, अथवा घनांची, अथवा चतुर्घातांची इत्यादि, बेरीज कळेल.

हीं दोन इच्छिलेलीं परिमाणें २४६ पृष्ठाप्रमाणें या पुढील पद्धतीचीं मूळें आहेत,  $क्ष^२ - सक्ष + प = ०$ ,  $(\times)क्ष^n$  तर  $क्ष^{n+२} - सक्ष^{n+१} + पक्ष^n = ०$  तीं दोन मूळें दाखविण्यासाठीं क्ष आणि क्ष घे; तर याप्रमाणें होईल,

$$\text{क्ष}_1^{n+2} - \text{सक्ष}_1^{n+1} + \text{पक्ष}_1^n = 0$$

$$\text{क्ष}_1^{n+2} - \text{सक्ष}_1^{n+1} + \text{पक्ष}_1^n = 0$$

$$(+) \quad \text{क्ष}_1^{n+2} + \text{क्ष}_1^{n+2} - \text{स}(\text{क्ष}_1^{n+1} + \text{क्ष}_1^{n+1}) + \text{प}(\text{क्ष}_1^n + \text{क्ष}_1^n) = 0$$

क्ष आणि क्ष यांचे न घातांची बेरीज दाखविण्यास अ<sub>n</sub> घे; यावरून वरचे समीकरणाचे रूप याप्रमाणे होईल,

$$\text{अ}_{n+2} - \text{स अ}_{n+1} + \text{प अ}_n = 0$$

$$\text{अथवा} \quad \text{अ}_{n+2} = \text{स अ}_{n+1} - \text{प अ}_n$$

$$\text{आतां जर } n=0 \text{ तर अ}_0 = \text{क्ष}_1^0 + \text{क्ष}_1^0 = 1+1 = 2, 1 \text{ ७२ पृष्ठ पहा.}$$

$$\text{अ}_1 = \text{क्ष}_1 + \text{क्ष}_1 = \text{स}$$

यामुळे वरचे समीकरणावरून

$$\text{अ}_2 = \text{स अ}_1 - \text{प अ}_0 = \text{स}^2 - २\text{प}$$

$$\text{अ}_3 = \text{स अ}_2 - \text{प अ}_1 = \text{स}(\text{स}^2 - २\text{प}) - \text{पस} = \text{स}^3 - ३\text{पस}$$

$$\text{अ}_4 = \text{स अ}_3 - \text{प अ}_2 = \text{स}(\text{स}^3 - ३\text{पस}) - \text{प}(\text{स}^2 - २\text{प}) = \text{स}^4 - ४\text{पस}^2 + २\text{प}^2$$

याप्रमाणे पुढेहि.

वर जी गोष्ट सिद्ध केली तिचे सहाय्याने पुष्कळ समीकरणे उलगडतात; याचे कारण हेंच, की, अव्यक्त पदाविषयी तीं समीकरणे जरी बरोबर दोन वर्णांचीं नाहीत, तथापि खांतील जा पद्धतींत अव्यक्तपद असतें, तिजविषयी तीं समीकरणे दोन वर्णांचीं असतात. उदाहरण,

$$\text{क्ष}^2 - ३\text{क्ष} + १ = २ - \sqrt{\text{क्ष}^2 - ३\text{क्ष} + १}$$

या समीकरणास स्थायील अशी क्षची किंमत काढायास इच्छितों,  
या समीकरणाचे मूळ चिन्ह घालवायासाठी, पुढीलप्रमाणे केलें पाहिजे

$$\sqrt{\kappa^2 - 3\kappa + 1} = 1 + 3\kappa - \kappa^2; \text{ दोन्ही बाजूंचा वर्ग कर,}$$

$$\kappa^2 - 3\kappa + 1 = 1 + 6\kappa + 9\kappa^2 - 6\kappa^3 + \kappa^4$$

$$\text{अथवा } \kappa^4 - 6\kappa^3 + 6\kappa^2 + 9\kappa = 0$$

हे क्षविषयीं चार वर्णांचें समीकरण आहे, जाचा उलगडण्याची रीति मागें कोठेहि आली नाहीं. परंतु मूळचें समीकरण पाहिलें असतां, तें  $\text{वि}^2 = 2 - \text{वि}$  या रूपाचें आहे असें दिसतें; कां कीं जर  $\sqrt{\kappa^2 - 3\kappa + 1} = \text{वि}$  आहे, तर  $\kappa^2 - 3\kappa + 1 = \text{वि}^2$ . आतां  $\text{वि} = \sqrt{\kappa^2 - 3\kappa + 1}$  असें घे, तर

$$\text{वि}^2 + \text{वि} - 2 = 0,$$

$$\text{वि} = 1 \text{ अथवा } -2$$

पहिल्यानें  $\text{वि} = 1$  असें घे, तर

$$\sqrt{\kappa^2 - 3\kappa + 1} = 1 \text{ अथवा } \kappa^2 - 3\kappa + 1 = 1, \therefore \kappa = 0 \text{ अथवा } 3$$

दुसऱ्यानें  $\text{वि} = -2$  असें घे, तर

$$\sqrt{\kappa^2 - 3\kappa + 1} = -2 \text{ अथवा } \kappa^2 - 3\kappa + 1 = 4 \therefore \kappa = \frac{3 \pm \sqrt{29}}{2}$$

ह्मणून क्षचा या पुढील किमतीनें मूळचें समीकरण स्थापितां येतें;

$$0, \quad 3, \quad \frac{3 + \sqrt{29}}{2}, \text{ आणि } \frac{3 - \sqrt{29}}{2}$$

पुनः,  $2\kappa^2 - 3 = \kappa^3$  असें समीकरण घे. एथें  $\kappa^2 = (\kappa^3)^2$ ;  $\text{वि} = \kappa^3$  घे, यावरून समीकरण याप्रमाणें होतें, ह्मणजे,  $2\text{वि}^2 - 3 = \text{वि}$ ; याचीं मूळे  $-1$  आणि  $\frac{3}{2}$  हीं आहेत. यावरून,  $\kappa^3 = -1$  अथवा  $\kappa^3 = \frac{3}{2}$ ; ह्मणजे  $\sqrt[3]{-1}$  आणि  $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$  यांचा कोणत्याहि खऱ्या किंवा केवळ चिन्ह-रूप किमती असतील, त्या  $2\kappa^2 - 3 = \kappa^3$  या समीकरणाचीं मूळे आहेत.

समीकरणांत करणी चिन्हे असतात; त्यांस घालवावयाचा कृतींचीं कांहीं उदाहरणें सांगून हा अध्याय संपवितों.

$$\sqrt{\kappa} + \sqrt{\kappa+1} + \sqrt{\kappa+2} = 2$$

$$\therefore \sqrt{\kappa} + \sqrt{\kappa+1} = 2 - \sqrt{\kappa+2}$$

दोन्ही बाजूंचा वर्ग कर.

$$\kappa+2 + \sqrt{\kappa} \cdot \sqrt{\kappa+1} + \kappa+1 = 4 - 4\sqrt{\kappa+2} + \kappa+2$$

अथवा  $2\sqrt{\kappa(\kappa+1)} + 4\sqrt{\kappa+2} = 4 - \kappa$

पुनः दोहोंबाजूंचा वर्ग कर.

$$4\kappa(\kappa+1) + 16\sqrt{\kappa(\kappa+1)}\sqrt{\kappa+2} + 16(\kappa+2) = 16 - 8\kappa + \kappa^2$$

अथवा  $16\sqrt{\kappa(\kappa+1)}(\kappa+2) = -(7+3\kappa+3\kappa^2)$

पुनः दोहोंबाजूंचा वर्ग कर.

$$256\kappa(\kappa+2)(\kappa+2) = (7+3\kappa+3\kappa^2)^2$$

यांत कांहीं करणी चिन्ह नाहीं, ह्मणून सहज उलगडतां येईल.

पुढे कांहीं सोपीं उदाहरणें देतो, तीं शिकणारानें उलगडावीं.

समीकरण,  $\sqrt{\kappa+4} + \sqrt{\kappa-3} = 8$

यापासून  $\kappa-8 = 0$  असें होतें.

समीकरण,  $\sqrt{\kappa+अ} + \sqrt{\kappa+ब} = क$

यापासून  $8\kappa^2\kappa+8अब-(क^2-अ-ब)^2 = 0$  असें होतें.

परंतु एथें मनांत आणिलें पाहिजे, कीं

$$(\kappa+अ)^{\frac{1}{2}} + (\kappa+ब)^{\frac{1}{2}} = क \quad २२४ \text{ आणि } २२५ \text{ पृष्ठें पहा.}$$

याचें उत्तर वरचे उत्तरासारिखेंच येतें, आणि त्याचीं या पुढीलप्रमाणें चार रूपें आहेत.

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{\kappa+अ} + \sqrt{\kappa+ब} = क & -\sqrt{\kappa+अ} + \sqrt{\kappa+अ} = क \\ \sqrt{\kappa+अ} - \sqrt{\kappa+ब} = क & -\sqrt{\kappa+अ} - \sqrt{\kappa+अ} = क \end{array}$$

जी क्षची किंमत वर निघाली, ह्मणजे

$$\text{क्ष} = \frac{(क^2 - अ - व)^2 - ४अव}{४क^2}$$

ही किंमत वरचे चार रूपांतून केवळ एकास मात्र स्थापिती. यामुळे, जेव्हां वरचे समीकरणांतून एक उत्तर निघते. तेव्हां कृत्र पुरतेपणीं समजांत आले अशी खात्री होत नाही, यास्तव यांतून दुसरें एक समीकरण निघेल असे विस्ताररूप त्या कृत्रास दिलें पाहिजे.

अभ्यासासाठीं ही पुढील उदाहरणे देतो ;

१.  $अ + \frac{१}{अ}$  ही पद्धति गणितरूपानें २पेक्षां कमी होऊं कशत नाही. हें दाखीव. यास याप्रमाणें सिद्ध कर, ह्मणजे  $अ + \frac{१}{अ} = २ - प$  यांत जेव्हां ४ आणि ० यांचेमध्ये प असेल, तेव्हां या समीकरणाचीं मूळे केवळ चिन्हरूपाचीं आहेत हें दाखीव.  $(अ - १)^२$  ही पद्धति सर्वदा धन असती त्यापासून ही वरची गोष्ट सिद्ध होईल ;

२.  $अ^२ + व^२$  ही २ अवपेक्षां खचित् अधिक असावी हें दाखीव.

३. जर  $अ + \frac{१}{अ} = स$  आहे, तर पुढील समीकरणें सिद्ध कर,

$$अ^२ + \frac{१}{अ^२} = स^२ - २, \quad अ^३ + \frac{१}{अ^३} = स^३ - ३स, \quad अ^४ + \frac{१}{अ^४} = स^४ - ४स^२ + २.$$

४.  $अक्ष^२ + वक्ष + क$  या पद्धतीचीं मूळे क्ष आणि क्ष॥ असतील, तर याप्रमाणें होईल ह्मणजे,

$$\text{क्ष}_1 - \text{क्ष}_{||} = \pm \frac{१}{अ} \sqrt{व^२ - ४अक}, \quad \frac{\text{क्ष}_1}{\text{क्ष}_{||}} = \frac{व^२ - २अक}{२अक} \pm \frac{व}{२अक} \sqrt{व^२ - ४अक}$$

$$\frac{\text{क्ष}_1}{\text{क्ष}_{||}} + \frac{\text{क्ष}_{||}}{\text{क्ष}_1} = \frac{व^२ - २अक}{अक}, \quad \frac{१}{\text{क्ष}_{||}} + \frac{१}{\text{क्ष}_1} = -\frac{व}{क}$$

५.  $अक्ष^२ + वक्ष + क$  या पद्धतींत, एक मूळ दुसऱ्या मूळापेक्षां मनें अधिक आहे हें पूर्वी ठाऊक आहे अशी कल्पना कर, तर सारणीचे सहाय्यावांचून या पद्धतीचीं मूळे काढ. त्या पद्धतीचें एक मूळ दुसऱ्या मूळाचा न वेळा आहे अशा कल्पनेवरून तिचीं मूळे काढ.

## सहावा अध्याय.

### नियत आणि अनियत परिमाणांविषयीं.

कांहीं विशेष कल्पनांपासून जीं फलें उत्पन्न होतात, तीं यापूर्वी पहाण्यांत आलीं; जीं परिमाणें कांहीं पक्षीं समजाया जोगीं होतीं, तीं वर सांगितलेल्या विशेष कल्पनेचा योगानें  $\frac{क}{०}$ ,  $\frac{०}{०}$ ,  $अ^०$ , इत्यादि, अशा रूपाचीं झालीं. या रूपांशिवाय आतां नुसत्या ० या रूपाचा विचार करितों; ह्मणजे जा तऱ्हेनें त्यास कामांत आणावें लागेल त्याविषयीं कांहीं विचार करावा लागेल; पूर्वीं असें समजलें कीं सर्व समीकरणांस  $प=०$  असें रूप दिल्यानें सोडवार पडतें, तर त्यावरून, कदाचित् दृष्टी चुकून, या पुढील सारिखे सारांश मनांत येतील; जर  $अब=०$  आणि  $अक=०$ , तर  $अब=अक$  अथवा  $ब=क$  होईल. या गोष्टीविषयीं हें पुढील आश्चर्यकारक उदाहरण सांगतों; जर  $क्ष-२=०$ , तर त्यावरून  $क्ष^२-४=०$ , आणि  $क्ष^२-२क्ष=०$  असें होतें. तर आतां या दोन पद्धती समीकरणरूपानें मांडितां येतील कीं काय, आणि पूर्वीं सांगितल्या कोणत्याहि रितीनें तीं समीकरणें उलगडावीं कीं काय! असें केलें तर,  $क्ष^२-४=(क्ष-२)(क्ष+२)$  आणि  $क्ष^२-२क्ष=क्ष(क्ष-२)$ , तर ससीकरण याप्रमाणें होईल,

$$(क्ष-२)(क्ष+२)=(क्ष-२)क्ष \quad (\div) \quad (क्ष-२) \quad क्ष+२=क्ष$$

परंतु  $क्ष-२=० \quad \therefore क्ष=२ \quad \text{अथवा} \quad ४=२$

हें उत्तर अयुक्तिक आहे, यावरून असें दिसतें कीं कृतीमध्ये कांहीं अयुक्तिक गोष्ट झाली.  $क्ष-२$  जाची किंमत शून्य आहे, त्याणें समीकरणाचा दोन्ही बाजू भागिल्या यापासून खोटेपणाचा भास होतो,  $क्ष-२=०$  अशी कल्पना घेऊन कृतीमध्ये ० येतें, तर तें तसेंच ठेऊन वरची कृति केली, आणि नंतर ० याचे जागीं  $क्ष-२$

कामांत आणिले, तर या पुढीलप्रमाणे खोटेपणा सहज लक्षांत येईल;

$$अ \times ० = ०, \quad ब \times ० = ०, \quad \therefore अ \times ० = ब \times ०, \quad (\div) ०$$

तर, अ = ब झणजे, एथे परिमाणासारखे ० कामांत आणले आहे, आणि ० = ० अशी प्रतिज्ञा केली आहे आणि ० न्याने भागाकार-हि केला आहे. आतां  $\angle ०$  पृष्ठावर जे मूळ कारण सांगितले त्याअकडे लक्ष देऊन क्ष - २ = ० अशा कल्पनेचे जागीं क्ष - २ = अति लहान परिमाण कल्पितो, आणि दोन जवळ जवळचा उभ्या ओर्लीत दोन सारख्या रूपांचा कृति चुक्यांसुद्धां करून दाखवितो.

$$क्ष - २ = ० \text{ असे घे}$$

$$\therefore क्ष^२ - ४ = ०$$

$$\text{आणि } क्ष^२ - २क्ष = ०$$

$$\therefore क्ष^२ - २क्ष = क्ष^२ - ४$$

$$\text{अथवा } क्ष(क्ष - २) = (क्ष - २)(क्ष + २)$$

$$(\div) (क्ष - २) \quad क्ष = क्ष + २$$

$$\text{परंतु } क्ष - २ = ० \text{ अथवा } क्ष = २$$

$$\therefore २ = ४$$

क्ष - २ हवे तेवढे लहान किमतीचे घे

$\therefore$  क्ष<sup>२</sup> - ४ हवे तेवढे लहान किमतीचे होतील

आणि क्ष<sup>२</sup> - २क्ष हवे तेवढे लहान होतील

$\therefore$  क्ष<sup>२</sup> - २क्ष आणि क्ष<sup>२</sup> - ४ हवे तेवढे बरोबरीचे जवळ जवळ होऊं शकतात

आणि क्ष (क्ष - २) आणि (क्ष - २) (क्ष + २) हेहि बरोबरीचे होतील

( $\div$ ) (क्ष - २) तेव्हां क्ष आणि क्ष + २ हे हवे तेवढे जवळ जवळ बरोबर होऊं शकतात. परंतु इच्छेप्रमाणे क्ष हा २ चे जवळ जवळ होईल;

याअकरितां २ आणि ४ हे इच्छेप्रमाणे हवे तेवढे जवळ जवळ बरोबर होऊं शकतात.



८४ आणि ८५ पृष्ठांवरून बरोबर हा शब्द कोणत्या-  
हि अर्थाने घेतला, तरी वरचा दुसऱ्या उभे ओळीत चूक आहे.  
जा परिमाणाने अंतर लहान आहे ती जवळ जवळ बरोबर असे  
झटले, तथापि क्ष<sup>३</sup>-२ क्ष आणि क्ष<sup>३</sup>-४ हे जवळ जवळ बरोबर  
आहेत, याकरिता त्यांस क्ष-२ यांनी भागिल्यानंतर, त्यांचे भा-  
गाकार त्याप्रमाणे जवळ जवळ होतील हे समजत नाही. कां  
की जर क्ष-२ =  $\frac{1}{1000}$  असे असेल, तर क्ष-२ यांनी भागावे  
आणि १००० यांनी गुणावे, ही दोन्ही बरोबरच आहेत, अथवा  
क्ष आणि क्ष+२ या दोन भागाकारांचे अंतर, क्ष<sup>३</sup>-४ क्ष आणि  
क्ष<sup>३</sup>-४ यांचे अंतराचे १००० पट आहे. आणि क्ष-२ जितके  
लहान होतील त्याप्रमाणे क्ष-२ यांनी भागतांना जो गुणाकार  
उत्पन्न होतो, तो गुणाकार फार मोठा होईल. क्ष<sup>३</sup>-२ क्ष आणि  
क्ष<sup>३</sup>-४ यांचे अंतरापेक्षा क्ष आणि क्ष+२ या दोन भागाकारांचे  
अंतर त्यांचेच कांहीं मोठे प्रमाणाने अधिक नाही, आणि ८५  
पृष्ठावरचा गोष्टीतील अर्थाप्रमाणे जेव्हा अ, ब, क, आणि ड हीं  
चार परिमाणे आहेत, त्यांतून अला जसा क प्रमाण, त्याच प्रमा-  
णाने, जेव्हा पहिल्या दोहोंचे अंतर दुसऱ्या दोहोंचा अंतरास होईल,  
तर क जा प्रमाणाने डचे बरोबरीचे जवळ जवळ आहे, त्या प्रमा-  
णाने अहा बचे बरोबरीचे जवळ जवळ होईल असे झटले पाहिजे;  
तर यास उत्तर हेंच, की क्ष<sup>३</sup>-२ क्ष आणि क्ष<sup>३</sup>-४ हे लहान आहेत,  
आणि यांमुळे यांचीं अंतरांहि लहान आहेत झणून, ते जवळ ज-  
वळ बरोबर आहेत असे झणवत नाही; कां की ते दोनहि लहान  
असतील, तथापि एक दुसऱ्यापेक्षा पुष्कळ मोठा असेल. जर सर्व  
पृष्ठा दाखवायासाठी १ घेतला, तर हत्ती आणि मत्तूर हीं दोन्ही  
त्या प्रमाणाने अतिशय लहान अपूर्णांक आहेत, परंतु ते कोणत्या-  
हि अर्थाने जवळ जवळ बरोबर नाहीत.

वरचे गोष्टीवरून हे समजते, की अ आणि ब हे परस्परांचे  
केवळ अति लहान अंशाने भिन्न आहेत, तेव्हा ते जवळ जवळ  
बरोबर आहेत असे झटल्याने, दोन लहान परिमाणे लहान आहेत  
झणून तीं जवळ जवळ बरोबर आहेत असे झणवत नाही.

$$अ-ब=० \text{ आणि } \frac{अ}{ब}=१$$

आतां ही पुढील व्याख्या सांगतो. बरोबरीचे जवळ जवळ येणें हें अंतराचे न्यूनतेनें मोजितां येत नाहीं, परंतु भागाकार १ याचे जवळ येण्यानें मोजिलें जातें. जसें, जरी ३-२ यांचें अंतर २५-२० यांचे अंतरापेक्षां कमी आहे, तथापि २५ हे २० चे जवळ जवळ बरोबर होण्यापेक्षां ३ हे २ चे अधिक जवळ जवळ बरोबर नाहींत. परंतु २५ हे २० यांचे जवळ जवळ बरोबर होण्यास जितके जवळ आहेत तितके ३ हे २ चे जवळ जवळ बरोबर होत नाहीं, कांकीं  $\frac{३}{२}$  हे १ पेक्षां  $\frac{१}{२}$  नें अधिक आहेत आणि  $\frac{२५}{२०}$  हे १ पेक्षां  $\frac{१}{४}$  नें मात्र अधिक आहेत, ह्यणजे  $\frac{१}{४}$  हा  $\frac{१}{२}$  पेक्षां कमी आहे.

जवळ जवळ बरोबर असे शब्द कामांत घ्यावे लागतील, तर याविषयीं जा गोष्टी ८४ आणि ८५ पृष्ठांत आणि वर जें मोठे अक्षरांनीं लिहिलें तें पहा.

सिद्धांत. अपूर्णाकाची किंमत त्याचे पदांचे शुद्ध किंमतीवरून होत नाहीं, परंतु त्या पदांचे संबंधाचे किंमतीवरून होती.  $\frac{मअ}{मब} = \frac{अ}{ब}$  या समीकरणांत या वरचे सिद्धांताची गोष्ट आहे, असें या पुढील उदाहरणापासून दिसेल.

१. असा एक अपूर्णाक काढ कीं जाचे अंश ५८३ असून, तो  $\frac{१}{१०००}$  चा इतका लहान होईल.

$$\text{उत्तर } \frac{५८३}{५८३०००}$$

२. अ आणि ब असे दोन अपूर्णाक काढ, कीं ते प्रत्येक  $\frac{१}{१०००}$  पेक्षां कमी असून,  $\frac{अ}{ब}$  दहा लक्षांबरोबर होईल.

$$\text{उत्तर } अ = \frac{१}{२०००}, ब = \frac{१}{२०००००००००}$$

$$\text{एथें } \frac{अ}{ब} = १०००००००$$

$$\frac{ब}{अ} = \frac{१}{१०००००००}$$

कमी असून,  $\frac{अ}{ब} = म$  होईल.

उत्तर. २ क पक्षां प कमी होईल या संकेतानें प आणि क असे भलते कांहीं दोन अंक घे, ते याप्रमाणें असावे

$$अ = \frac{प}{क}, \text{ आणि } ब = \frac{प}{मक}$$

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. पहा या उदाहरणांत सगळीं अक्षरें धन आहेत.  $प+क+म$  यांचे जवळ जवळ होण्यास जितका  $प+म$  आहे, तितका  $प+क$  चे जवळ जवळ होण्यास प नाही. क जितका इचे बरोवरीचे जवळ जवळ आहे, त्याहून जर ब अधिक अ चे बरोवरीचे जवळ जवळ असेल, तर अ जितका वचे बरोवरीचे जवळ जवळ आहे, तितका  $ब+इ$ चे जवळ जवळ बरोबर होण्यास  $अ+क$  नाही, परंतु क जितका इचे बरोवरीचे जवळ जवळ आहे, त्याहून अधिक बरोवरीचे जवळ जवळ आहे. पुनः नय याचे जवळ जवळ होण्यास जितका मय आहे, तितका नक्ष चे जवळ जवळ होण्यास मक्ष आहे.

नियमित आणि अनियमित या शब्दांचे अर्थाविषयीं कांहीं गोष्ट सांगितली पाहिजे. कांहीं विशेष पक्ष सांगण्याचा असेल, खांतील एकादा शब्द कामांत आणण्यास योग्य आहे किंवा नाही, याविषयीं कांहीं संशय नसला, तर त्या शब्दास नियमित ह्मणतात. कांहीं विशेष पक्षांत एकादा शब्द कामांत आणण्याविषयीं संशय असेल, तर त्या शब्दास अनियमित ह्मणतात. जसे बरोबर हा शब्द नियमित आहे  $४+४$  हे ९ यांचे बरोबर आहेत कीं काय ? असे प्रश्नाचे उत्तराविषयीं दोन मते कधींहि होणार नाहीत. परंतु मोठा हा शब्द अनियमित आहे. १००० हा मोठा अंक आहे कीं काय ? यास उत्तर हेंच, कीं सर्व लोकांस मान्य, असें कोणत्याहि पक्षां, या प्रश्नाचे उत्तर देवत नाही. नियमित आणि अनियमित या शब्दांचीं कांहीं उदाहरणें देतो.

नियमित शब्द. बरोबर, केवळ सारखा, अधिक जवळ, अधिक मोठा, अधिक लहान, अति मोठा, अति लहान, इत्यादि, हवा तितका, इतका मोठा, अगदि.

अनियमित शब्दांचा अर्थ वाढविल्याने, त्यांचा अर्थ असा व्हावा, की त्या अर्थाने ते कामांत घेतले असता, जा प्रतिज्ञांत मतभेद आहे, त्या जर गणितरूप सिद्धांत अशा दिसणार नाहीत, तर या शब्दांचा उपयोग करितां येईल. आणि असें नसल्यास त्या शब्दांची कांहीं गरज पडणार नाही. या गोष्टीचे उदाहरण दाखविण्यासाठीं जवळ, लहान, आणि मोठा, हे शब्द घेतों. १२७ पृष्ठा वर उणें शब्दाचा अर्थ दाखविला आहे तशा रितीने अधिक लहान हा शब्द बदल केला आहे असें मनांत आणूं नये. तो शब्द गणितरूपाचा अर्थ तसाच दाखवितो. जर क्ष लहान असेल, तर ७+क्ष हे ७ यांचे जवळ जवळ बरोबर आहेत कीं काय! या प्रतिज्ञेविषयीं सर्व लोक एकमत होतील; आणि त्याचें कारण हेंच, कीं लहान या शब्दाचा अर्थ दाखविण्याविषयीं जो अपूर्णांक बोलणाराचे मनांत असेल, त्या अपूर्णांकाचे संबंध रहित लहान आणि जवळ या शब्दांचा संबंध आहे. अब एक रेघ असेल, तीस कोणी लहान झणेल आणि दुसरा कोणी ती लहान नाही असें झणेल, परंतु लहान आणि जवळ या शब्दाविषयीं सर्व लोक एक मत होतील, कीं त्यांत अर्थ हाच आहे, कीं जर अब लहान असेल, तर अ हा बघे जवळ आहे. परंतु  $\frac{1}{100}$ ,  $\frac{1}{1000}$ , इत्यादि यांतून कोणता अपूर्णांक लहान आहे! असें विचारिले तर याचें उत्तर प्रसंगानुरूप देतां येईल. यामुळे लहान आणि जवळ हे दोन शब्द त्यांचा व्यवहारिक अर्थाने कामांत घेत नाहीं. परंतु वरची प्रतिज्ञा अशा रूपाने मांडितां येईल, कीं लहान आणि जवळ हें काय आहे, असा प्रश्न करण्याचें प्रयोजन पडणार नाही. जर क्ष हवा तेवढा लहान असेल, तर, इच्छेप्रमाणें ७ यांचे जवळ ७+क्ष होतील; अथवा माझे इच्छेप्रमाणें, क्ष हवा तेवढा लहान केला तर, तुझे इच्छेप्रमाणें ७ यांचे हवे तेवढे जवळ ७+क्ष करीन; अथवा तुझे इच्छेप्रमाणें जो लहान अपूर्णांक असेल तो सांग; परंतु त्यास तूं लहान झणतोस त्याचें कारण विचारीत नाही; तेव्हां, माझा इच्छेप्रमाणें जर मी क्ष हवा तेवढा लहान केला, तर जो तूं अपूर्णांक सांगितलास त्यापेक्षां ७+क्ष आणि ७ याचें अंतर लहान करीन; आणि याप्रमाणें पुढेंहि.

लहान, मोठा आणि जवळ या शब्दांस व्यवहारिक अर्थाने नकारून, बीजगणितांत आपले कामासाठीं इच्छेप्रमाणें लहान, इच्छेप्रमाणें मोठा, हवा तेवढा जवळ, अथवा हवा तेवढा लहान, जितका जितका मोठा, इत्यादि अशे बोलण्याचे संक्षेप स्थानीं त्यांस पुनः घेतों. या अर्थाने नियमित आणि सिद्ध करितां येतील अशा पुष्कळ प्रतिज्ञा आहेत. उदाहरण. जर क्ष लहान असेल, तर  $\frac{1}{क्ष}$  मोठा आहे. ह्मणजे

इच्छेप्रमाणें जर क्ष लहान केला, तर इच्छेप्रमाणें  $\frac{1}{क्ष}$  मोठा होईल.

अशा कल्पना बदलतात, तशी जाची किंमत बदलत जाती, असें कांहीं अ. परिमाण आहे, आणि जशी कल्पना बदलती तशी जाची किंमत बदलत नाही, असें कांहीं प. नियत परिमाण आहे, तर जेव्हां कांहीं प्रसंगी किंवा कल्पनांनीं इच्छेप्रमाणें हवा तेवढा प. जवळ अ. करितां येतो, तेव्हां प.ला अ.ची नियतता ह्मणतात. कांहीं परिमाण इच्छेप्रमाणें मोठें आहे अशी कल्पना केली, तर तें परिमाण अनियत वाढत जातें असें ह्मणतात; आणि कांहीं परिमाण इच्छेप्रमाणें लहान आहे, तर तें परिमाण अनियत घटत जातें असें ह्मणतात. ह्या पुढील सिद्धांताचा खरेपणा स्पष्ट दिसेल.

जर क्ष अनियत घटत जातो, तर अ+क्ष या पद्धतीची नियतता अ आहे; जर क्ष अनियत वाढत जातो, तर  $\frac{1}{क्ष}$  अनियत वाढत जातो; जर क्ष अनियत बचे जवळ येतो, तर अ+क्ष ची नियतता अ+ब आहे.

ही पुढील गोष्ट अवघड करून सांगण्याची रीति वरचा पहिल्या आणि तिसऱ्या कल्पनेंत आहे असें दिसेल, ह्मणजे, जर क्ष=०, तर अ+क्ष=अ; आणि जर क्ष=ब, तर अ+क्ष=अ+ब, हीं दोन्ही समजण्याजोगी आहेत. परंतु, जर क्ष=०, तर  $\frac{1}{क्ष} = \frac{1}{०}$ , यांत कांहीं समजायजोगा अर्थ नाही; सारांश या गोष्टीविषयीं जो एथें अर्थ सांगितला, त्याचें अनुमान पूर्वी ८६ आणि ८७ पृष्ठांवरील प्रतिज्ञांत झालें.

जीं पदांचीं रूपे अन्य कारणांनीं अवघड असतील, त्यांचा अर्थ दाखवावा हा या अध्यायाचा हेतू आहे; असें ०,  $\frac{1}{०}$ ,  $\frac{०}{०}$ , हीं आणि अ° यांचा जर अन्यकारणांनीं अर्थ सांपडला नसता, तर तें पद अशे अवघडरूपांत गणलें जातें. परंतु वरचा रूपांशिवाय दुसरीं आहेत,

$$0^\circ \quad 0^\circ \quad \left(\frac{1}{0}\right)^\circ \quad \text{इत्यादि.}$$

जर या पुढील पद्धतीत  $\text{क्ष} = \text{अ}$  असे असल्याने काय होईल हे लक्षांत न आले, तर कदाचित् वरचा सारखी रूपे आढळतील,

$$(\text{क्ष}-\text{अ})^{\text{क्ष}-\text{अ}}, (\text{क्ष}-\text{अ})^{\frac{1}{\text{क्ष}-\text{अ}}}, \left(\frac{1}{\text{क्ष}-\text{अ}}\right)^{\text{क्ष}-\text{अ}} \text{ इत्यादि.}$$

या सर्व पक्षांत, जेव्हां एकादे रूपापासून कांहीं परिमाणाचा सरळ बोध होत नाही, तेव्हां त्या रूपाची काय किंमत आहे? असे विचारणार नाही, अथवा त्या रूपाला किंमत आहे की नाही हे सिद्ध होते की नाही, याविषयीहि कांहीं विचार करायाचा नाही. परंतु बहुतेक रूप सर्वदा याप्रमाणे विचारिले पाहिजे, जा कल्पनेने असमजुतीचे रूप उत्पन्न होते, ती कल्पना घेतल्यास जा पद्धतीपासून असमजुतीचे रूप होते, ती पद्धति कोणकोणत्या किमतीचे जवळ येईल? उदाहरण

$$\text{जेव्हां} \quad \text{क्ष} = \text{अ} \quad \text{तेव्हां} \quad \frac{\text{क्ष}^2 - \text{अ}^2}{\text{क्ष} - \text{अ}} = 0$$

परंतु जेव्हां  $\text{क्ष}$  हा अचे जवळ जवळ होतो, असे आहे तेव्हां वरचे अपूर्णाकाचे किमतीमध्ये कोणकोणत्या तऱ्हेचा फेर होतो याचा विचार केला, तर असे समजांत येते, की ती किंमत २अचे जवळ जवळ येती, ही गोष्ट पुढे दाखविली आहे. आणि ही पुढील प्रतिज्ञा आपल्या नजरेस येईल; जर इच्छेप्रमाणे हवातेवढा  $\text{क्ष}$  हा अचे जवळ करितां येईल, तर इच्छेप्रमाणे हवातेवढा  $\frac{\text{अ}^2 - \text{क्ष}^2}{\text{अ} - \text{क्ष}}$  हा २अचे हवातेवढा जवळ करि-

तां येईल, अथवा जर  $\text{क्ष}$  हा अचे अनियत जवळ येतो, तर  $\frac{\text{अ}^2 - \text{क्ष}^2}{\text{अ} - \text{क्ष}}$  हा २अ याचे अनियत जवळ होईल.

तर यावरून या पुढीलप्रमाणे ह्मणतां येईल की काय?

जेव्हां  $\text{क्ष} = \text{अ}$ , तर  $\frac{\text{अ}^2 - \text{क्ष}^2}{\text{अ} - \text{क्ष}} = 0 = २अ$  अथवा या पक्षांत  $0 = २अ$ ? सर्व पदांचा सरळ अर्थाने, असे ह्मणणे योग्य आहे की नाही, याचा विचार करणे शिकणारावर सोपितो. मागील प्रतिज्ञांतून एकादे

प्रतिज्ञेचा संक्षेप दाखविण्याशिवाय अशा रूपाचा या ग्रंथांत उपयोग करणार नाही.

$\frac{1}{2}$  याचे जागी  $\infty$  असे चिन्ह करायाची चाल आहे; आणि यास अंतता ह्मणतात. वर सांगितलेल्या गोष्टीवरून ८६ आणि ८७ पृष्ठांचे गोष्टीप्रमाणें  $\text{क्ष} = \infty$  हें या पुढील गोष्टीचें संक्षेपरूप आहे असे मनांत आण;  $\text{क्ष}$  यास अनियत वाढू दे.

पुनः  $\text{क्ष} = 0$  असे असू दे, हें या पुढील गोष्टीचें संक्षेपरूप आहे असे मनांत याणायास योग्य आहे. ह्मणजे  $\text{क्ष}$  यास अनियत घटू दे. या गोष्टीविषयी पुनः विचार होईल. परंतु  $\text{प} - \text{क} = 0$  या रूपाचे समीकरणामध्ये जांत  $\text{प}$  आणि  $\text{क}$  कांहीं सांत परिमाणें आहेत त्या समीकरणांत वरचे सारिखे बदल करण्याचें प्रयोजन पडणार नाही.

१. सिद्धांत. जर  $\text{अ}$  आणि  $\text{ब}$  या दोन पद्धति सर्वदा बरोबर आहेत, त्यांचीं रूपे जोंपर्यंत समजायाजोगीं आहेत, तोंपर्यंत  $\text{अ}$  आणि  $\text{ब}$  यांचा नियतताहि बरोबर आहेत.

उदाहरण मनांत आण कीं  $\text{क्ष}$  अनियत वाढतो, तर  $\text{अ}$ ची नियतता  $\text{प}$  आहे, आणि  $\text{ब}$ ची नियतता  $\text{क}$  आहे; तेव्हां  $\text{प} = \text{क}$  असावा, ही गोष्ट सिद्ध करायासाठीं मनांत आण, कीं

$$\text{अ} = \text{प} + \text{अ},$$

$$\text{आणि } \text{ब} = \text{क} + \text{ब}$$

तेव्हां,  $\text{क्ष}$  अनियत वाढविल्यानें,  $\text{अ}$  आणि  $\text{ब}$  अनियत घटत जातात. कां कीं असें नसलें, आणि जर  $\text{अ}$ ची नियतता ( $\text{अ}$ ) असती तेव्हां  $\text{अ}$  अथवा  $\text{प} + \text{अ}$ ची नियतता  $\text{प} + \text{अ}$  होती. परंतु ती नियतता  $\text{प}$  आहे; यामुळे अला नियतता नाही, परंतु तो अनियत घटत जातो.

परंतु  $\text{अ} = \text{ब}$  यामुळे  $\text{प} + \text{अ} = \text{क} + \text{ब}$ . जर  $\text{प} = \text{क}$  नसेल तर तो अधिक मोठा किंवा अधिक लहान असावा. जर होऊं शकेल तर  $\text{क}$  पेक्षा  $\text{प}$  अधिक मोठा आहे असें मनांत आण, आणि  $\text{प} = \text{क} + \text{र}$  असे घे, आतां  $\text{प}$  आणि  $\text{क}$  या परिमाणामध्ये  $\text{क्ष}$  नाही, आणि त्यासारिखा  $\text{र}$  यामध्ये नाही, आणि जेव्हां  $\text{क्ष}$  बदलतो तेव्हां  $\text{प}$ ,  $\text{क}$ , आणि  $\text{र}$  हे बदलत नाहींत. तेव्हां याप्रमाणें होतें,

$$\text{क} + \text{र} + \text{अ} = \text{क} + \text{ब} \text{ अथवा } \text{र} = \text{ब} - \text{अ}$$



यांत हा पुढील खोटेपणा आहे;  $r$  हें नियतपरिमाण सर्वदा  $v-a$  याचे बरोबर आहे, ह्मणजे  $k$  वाढविल्याने  $v-a$  इच्छेप्रमाणें लहान करितां येतो, कां की जसा जसा  $k$  अनियत वाढतो तसे  $v$  आणि  $a$  हे अनियत घटतात. यामुळे  $p+k+r$  हें अयुक्तिक आहे. वरचे रितीप्रमाणें  $p=k-r$  हेंहि अयुक्तिक आहे. असें सिद्ध करितां येईल. यामुळे  $p=k$ .

२. सिद्धांत. जेव्हां  $k$  अनियत घटतो तेव्हां  $k=0$  असें केल्यानें जरी पहिल्यानें, सगळीं उत्तरे समजायाजोगे रूपाचीं असतील, आणि दुसऱ्यानें कृतीची संख्या अनियत नसेल, तर त्या पद्धतीची नियतता काढितां येईल.

उदाहरण, जेव्हां  $k$  अनियत घटतो, तेव्हां  $1+2k+3k^2$  याची नियतता  $1+0+0$  अथवा  $1$  आहे हें स्पष्ट दिसतें. आणि, कदाचित्, शिकणाराचे मनांत स्पष्ट येईल, कीं

$1+k+k^2+k^3+k^4$  इत्यादि अनंत पावेतों

याची नियतता  $1+0+0+0+0$  इत्यादि अनंतपर्यंत आहे

अथवा, जेव्हां  $k$  अनियत घटतो, तेव्हां ती नियतता  $1$  आहे. परंतु एथें खाणें पहावें, कीं जेव्हां  $k$  लहान घेतला, आणि जरी  $k, k^2, k^3, k^4$ , इत्यादि यांतून प्रत्येक पद लहान असेल, तथापि त्यांची संख्या अनंत आहे. आणि कांहीं पदे एकत्र मिळवून, त्या पदांतून प्रत्येक पद इच्छेप्रमाणें हवें तेवढें लहान केलें असतां, इच्छेप्रमाणें त्यांची बेरीज हवी तेवढी लहान होईल, हें जरी ठाऊक आहे, तथापि पदांचे अनंत संख्यां-विषयी ही गोष्ट खरी आहे असें अद्यापि माहीत नाही.

३. सिद्धांत. जेव्हां  $k$  अनियत वाढतो. तेव्हां

$a+vk, a+vk+vk^2$ , इत्यादि पद्धती अनियत वाढतात; आणि  $a+\frac{v}{k}, a+\frac{v}{k}+\frac{v}{k^2}$ , इत्यादि पद्धतींची नियतता  $a$  आहे, हें स्पष्ट आहे. परंतु सामान्यतः पद्धतींचा शोधाविषयीं सोपी रीति हीच आहे, कीं जेव्हां  $k$  अनियत वाढतो, तेव्हां  $\frac{1}{k}$  अनियत घटतो.



तर  $वि = \frac{1}{क्ष}$  असे घे, ह्मणून  $क्ष = \frac{1}{वि}$ ; ही क्षची किंमत क्षचे जागीं मांड, आणि, जेव्हां वि अनियत घटती, ह्मणजे, जेव्हां क्ष अनियत वाढतो. तर जा रूपापासून या पद्धतीची नियतता स्पष्ट होईल असें रूप देतां येईल तर दे.

उदाहरण, अशे पक्षांत  $\frac{क्ष+1}{3क्ष-2}$  याची नियतता काय आहे ?

$$क्ष = \frac{1}{वि} \text{ असे घे, तर } \frac{\frac{1}{वि} + 1}{\frac{3}{वि} - 2} = \frac{(\frac{1}{वि} + 1)वि}{(3 - 2)वि} = \frac{1 + वि}{3 - 2वि}$$

जेव्हां वि अनियत घटती, तेव्हां वरचे पद्धतीची नियतता  $\frac{1}{3}$  आहे. आतां हे पुढील पक्ष शिकणारानें सिद्ध करून दाखवावे, ते एथें संक्षेपरूपानें मांडिले आहेत.

$$\text{जर } क्ष = \infty \text{ तर } \frac{अक्ष^2 + बक्ष + क}{पक्ष + क} = \infty, \frac{अक्ष^2 + बक्ष + क}{पक्ष^2 + कक्ष + र} = \frac{अ}{क},$$

$$\frac{अक्ष^2 + बक्ष + क}{पक्ष^3 + कक्ष + र} = 0$$

४ सिद्धांत. जर १ पेक्षां अ अधिक असेल, तर अ, अ<sup>२</sup>, अ<sup>३</sup>, अ<sup>४</sup>, इत्यादि, या श्रेणीचीं पदे अनियत वाढतील; अथवा संक्षेपरूपानें मांडिलीं असतां, अ<sup>०</sup> = ∞

$$\text{कां कीं } अ^० = अ + अ^१ - अ = अ + अ(अ - १)$$

अथवा अ यास अ (अ-१) हें मिळविलें असतां अ हा अ<sup>१</sup> होतो. त्या सारखें अ<sup>१</sup> यास अ<sup>२</sup>(अ-१) हें मिळविलें असतां अ<sup>२</sup> हा अ<sup>२</sup> होतो.

.....

साधारणरूपानें अ<sup>n</sup> यास अ<sup>n</sup>(अ-१) हें मिळविलें असतां अ<sup>n</sup> हा अ<sup>n+१</sup> होतो.

परंतु १ पेक्षां अ अधिक आहे, तर अ-१ धन आहे. यामुळे अ (अ-१) हा गणित रूपाचा वाढवा आहे. आणि अ पेक्षां अ<sup>२</sup> अधिक आहे; यामुळे अ (अ-१) या पेक्षां अ<sup>२</sup>(अ-१) अधिक आहे, अथवा अचे पहिल्या आणि दुसऱ्या घाताचा अंतराहून दुसऱ्या आणि तिसऱ्या घाताचे अंतर अधिक आहे. तसेच दुसऱ्या आणि तिसऱ्या घाताचा अंतराहून तिसऱ्या आणि चवथ्या घाताचे अंतर अधिक आहे; आणि याप्रमाणे पुढेहि. परंतु जर अला हवे तितके वेळा एकच परिमाण वारंवार मिळविले असतां, इच्छेप्रमाणे उत्तर हवे तेवढे मोठे करितां येईल; आणि प्रति-वेळीं पूर्वीपेक्षां मोठे असे परिमाण तितक्याच वेळा अशीं मिळविले असतां, उत्तर वरपेक्षां अधिक मोठे येईल. यामुळे हा सांगीतला सिद्धांत खरा आहे.

५. सिद्धांत. जर १ पेक्षां ब कमी असेल, तर ब, ब<sup>२</sup>, ब<sup>३</sup>, ब<sup>४</sup>, इत्यादि या श्रेणीचीं पदे अनियत घटतील, अथवा संक्षेप रूपाने मांडिलीं असतां  $b^{\infty} = 0$

$b = \frac{1}{a}$  असे घे, तर  $b^n = \frac{1}{a^n}$ . परंतु १ पेक्षां ब कमी आहे, यामुळे १ पेक्षां अ अथवा  $\frac{1}{b}$  अधिक आहे; यामुळे, ४ सिद्धांताप्रमाणे, हवा तेवढा अ<sup>n</sup> मोठा करितां येईल. यावरून.  $\frac{1}{a^n}$  अथवा  $b^n$  हवा तेवढा लहान करितां येईल.

$\frac{1}{100}$  याचे सर्व घातांतून जो पहिला घात  $\frac{1}{10000000}$  या पेक्षां कमी आहे तो सांग.

उत्तर, षड्घात.

६. सिद्धांत. जर क्ष धन असून तो १ पेक्षां कमी असेल, तर या पुढील पदांची श्रेणी वाढेल, परंतु ती श्रेणी अनियत वाढत नाही, ह्मणजे

$$(1 + \text{क्ष})$$

$$(1 + \text{क्ष} + \text{क्ष}^2)$$

$$(1 + \text{क्ष} + \text{क्ष}^2 + \text{क्ष}^3)$$

इत्यादि या श्रेणीची नियतता  $\frac{1}{1-\text{क्ष}}$  आहे; ह्मणजे वरचे पदांतून कोणतेहि पद कितीहि घाताचे असले, तरी  $\frac{1}{1-\text{क्ष}}$  याचे इतके मोठे होऊ शकत नाही,

परंतु इच्छेप्रमाणें हवें तेवढें त्याचे जवळ येतें. हा सिद्धांत संक्षेपरितीनें या पुढीलप्रमाणें मांडितात;

$$\frac{1}{1-\text{क्ष}} = 1 + \text{क्ष} + \text{क्ष}^2 + \text{क्ष}^3 + \dots + \text{क्ष}^\infty$$

हें साधारणरितीनें याप्रमाणें मांडितात,

$$\frac{1}{1-\text{क्ष}} = 1 + \text{क्ष} + \text{क्ष}^2 + \text{क्ष}^3 \text{ इत्यादि अनंत पावेतों.}$$

पुढें जें सर्व सांगायाचें आहे त्याचा मुख्य पाया ही वरची श्रेणी आहे, या श्रेणीचे उत्पत्तीचे रितीपासून ती प्रतिज्ञा स्थापितों. जेव्हां क्ष धन आहे, तेव्हां  $1, 1+\text{क्ष}, 1+\text{क्ष}+\text{क्ष}^2$ , इत्यादि, हीं पदे वाढत जातात हें स्पष्ट आहे असें वर सांगितलें; आणि असें दिसतें, कीं प्रत्येक पद त्याचे पूर्वाचे पदास क्षने गुणून, त्यांत १ मिळविल्यानें उत्पन्न होतें. जसें  $1+\text{क्ष}+\text{क्ष}^2$ , हें पद  $1+\text{क्ष}(1+\text{क्ष})$  याचे बरोबर आहे, आणि  $1+\text{क्ष}+\text{क्ष}^2+\text{क्ष}^3$  हें पद  $1+\text{क्ष}(1+\text{क्ष}+\text{क्ष}^2)$  याचे बरोबर आहे, आणि याप्रमाणें पुढेंहि. जर कोणतेंहि पद दाखविण्यासाठीं अ आणि त्याचे पुढचें पद दाखविण्यासाठीं ब घेतला; तर

$$b = 1 + a \text{ क्ष}$$

आतां अ पेक्षां ब मोठा आहे, आणि क्ष हा १ पेक्षां कमी आहे, यामुळे, अ हा क्षनें गुणिला असतां जी न्यूनता पावतो त्या न्यूनतेपेक्षां १ मिळविल्यानें अधिक वाढतो. परंतु  $a \text{ क्ष} = a + a \text{ क्ष} - a = a - (1 - \text{क्ष})$  अ; अथवा अ हा क्षनें गुणिला असतां  $(1 - \text{क्ष})$  अ इतक्यानें कमी होतो. परंतु त्या न्यूनतेपेक्षां त्यांत १ मिळविल्यानें अधिक वाढतो; ह्मणजे  $(1 - \text{क्ष})$  अ या पेक्षां १ अधिक मोठा आहे. या दोहोंस  $1 - \text{क्ष}$  याणीं भाग; तर दिसण्यांत येईल कीं अ पेक्षां  $\frac{1}{1-\text{क्ष}}$  अधिक मोठा आहे. परंतु  $1, 1+\text{क्ष}, 1+\text{क्ष}+\text{क्ष}^2$ , इत्यादि श्रेणीचें कोणतेंहि पद अ आहे; या मुळे श्रेणीचीं पदे, कितीहि घेतलीं तरी त्यांतून प्रत्येक पद  $\frac{1}{1-\text{क्ष}}$  पेक्षां कमी आहे.

जरी  $\frac{1}{1-\text{क्ष}}$  याचे बरोबर, अ असत नाहीं, तथापि त्याचे हवा तेवढा

बरोबरीचे जवळ होईल, हें सिद्ध करायाचें राहिलें. स्मरणांत ठेवावें, कीं प्रत्येक पुढील पद याप्रमाणें उत्पन्न होतें, ह्मणजे त्याचें पूर्वीचें पद क्ष याणें गुण आणि त्यांत १ मिळीव. अ आणि  $\frac{1}{1-\text{क्ष}}$  यांचें अंतर दाखवायासाठीं प घे; असा कीं

$$अ = \frac{1}{1-\text{क्ष}} - प \text{ आहे, तेव्हां पुढील पद हें आहे}$$

$१ + अ \text{ क्ष} = १ + \frac{\text{क्ष}}{1-\text{क्ष}} - पक्ष = \frac{1-\text{क्ष}+\text{क्ष}}{1-\text{क्ष}} - पक्ष = \frac{1}{1-\text{क्ष}} - पक्ष$ ; याचे पुढचें पद  $१ + \frac{\text{क्ष}}{1-\text{क्ष}} - पक्ष^२$  अथवा  $\frac{1}{1-\text{क्ष}} - पक्ष^२$ ; याचें पुढचें पद  $\frac{1}{1-\text{क्ष}} - पक्ष^३$ ; आणि याप्रमाणें पुढेंहि.

यावरून असें एक पद काढितां येईल, कीं तें  $\frac{1}{1-\text{क्ष}}$  याहून पक्ष<sup>१</sup> इतक्या अंतरानें भिन्न होईल, जांत न हवा तेवढा मोठा होईल. परंतु प दिलेलें परिमाण आहे, आणि ५ सिद्धांता प्रमाणें जस जसा न अनियत वाढत जातो, तसतसा क्ष<sup>१</sup> अनियत घटत जातो; यामुळें पक्ष<sup>१</sup> हवा तेवढा लहान करितां येईल, अथवा  $\frac{1}{1-\text{क्ष}} - पक्ष^१$  ही पद्धति  $\frac{1}{1-\text{क्ष}}$  याचे हवी तेवढी जवळ जवळ करितां येईल. परंतु अ पासून मागलीं सर्व पदे घेतलीं, तरी  $\frac{1}{1-\text{क्ष}} - पक्ष^१$  हेंच येईल. यामुळें पदे हवीं तितकीं घेतल्यानें,  $\frac{1}{1-\text{क्ष}}$  याचे हवें तेवढें जवळ जातां येईल.

$१ - \text{क्ष} + \text{क्ष}^२ - \text{क्ष}^३ + \text{क्ष}^४$  इत्यादि अनंतपावेतों,

या श्रेणीमध्ये १ पेक्षां क्ष कमी असल्या, तर या श्रेणीस नियतता आहे कीं काय, अथवा  $१, १ - \text{क्ष}, १ - \text{क्ष} + \text{क्ष}^२$ , इत्यादि यांची वाढ आणि घट कशा तऱ्हेची होले हें शोधितों. या श्रेणींत एक एक पदाचे अंतरानें पदे अधिक आणि उणी होत जातात असें दिसतें; तथापि त्यांचा हा क्रम सरळ रितीनें चालतो. पुढचें पद काढणें तर, त्याचे पूर्वीचें पद क्षनें गुणून तो गुणाकार १ तून वजा कर. जसें,

$$१-क्ष+क्ष^२=१-क्ष(१-क्ष)$$

$१-क्ष+क्ष^२-क्ष^३=१-क्ष(१-क्ष+क्ष^२)$  आणि याप्रमाणे पुढेहि.

अथवा जर, अ आणि ब हीं पदे एका पुढे एक असतील, तर

$$ब = १ - अ \text{ क्ष अथवा } १ + अ - अ(१ + क्ष)$$

ह्मणजे,  $ब = अ + १ - अ(१ + क्ष)$

तेव्हां त्याचे पुढचे पद  $क = ब + १ - ब(१ + क्ष)$  इत्यादि.

परंतु वरचीं तीन पदे एक एक पदाचे अंतराने अधिक आणि उणीं होत जातात; ह्मणजे, अ पेक्षां ब मोठा आहे अशी कल्पना कर, तर ब पेक्षां क लहान आहे. अथवा अ  $(१ + क्ष)$  या पेक्षां १ मोठा आहे अशी कल्पना कर, तर ब  $(१ + क्ष)$  पेक्षां १ कमी आहे; अथवा अ पेक्षां  $\frac{१}{१ + क्ष}$  मोठा आहे, आणि ब पेक्षां  $\frac{१}{१ + क्ष}$  कमी आहे. अशा तऱ्हेने श्रेणीचीं पदे उत्तरोत्तर  $\frac{१}{१ + क्ष}$  याहून उणीं आणि अधिक होत जातात.

तर या प्रमाणे होतें, १ हा  $\frac{१}{१ + क्ष}$  पेक्षां मोठा आहे

$$१ - क्ष ही पद्धति  $\frac{१}{१ + क्ष}$  पेक्षां कमी आहे$$

$$१ - क्ष + क्ष^२ ही  $\frac{१}{१ + क्ष}$  पेक्षां मोठी आहे$$

इत्यादि.

आतां जसजसा न वाढवावा, तसतसा क्ष<sup>n</sup> अनियत घटतो, तर न एवढा मोठा घेतां येईल, कीं एकापुढील एक अशीं दोन पदे, ह्मणजे

$$१ - क्ष + क्ष^२ - \text{इत्यादि} \dots \pm क्ष^{n-१}$$

$$\text{आणि } १ - क्ष + क्ष^२ - \text{इत्यादि} \dots \pm क्ष^{n-१} \pm क्ष^n$$

इच्छेप्रमाणे हवे तेवढे लहान परिमाणाने हीं सांख्यिकीं दोन पदे भिन्न होतील, कां कीं त्यांचे अंतर  $\pm क्ष^n$  इतकें आहे. परंतु आतां वर सिद्ध केले, कीं या दोन पदांतून एक पद  $\frac{१}{१ + क्ष}$  या पेक्षां मोठे आहे आणि

दुसरें  $\frac{1}{1+\kappa}$  या पेक्षा कमी आहे. आणि त्या दोन पदांमध्ये जें कांहीं परिमाण असतें, त्या परिमाणांशीं प्रत्येक पदाचें अंतर त्या दोन पदांचे अंतराहून कमी आहे; यामुळे जर न हवा तितका मोठा घेतला, तर त्या दोहोंतून हवें तें पद  $\frac{1}{1+\kappa}$  याचे हवें तेवढें जवळ करितां येईल.

तर अशांनै जा दोन श्रेण्या उत्पन्न होतात, त्या याप्रमाणें आहेत ;

$$\frac{1}{1-\kappa} = 1 + \kappa + \kappa^2 + \kappa^3 + \text{इत्यादि अनंत पावेतों.}$$

$$\frac{1}{1+\kappa} = 1 - \kappa + \kappa^2 - \kappa^3 + \text{इत्यादि अनंत पावेतों.}$$

आणि  $\frac{1}{1-\kappa}$  यास वरचा पहिल्या अनंत श्रेणीचें सर्वधन ह्मणतात, ह्मणजे त्याचा अर्थ हाच, कीं १,  $\kappa$ ,  $\kappa^2$ ,  $\kappa^3$ , इत्यादि पदांची मेळवणी पाहिजे तेथपर्यंत करित गेलें असतां  $\frac{1}{1-\kappa}$  ही नियतता आहे.

हा विषय पुढें आठव्या अध्यायामध्ये सांगितला आहे.

७. सिद्धांत. जर अपूर्णाकाचे अंश आणि छेद अनियत घटत जातील, तर त्या अपूर्णाकाची नियतता शून्य असेल, किंवा सांत, किंवा अनंत असेल ; ह्मणजे, तो अपूर्णाक अनियत घटत असेल, किंवा त्याला सांत नियतता असेल, किंवा अनियत वाढत असेल. अंश आणि छेद हे दोन्ही अनियत घटत गेले, तरीं वरचा तीन कल्पनांतून कोणतीहि विरुद्ध नाही.

हे पुढील तीन अपूर्णाक घे

$$\frac{\kappa^2 - \alpha^2}{(\kappa - \alpha)^2} \quad \frac{\kappa^2 - \alpha^2}{\kappa - \alpha} \quad \frac{(\kappa - \alpha)^2}{\kappa^2 - \alpha^2}$$

$\kappa = \alpha$  आहे, अशा कल्पनेनें वरचे तीन अपूर्णाकांचें रूप ० आहे. अ हवा तेवढा  $\kappa$ चे जवळ येतो, या कल्पनेनें अंश आणि छेद अनियत घटतील असें करितां येईल. याचें कारण हेंच आहे, कीं  $\kappa - \alpha$  ही पद्धति प्रत्येक अंश आणि छेदांचे गुण्य किंवा गुणक आहे, आणि जस-जसा  $\alpha$ चे जवळ  $\kappa$  येत जातो, तसतशी  $\kappa - \alpha$  ही पद्धति अनियत घटत जाती, कां कीं वरचे तीन अपूर्णाक या पुढीलप्रमाणें आहेत,

$$\frac{(\text{क्ष}-\text{अ})(\text{क्ष}+\text{अ})}{(\text{क्ष}-\text{अ})(\text{क्ष}-\text{अ})}$$

$$\frac{(\text{क्ष}-\text{अ})(\text{क्ष}+\text{अ})}{\text{क्ष}-\text{अ}}$$

$$\frac{(\text{क्ष}-\text{अ})(\text{क्ष}-\text{अ})}{(\text{क्ष}-\text{अ})(\text{क्ष}+\text{अ})}$$

प्रत्येक अपूर्णाकाचे अंश आणि छेद क्ष-अ याणीं भाग, तर ते या-  
प्रमाणें होतील,

$$\frac{\text{क्ष}+\text{अ}}{\text{क्ष}-\text{अ}}$$

$$\text{क्ष}+\text{अ}$$

$$\frac{\text{क्ष}-\text{अ}}{\text{क्ष}+\text{अ}}$$

क्ष=अ असेल, या खेरीज हे प्रत्येक पूर्वीचे अपूर्णाकांबरोबर आहेत; या-  
विषयीं २७२ पृष्ठाप्रमाणें सद्यः कांहीं गोष्ट सांगत नाहीं. परंतु जेव्हां  
अचे जवळ क्ष येत जातो, तेव्हां पहिल्या अपूर्णाकाचे रूप याप्रमाणें  
होईल.

कोणतेंहि परिमाण जाची नियतता २ अ आहे

कोणतेंहि परिमाण जें अनियत घटत जातें,

आणि यामुळें तो अपूर्णाक अनियत वाढत जातो. दुसऱ्या अपूर्णाकाचे  
रूप याप्रमाणें आहे,

कोणतेंहि परिमाण जाची नियतता २ अ आहे,

आणि यामुळें तो दुसरा अपूर्णाक २ अचे जवळ अनियत येत जातो.  
तिसरा अपूर्णाक याप्रमाणें आहे.

कोणतेंहि परिमाण जें अनियत घटत जातें

कोणतेंहि परिमाण जाची नियतता २ अ आहे,

आणि यामुळें तो तिसरा अपूर्णाक अनियत घटत जातो. यामुळें जेव्हां  
कोणत्याहि अपूर्णाकाचे अंश आणि छेद अनियत घटत जातात अशापक्षीं  
पाहिलें, तर, त्या अपूर्णाकाची किंमत कोणीकडे कोठपर्यंत जाईल, या-  
विषयीं अनुमान करवत नाहीं, परंतु तो अपूर्णाक अनियत घटत किंवा  
वाढत जातो, किंवा तो सांत नियततेकडे जातो, किंवा जात नाहीं,  
हें पहाण्यासाठीं तो अपूर्णाक तपासला पाहिजे.

८. सिद्धांत. जा अपूर्णाकाचे अंश आणि छेद अनियत वाढत जातात; अथवा जो  $\frac{\infty}{\infty}$  यारूपाजवळ येऊ जातो, त्यास वर सांगितल्याप्रमाणे तपासला पाहिजे.  $\frac{अ}{ब}$  असा एक अपूर्णाक असो, जाचे अंश आणि छेद अनियत वाढत जातात. यावरून ही पुढील गोष्ट ठाऊक आहे, कीं

$$\frac{अ}{ब} = \frac{\frac{१}{ब}}{\frac{१}{अ}}$$

आणि जर अ आणि ब अनियत वाढत जातात, तर  $\frac{१}{अ}$  आणि  $\frac{१}{ब}$  अनियत घटत जातात हेहि ठाऊक आहे. यामुळे जा गोष्टीने  $\frac{\infty}{\infty}$  या रूपाजवळ  $\frac{अ}{ब}$  येत जातो, तशानेच, परंतु दुसऱ्या रूपांने, तोच अपूर्णाक  $\frac{०}{०}$  या रूपाजवळ येतो. यावरून पूर्वीचा सिद्धांत एथेही लागू होतो.

९ सिद्धांत. कांहीं गुणाकार असेल, जाचें एक पद अनियत घटत जातें आणि दुसरें पद अनियत वाढत जातें, तर त्या गुणाकाराचे किमतीविषयी वर सांगितल्याप्रमाणे तपासून पाहिलें पाहिजे.  $० \times \infty$  या रूपाजवळ येत जातो, असा अब एक गुणाकार असो; ह्मणजे, जांत अ अनियत घटत जातो, आणि ब अनियत वाढत जातो.

$$अब = \frac{अ}{\frac{१}{ब}}$$

हें आणि जर ब अनियत वाढत जातो, तर  $\frac{१}{ब}$  अनियत घटत जातो हेहि ठाऊक आहे. यावरून, वरचे पक्षाप्रमाणे, अब, निराळ्या रूपांने,  $\frac{०}{०}$  या रूपाजवळ येत जातो.

यावरून दिसतें, कीं हीं पुढील तीन रूपें, ह्मणजे



$$\frac{0}{0}$$

$$\frac{\infty}{\infty}$$

$$0 \times \infty$$

हीं परस्पर असा संबंध ठेवितात, कीं जा पद्धतीपासून त्यांतील एक रूप निघते. त्याच पद्धतीपासून बाकीचीं दुसरीं रूपें निघतील.

आतां अं हें रूप घेतों, यास १७२ पृष्ठावर केवळ निश्चितार्थ दाखविला आहे त्याप्रमाणें एथें घेत नाहीं, परंतु या पुढिलाचा दर्शक दाखविण्याविषयीं घेतों ह्मणजे,

जेव्हां क्ष अनियत घटत जातो तेव्हां अ<sup>क्ष</sup> याचे नियततेचा दर्शक तें रूप घेतों.

जर क्ष =  $\frac{1}{y}$ , तर जेव्हां क्ष अनियत घटत जातो, तेव्हां y अनियत वाढत जातो. y पूर्णांक असो, तर

$$अ^क्ष = अ^{\frac{1}{y}} = \sqrt[y]{अ}$$

पहिल्यानें, १ पेक्षां कमी अंकांचे सगळे घात १ पेक्षां कमी आहेत, यावरून जर १ पेक्षां अ मोठा असेल, तर त्याचीं सगळीं मुळें १ पेक्षां मोठीं आहेत. या पुढीलप्रमाणें घे,

$$\sqrt[y]{अ} = १ + वि \text{ अथवा } अ = (१ + वि)^y$$

आतां y इतका मोठा घेतां येईल, कीं कसाहि लहान अपूर्णांक मनांत आणिला तरी त्यापेक्षां वि लहान होईल. जर असें नाहीं, तर कपेक्षां वि लहान होण्याकरितां y एवढा मोठा होण्यास अशक्य आहे, असें ह्मण. तर y ची कशीहि किंमत असली, तरी कपेक्षां वि सर्वदां मोठी आहे, यामुळें १ + क यापेक्षां १ + वि सर्वदां मोठी आहे. परंतु ४ सिद्धांताप्रमाणें, y एवढा मोठा घेतां येईल, कीं (१ + क)<sup>y</sup> ही पद्धत कसेहि मोठें परिमाण मनांत घेतल्यापेक्षां मोठी होईल, आणि यामुळें ती अपेक्षां मोठी होईल. वर समजलें, कीं कपेक्षां वि मोठी आहे, तर अपेक्षां (१ + वि)<sup>y</sup> मोठी आहे. परंतु (१ + वि)<sup>y</sup> अचे बरोबर आहे;

तर ही एथें विरुद्ध गोष्ट आहे. यामुळे, कोणत्याहि सांगीतलेल्या अपूर्णाकापेक्षां वि लहान करितां येत नाही, अशी कल्पना खरी नाही; ह्मणजे कोणत्याहि सांगीतल्या अपूर्णाकापेक्षां वि लहान करितां येईल, अथवा  $१ + \text{वि हवी तेवढी } १ \text{ याजवळ करितां येईल. परंतु } १ + \text{वि} = \sqrt[५]{अ}$ , यामुळे, जर य अनियत वाढत जातो, तर असें दिसतें, कीं

$\sqrt[५]{अ}$  अथवा  $अ^{\frac{१}{५}}$  अथवा  $अ^{\frac{१}{५}}$  याची नियतता १ आहे.

अथवा  $अ^{\frac{१}{५}} = १$ , एथे ० हें २७१ वे पृष्ठावरचे अर्थाचें आहे.

दुसऱ्यानें, १ पेक्षां अ लहान असो, यावरून १ पेक्षां  $\frac{१}{५}$  मोठा आहे. वरचे उदाहरणावरून  $\sqrt[५]{अ}$  हें १ याजवळ हवें तेवढें करितां येईल; परंतु तें पद  $१ \div \sqrt[५]{अ}$  या रूपाचें आहे, यामुळे  $\sqrt[५]{अ}$  हें १ याजवळ हवें तेवढें करितां येईल.

१० सिद्धांत. क्षविषयींचा कोणत्याहि अकरणी पूर्णरूप\* पद्धती-मध्यें, जर क्ष अनियत वाढत जाईल, तर जा पदांमध्ये क्षचा अति मोठा घात आहे, त्या पदांत सर्व दुसऱ्या पदांची बेरीज अनियत वेळा जाईल. ह्मणजे,

$$अक्ष^३ + वक्ष^३ + कक्ष + इ$$

या पद्धतीमध्ये जर अ कसेंहि लहान दिलेलें परिमाण असेल, आणि व, क, आणि इ, हीं कशींहि मोठीं दिलेलीं परिमाणें असतील, तथापि क्ष एवढा मोठा घेतां येईल, कीं अक्ष<sup>३</sup> यामध्यें वक्ष<sup>३</sup> + कक्ष + इ ही सर्व पद्धति हव्या तितक्या वेळा जाईल.

अक्ष<sup>३</sup> यामध्यें वक्ष<sup>३</sup> + कक्ष + इ ही जितक्या वेळा किंवा वेळेचे भाग वेळा जाती, तें या पुढील अपूर्णाकरूपानें दाखवितां येतें,

$$\frac{अक्ष^३}{वक्ष^३ + कक्ष + इ} \text{ अथवा } \frac{अक्ष^३ \div क्ष^३}{(वक्ष^३ + कक्ष + इ) \div क्ष^३} \text{ अथवा } \frac{अक्ष}{व + \frac{क}{क्ष} + \frac{इ}{क्ष^३}}$$

\* या शब्दाचे अर्थाविषयी पुढील अध्यायाचा आरंभ पहा, या शब्दास इंग्रजी भाषेत इन्टिग्राल ह्मणतात.

$\frac{क}{क्ष} + \frac{इ}{क्ष^२} = प$  चे. तेव्हां, क्ष अनियत वाढविल्याने प अनियत घटत जातो, आणि क्ष हवातेवढा मोठा घेतला, तर १ पेक्षां प लहान होईल. ह्मणजे, अक्ष<sup>३</sup> यामध्ये वक्ष<sup>३</sup> + कक्ष + इ ही  $\frac{अक्ष}{ब+प}$  इतक्या वेळा किंवा  $\frac{अ}{ब+१}$  यापेक्षां अधिक वेळा जाती. परंतु जेव्हां क्ष अनियत वाढत जातो, तेव्हां  $\frac{अक्ष}{ब+१}$  अथवा  $\frac{अ}{ब+१} \times क्ष$  हा गुणाकार अनियत वाढत जातो. तर, अक्ष<sup>३</sup> यामध्ये वक्ष<sup>३</sup> + कक्ष + इ ह्या पद्धतीचा जाण्याचा वेळा वरचा सारिल्याच अनियत वाढत जातात.

उदाहरण. क्ष<sup>३</sup> याचा दशलक्षांशामध्ये, १०००क्ष<sup>३</sup> + ५००क्ष + १००० ही एक लक्षवेळापेक्षां अधिक वेळा जावी असा संकेत असेल, तर क्ष केवढा मोठा आसवा!

$$\frac{\text{क्ष}^३ \text{ याचा दशलक्षांश}}{१०००क्ष^३ + ५००क्ष + १०००} = \frac{\text{क्षचा दशलक्षांश}}{१००० + \frac{५००}{क्ष} + \frac{१०००}{क्ष^२}}$$

आतां, जर क्ष हा १००० याचे बरोबर किंवा यापेक्षां अधिक असेल, तर  $\frac{५००}{क्ष} + \frac{१०००}{क्ष^२}$  ही बेरीज १ पेक्षां लहान आहे. यामुळे, या पक्षांत वरचा अपूर्णांक क्ष ÷ १००१ याचा दशलक्षांशापेक्षां अधिक आहे, अथवा यापुढील पेक्षां

$$\frac{\text{क्ष}}{१००१००००००}$$

जर क्ष = १००१०००००० × १००००० अथवा १००१००००००००००० असा घेतला, तर वरचा अपूर्णांक १०००००० याचे बरोबर होईल. यावरून, (१०००क्ष<sup>३</sup> + ५००क्ष + १०००) यांचा १००००० वेळा पेक्षां क्ष<sup>३</sup> याचा दशलक्षांश मोठा आहे. ही क्षची अतिलहान किंमत आहे, जिणे करून कृत्याचे संकेत स्थापितां येतील, हें निश्चित सांगत नार्हीं, परंतु असें ह्मणवेल, कीं ही किंवा यापेक्षां कांहीं मोठी किंमत कृत्याचे संकेत स्थापील.

११ सिद्धांत. क्षविषयीचा कोणत्याहि अकरणी पूर्णरूप पद्धतीमध्ये, जर क्ष अनियत घटत जाईल, तर जापदामध्ये क्षचा अति लहान घात

आहे, त्या पदांत पद्धतीचीं सर्व दुसरीं पदे हव्या तितक्या वेळा जातील. उदाहरण,  $\frac{1}{10000}$  क्ष + १००० क्ष<sup>२</sup> + १०० क्ष<sup>३</sup> यांत क्ष इतका लहान घेतां येईल, कीं  $\frac{1}{10000}$  क्ष यांत १००० क्ष<sup>२</sup> + १०० क्ष<sup>३</sup> ही पद्धति इच्छेप्रमाणें हव्या तेवढ्या वेळा जाईल; अथवा अक्ष<sup>३</sup> + वक्ष<sup>३</sup> + कक्ष + इ, यांत क्ष एवढा लहान घेतां येईल, कीं इ अथवा इक्ष<sup>३</sup>, हें पद जामध्ये क्षचा अति लहान घात\* आहे, यांत अक्ष<sup>३</sup> + वक्ष<sup>३</sup> + कक्ष ही हव्या तेवढ्या वेळा जाईल. या विशेष पक्षांत ही गोष्ट स्पष्ट आहे, कां कीं क्ष कसाहि अनियत घटत जातो, आणि अक्ष<sup>३</sup> + वक्ष<sup>३</sup> + कक्ष ही पद्धती अनियत घटत जाती, तेव्हां इ, तशीच रहाती. यामुळे इचा कसाहि अपूर्णाक दिला असेल, तरी अक्ष<sup>३</sup> + वक्ष<sup>३</sup> + कक्ष त्यापेक्षां कमी होऊं शकेल. आतां क्ष<sup>३</sup> यापेक्षां क्षचा लहान घात नसेल अशी पद्धति घे; जसें, अक्ष<sup>३</sup> + वक्ष<sup>३</sup> + कक्ष. यांत क्ष एवढा लहान घेतां येईल, कीं कक्ष यांत अक्ष<sup>३</sup> + वक्ष<sup>३</sup> ही इच्छेप्रमाणें हव्या तितक्या वेळा जाईल. कां कीं कक्ष यांत अक्ष<sup>३</sup> + वक्ष<sup>३</sup> ही इच्छेप्रमाणें हव्या तितक्या वेळा किंवा वेळेचे भाग वेळा जाईल तें या पुढीलप्रमाणें दाखवितात,

$$\frac{\text{कक्ष}}{\text{अक्ष}^3 + \text{वक्ष}^3} \text{ अथवा } \frac{\text{क}}{\text{अक्ष}^3 + \text{वक्ष}^3} = \frac{\text{कोणतेंहि नियत परिमाण}}{\text{परिमाण जें अनियत घटत जातें}}$$

जेव्हां क्ष अनियत कमी करावा, तेव्हां ही पद्धति अनियत वाढत जाती.

यावरून हें निघतें, कीं जेव्हां क्ष अनियत वाढत जातो, तेव्हां क्ष<sup>२</sup>, क्ष<sup>३</sup>, क्ष<sup>४</sup>, इत्यादि हीं अनियत वाढत जातात इतकेंच नाही, परंतु प्रत्येक पद त्याचे पूर्वीचे पदाहून अनियत वाढत जातें; ह्मणजे अर्थ हाच, कीं क्ष<sup>२</sup>, पेक्षां क्ष<sup>३</sup> हा इतका अधिक लौकर वाढत जातो, कीं शेवटीं क्ष<sup>३</sup> यांत क्ष<sup>२</sup> हा इच्छेप्रमाणें हव्या तितक्या वेळा जाईल. तसेंच, जेव्हां क्ष अनियत घटत जातो, तेव्हां असें दिसतें, कीं क्ष<sup>२</sup>, क्ष<sup>३</sup>, क्ष<sup>४</sup>, इत्यादि

\* क्ष याचे पूर्ण घाताविषयीं बीजगणित श्रेणीचीं पदे याप्रमाणें आहेत.

..... क्ष<sup>२</sup>, क्ष<sup>३</sup>, क्ष<sup>४</sup>, क्ष<sup>५</sup>, क्ष<sup>६</sup>, क्ष<sup>७</sup>, क्ष<sup>८</sup>, .....

वरचे बरोबरीचीं पदे हींच आहेत

$$\frac{1}{\text{क्ष}^2}, \frac{1}{\text{क्ष}^3}, \frac{1}{\text{क्ष}^4}, 1, \text{क्ष}, \text{क्ष}^2, \text{क्ष}^3, \dots \dots \dots १७३ \text{ आणि } १७४ \text{ पृष्ठ पहा.}$$

हीं अनियत घटत जातात इतकेंच नाही ; परंतु प्रत्येक पद त्याचे पूर्वीचे पदाहून अनियत घटत जातें ; ह्मणजे अर्थ हाच, कीं क्ष<sup>१</sup> पेक्षा क्ष<sup>२</sup> हा इतका अधिक लौकर घटत जातो, कीं शेवटीं क्ष<sup>१</sup> हा इच्छेप्रमाणे क्ष<sup>२</sup> याचे हवे तेवढे लहान अपूर्णाकाचे बरोबर होईल. वरचा कल्पना या पुढीलप्रमाणें संक्षेपरूपानें सांगतां येतात; त्या संक्षेपरूपानें मात्र समजतात परंतु केवळ सरळ रितीनें समजांत येण्याजोग्या नाहीत.

### संक्षेप बोलणें.

१. दोन अनंत मोठे परिमाणांतून, एक परिमाण दुसऱ्याहून अनंत मोठें असेल.

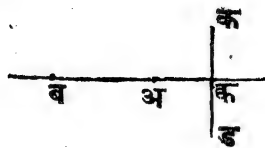
२. दोन अनंत लहान परिमाणांतून एक परिमाण दुसऱ्याहून अनंत लहान असेल.

### खरा अर्थ.

१. दोन अनियत वाढणाऱ्या परिमाणांतून, एक दुसऱ्याहून इतकें लौकर वाढत जाईल, कीं केवळ बोलण्याप्रमाणें तें अनियत वाढत जातें इतकेंच नाही, परंतु त्यांत जितके वेळा दुसरें परिमाण जाईल, त्या वेळांची संख्याहि, अनियत वाढत जाती.

२. अनियत घटत जातात अशीं दोन परिमाणें असतील, तर त्यांतून एक दुसऱ्याहून इतकें लवकर घटत जाईल, कीं केवळ बोलण्याप्रमाणें तें अनियत घटत जातें इतकेंच नाही, परंतु दुसऱ्या परिमाणाचा अपूर्णाकाविषयीहि, तें अनियत घटत जातें.

आतां हें पुढील कृत्य शिकणारानें समजावून दाखवावें



जर अ आणि ब हे कडे रेघेकडे गमन करितात, आणि जर अ असा चालतो कीं जेव्हां बक हा  $\frac{1}{2}$  इंच आहे, तेव्हां अक हा  $\frac{1}{4}$  इंच असतो; आणि जेव्हां बक हा  $\frac{1}{3}$  इंच आहे, तेव्हां अक हा  $\frac{1}{6}$  इंच असतो; अथवा सामान्यतः जेव्हां बक हा  $\frac{1}{n}$  इंच आहेत तेव्हां अक हा  $\frac{1}{2n}$  इंच असतो; आणि क कडे अ जात असतां जर या आकृतीवर स्थूल दर्शक यंत्र मांडलें, जाची स्थूल करण्याची शक्ति वाढत जाती, ती अशा रितीनें कीं स्थूल करण्याचे शक्तीची वाढ, आणि अक रेघेचे खरें कमी होणें हीं दोन्हीं बरोबर असतील; ह्मणजे अक रेघे नेहेमी सारिख्येच लांबीची दृष्टीस पडेल; तेव्हां ब हा कडे गमन करितो असें दृष्टीस पडणार नाही परंतु क पासून दूर दूर होत जातो असें दृष्टीस पडेल.

## सातवा अध्याय.

बीजगणितानुरूप पद्धति आणि त्यांची फळे यांचे प्रतवार  
रचनेविषयी. भागाकाराची रीति.

या विषयाचा विचार करण्याचे पूर्वी, जा पद्धती आल्या त्यांची प्रतवार  
रचना करितो. जे शब्द कामांत आणितात ते बहुतकरून कांहीं एक  
विशेष अक्षराचे संबंधाचे असतात; आणि जे पुढे येईल त्यांत ते विशेष  
अक्षर क्ष घेतले आहे. या पुढील कोष्टकाचा अर्थ आतां दाखवितो.

### फड्शनें.

साधारण बीजगणितानुरूप.		असाधारण बीजगणितानुरूप.
अकरणी.	करणी.	घातमूलप्रकाशकरूप, लाघतमिक,
पूर्णरूप. अपूर्णरूप.	पूर्णरूप. अपूर्णरूप.	सुलट वर्तुळरूप,
एकाकी, द्वियुक्, त्रियुक्, चतुर्युक्, इत्यादि.	एकाकी, द्वियुक्, त्रियुक्, चतुर्युक्, इत्यादि.	उलट वर्तुळरूप, इत्यादि.

जा पद्धतीमध्ये कोणत्याहि तऱ्हेने क्ष युक्त असतो, त्या पद्धतीस क्षचें  
फड्शन ह्मणतात; जसें, अ+क्ष, अ+त्रक्ष, इत्यादि ह्या पद्धती

क्षचीं फड्शनं आहेत; त्या पद्धती अ आणि व या अक्षरांचींहि फड्शनं आहेत, परंतु त्या पद्धती क्षविषयींचीं मात्र फड्शनं आहेत असा विचार करण्याचा आहे. या पुस्तकाचे मागील भागांत जा पद्धतींचा विचार झाला, त्या जातीचा पद्धतींची संख्या जा पद्धतींत सांत आहे, अशा सर्व पद्धतींस साधारण बीजगणितानुरूप फड्शनं झणतात, परंतु जांत क्ष घातमूळ प्रकाशकरूप असतो त्यांस झणत नाहीं. झणजे, जसे  $\sqrt{a+b}$ ,  $a^2+b$ , इत्यादि हीं साधारण बीजगणितानुरूप फड्शनं आहेत, परंतु  $a^{\frac{1}{2}}$  हे बीजानुरूप फड्शन नाहीं. आणि २७७ पृष्ठा प्रमाणे,  $1+a+a^2$  इत्यादि अनंत पावेतों ही श्रेणी आणि  $1-a$  (१-क्ष) हा भागाकार हीं दोन्ही एकच आहेत, हे सिद्ध होईपावेतों ही वरची श्रेणी, क्षचे साधारण बीजगणितानुरूप फड्शन आहे कि नाही, हे जाणवत नाहीं. क्षचे दुसऱ्याे सगळे फड्शनास असाधारण बीजगणितानुरूप फड्शनं झणतात; जसे  $a^{\frac{1}{2}}$  आणि जांत अशीं पदे येतात तीं सगळीं फड्शनं त्यासारखीं होतील; पुढें जेव्हां सांगण्याचा समय येईल, तेव्हां क्षचें लाघतम, आणि त्रिकोणमितीमध्ये क्षची सैन आणि कोसैन, आणि अनेक अशीं दुसरीं तऱ्हेतऱ्हेचीं फड्शनं येतील, त्यांसहि असाधारण बीजगणितानुरूप फड्शनं झणतात. जा फड्शनामध्ये  $a^{\frac{1}{2}}$  येतो, त्यास क्षचें घातमूळ प्रकाशकरूप फड्शन झणतात. जा फड्शनामध्ये लाघतम येतें, त्यास लाघतमिक फड्शन झणतात. इत्यादि.

साधारण बीजगणितानुरूप फड्शनामध्ये दोन जाती आहेत, त्यांतून एकास अकरणी झणतात, झणजे त्यांत क्षचे केवळ पूर्णघात येतात, जसे  $a+a^2$ ,  $a^2+b$ , इत्यादि; आणि दुसऱ्यास करणी झणतात, झणजे त्यांत क्षचीं मूळ किंवा क्षचे अपूर्ण घात येतात, जसे  $a^{\frac{1}{2}}+b$ ,  $\sqrt{a^2+b}$ , इत्यादि.

क्षचीं अकरणी आणि करणीरूप फड्शनं दोन जातींचीं आहेत, झणजे एक पूर्णरूप, जांत क्ष अंशांचे स्थळींमात्र येतो, जसे

$$a + \frac{b}{a} \text{ आणि } \frac{a+\sqrt{b}}{a+b};$$

दुसरें अपूर्णरूप, जांत क्ष छेदांचे स्थळीं येतो, जसे



$$\frac{अ+क्ष}{बक्ष+क्ष^२} \text{ आणि } \frac{\sqrt{क्ष}-\sqrt{य}}{क+\sqrt[३]{क्ष}}$$

पूर्णरूप फड्शनामध्ये हे पुढील भाग आहेत; पहिला, एकाकी पदे, जांत क्षचा केवळ एक घात येतो, जसे, क्ष<sup>३</sup>, अक्ष<sup>३</sup>,  $\sqrt{बक्ष}$ , (अ+ब) क्ष<sup>३</sup>; दुसरा, त्रियुक्पदे, यांत क्षचे दोन निरनिराळे घात येतात, आणि त्यांत क्ष<sup>३</sup> हे येतो, जसे अ+बक्ष अथवा अक्ष<sup>३</sup>+बक्ष, कक्ष<sup>३</sup>+ $\sqrt{क्ष}$ , मक्ष<sup>३</sup>+नक्ष<sup>३</sup>, इत्यादि; तिसरा, त्रियुक्पदे, जांत क्षचे तीन निरनिराळे घात येतात; चतुर्युक्पदे, जांत क्षचे चार निरनिराळे घात येतात, इत्यादि. त्रियुक् आणि चतुर्युक्पदे हे शब्द फार थोडके कामांत आणतात; एकाकी पदाचे पुढल्या सगळ्या पदांस वढतकरून बहुयुक्पदे ल्हाणतात.

पूर्णरूप आणि अकरणी फड्शनांत जस अतिमोठा घात असेल, त्याप्रमाणे त्याचे पहिल्या, दुसऱ्या, तिसऱ्या, इत्यादि वर्णांचीं फड्शने असे विभाग केले असतात. जसे

अ+बक्ष, ही पद्धति क्षची पहिल्यावर्णाची अकरणी पूर्णरूप फड्शन आहे. अ+बक्ष+कक्ष<sup>३</sup>, ही क्षची दुसऱ्या वर्णाची अकरणी पूर्णरूप फड्शन आहे. इत्यादि.

अ हे पद, जर अक्ष<sup>३</sup> याप्रमाणे मांडिले, तर ते क्षविषयीं कांहीं वर्णांचे नाही.

$$\text{पुढील पद्धती, } \frac{अ+\sqrt{ब} \text{ लाग } क + अ^३ \text{क्ष}}{म + \sqrt{न}}$$

अ विषयीं अकरणी पूर्णरूप त्रियुक्पद फड्शन आहे.

म विषयीं अकरणी अपूर्णरूप फड्शन आहे.

ब विषयीं करणी पूर्ण रूपाचे फड्शन आहे.

न विषयीं करणी अपूर्ण रूपाचे फड्शन आहे.

क्ष विषयीं घातमूळप्रकाशक रूपाचे फड्शन आहे.

क विषयीं लाग्रतमिक् फड्शन आहे.

## ११२ बीजगणितानुरूप पद्धती आणि त्यांचीं फळे.

अकरणी आणि पूर्णरूपाचीं फड्शनं यांची रचना बहुतकरून अशी करितात, कीं क्ष चे घात डाव्येकडून उजवेकडे चढतील किंवा उतरतील. जसे, अक्ष+ब-कक्ष ही पद्धति या रितीनें कधीहि मांडीत नाही, परंतु या पुढील दोन रितीतून एकीप्रमाणें मांडितात;

$$-कक्ष^२+अक्ष+ब \text{ अथवा } ब+अक्ष-कक्ष^२$$

पहिल्ये पक्षांत क्षचे उतरत्ये घातानें रचली, आणि दुसऱ्ये पक्षां क्षचे चढत्ये घातानें रचली असें ह्मणतात.

$$\begin{array}{ll} \text{तर} & अ-बक्ष^३+कक्ष-क्ष^४-क्ष^५ \text{ ही} \\ \text{या प्रमाणें रचिली पाहिजे} & अ+कक्ष-(ब+१)क्ष^३-क्ष^४ \\ \text{अथवा} & -क्ष^४-(ब+१)क्ष^३+कक्ष+अ \end{array}$$

अकरणी आणि पूर्णरूपाचे फड्शनांत दुसरीं तशीं फड्शनं येतात, परंतु त्यांमध्ये पदांची संख्या अनंत असती, यावरून तीं बीज गणितानुरूप किंवा असाधारण फड्शनं आहेत असें जाणवत नाही, ह्मणून अशीं फड्शनं दुसऱ्या सर्व फड्शनांपेक्षां फार उपयोगी आहेत. तीं फड्शनं या पुढील रूपाचीं असतात.

$$अ+बक्ष+कक्ष^२+ \dots + पक्ष^{n-१}+कक्ष^n$$

यांत अ, ब, आणि क, हीं क्षचीं फड्शनं नाहीत, आणि न पूर्णांक आहे;

$$अ+बक्ष+कक्ष^२+इक्ष^३+ \dots + \text{इत्यादि अनंत पावेतों.}$$

पद्धतीस अशा जातिचेरूप देणें हा या विषयाचा एक मुख्य प्रकार आहे. वरचे दोन पद्धतीतून पहिलीला बहुयुक्पद असें नाव देतां येईल, दुसरीला अनंतश्रेणी असें नाव देतां येईल.

व्याख्यानें. बहुयुक्पदांचे गुणाकारांत, कृति करितानां जे वेगळाले गुणाकार उत्पन्न होतात, त्यांस पोटचे गुणाकार असें नाव देतां येईल. जसे अ+ब यास ब+क्ष याणें गुणिलें, तर अब, अक्ष, बक्ष, आणि क्ष, हे

पोटचे गुणाकार आहेत, जांत क्षचा कोणताहि घात येतो, ते सर्व मिळून बहुयुक्पदांचे पद आहे; जसें, वरचा अ+अक्ष+वक्ष+क्ष हा गुणाकार चार पदांचा आहे असें ह्मणत नाहीं, परंतु तो तीन पदांचा आहे ह्मणजे अव, (अ+व) क्ष आणि क्ष.

सिद्धांत. दोन बहुयुक्पदांचे गुणाकारामध्ये, खरे पोटचे गुणाकार अशीं, कनिष्ठ पक्षीं दोन पदे तरी असलीं पाहिजेत, परंतु तीं दोन किंवा अधिक अशा पोटचा गुणाकारानीं झालेलीं अशीं नसावीं.

मनांत आण कीं अक्ष+वक्ष+कक्ष आणि पक्ष+कक्ष या दोहोंचा परस्पर गुणाकार करायाचा आहे. तर स्पष्ट आहे कीं कक्ष<sup>२</sup>×कक्ष<sup>२</sup> अथवा कक्ष<sup>४</sup> यांत जो क्षचा घात येतो त्याचे बरोबर मोठा घात दुसऱ्या कोणत्याहि पोटचे गुणाकारांत येत नाहीं, आणि अक्ष×पक्ष<sup>२</sup>, अथवा अपक्ष<sup>२</sup> यांत जो क्षचा घात येतो, त्याचे बरोबर लहान घात दुसऱ्या कोणत्याहि पोटचे गुणाकारांत येत नाहीं, कांकीं, या पदांमध्ये घातप्रकाशक चिन्हे अधिक मोठीं किंवा अतिलहान आहेत. यामुळे हीं दोन पदे पोटचे गुणाकारांत असावीं, खरे ह्मटलें तर गुणाकार याप्रमाणे आहे.

$$\text{अपक्ष}^२ + (\text{अक्ष} + \text{वक्ष}) \text{क्ष}^२ + (\text{वक्ष} + \text{कक्ष}) \text{क्ष}^२ + \text{कक्ष}^२$$

यांत चार पदे आहेत, त्यांतून दोन पदे वर सांगितले केवळ पोटचे गुणाकार आहेत.

बीजगणितांतील आणि अंकगणितांतील भागाकारामध्ये भेद हाच आहे, कीं अंक गणितांतील भागाकारामध्ये कोणताहि पूर्णांक क कांहीं वेळा घेतला असता, कांहीं पूर्णांक प होईल कीं काय, हा निर्णय करायाचा आहे; बीजगणितामध्ये कोणतेहि बहुयुक्पद क दुसऱ्या कोणत्याहि बहुयुक्पदानें गुणिल्याने, क्षचें बहुयुक् फड्शन, प करितां येईल कीं काय, हा शोध करायाचा आहे. उदाहरण,  $\angle \text{क्ष}^३ + १$  यास  $२\text{क्ष} + १$  याणें भागायाचें, या पुढीलप्रमाणें आहे; ह्मणजे, शक्य असेल तर  $\frac{\text{क्ष}^३ + १}{२\text{क्ष} + १}$  यास सरळ बहुयुक्पदांचें रूप द्यावें. हा प्रश्न करण्याची रीति दुसऱ्या सर्व प्रश्नांस लागू पडेल.

$२\text{क्ष} + १$  यांस अ+वक्ष+कक्ष<sup>२</sup>+इक्ष<sup>३</sup>+इत्यादि यांणीं गुणून, शक्य असेल,

तर  $\angle क्ष^३+१$  ही पद्धति उत्पन्न होती असें मनांत आण. आतां पहिल्यानें,  $अ+बक्ष+कक्ष^३+इक्ष^३+ इत्यादि$  ही पद्धति  $कक्ष^३$  याचे वर जाऊं शकत नाहीं; कांकीं, जर ती त्या पदाचे वर जाती, तर  $इक्ष^३$  पावेतो जाईल असें मनांत आण. ह्मणून मागव्ये सिद्धांताप्रमाणें,  $इक्ष^३ \times २क्ष$  अथवा  $२इक्ष^३$  असें पद गुणाकारांत असावें. परंतु सांगितला गुणाकार  $\angle क्ष^३+१$  आहे, यांत  $क्ष^३$  दिसत नाहीं; यामुळे,  $इक्ष^३$  आणि त्यापेक्षां मोठा घात इच्छिल्ये बहुयुक् पदामध्ये नाहीं यामुळे इच्छिलें बहुयुक्पद यारूपाचें आहे

$अ+बक्ष+कक्ष^३$ . जर वर सांगितला प्रश्न शक्य असेल, तर याप्रमाणें होईल,

$$\angle क्ष^३+१ = (२क्ष+१)(कक्ष^३+बक्ष+अ)$$

$२क्ष \times कक्ष^३$  हें वरचा गुणाकाराचें पद असावें असें सिद्ध केलें; परंतु तें पद  $\angle क्ष^३$  च असावें, यामुळे  $२क्ष \times कक्ष^३ = \angle क्ष^३$ , अथवा  $कक्ष^३ = \angle क्ष^३ \div २क्ष = ४क्ष^३$ .

$$\begin{aligned} \text{यामुळे, } \angle क्ष^३+१ &= (२क्ष+१) (४क्ष^३+बक्ष+अ) \\ &= (२क्ष+१) ४क्ष^३ + (२क्ष+१) (बक्ष+अ) \end{aligned}$$

$\angle क्ष^३+१ - (२क्ष+१) ४क्ष^३$  अथवा  $-४क्ष^३+१ = (२क्ष+१) (बक्ष+अ)$   
 $२क्ष \times बक्ष$  हें वरचा दुसऱ्या गुणाकाराचें पद असावें; परंतु तें  $-४क्ष^३$  मात्र येतें;

$$\begin{aligned} \text{यामुळे, } बक्ष &= -४क्ष^३ \div २क्ष = -२क्ष \text{ अथवा} \\ -४क्ष^३+१ &= (२क्ष+१) (-२क्ष+अ) \\ &= -२क्ष (२क्ष+१) + (२क्ष+१) अ \end{aligned}$$

$$-४क्ष^३+१+२क्ष (२क्ष+१) \text{ अथवा } (२क्ष+१) = (२क्ष+१) अ$$

$अ=१$  असें केलें असतां वरचे सभीकरण एकरूप करितां येतें; यामुळे,  $४क्ष^३-२क्ष+१$  हें इच्छिलें बहुयुक्पद आहे, जाणें  $२क्ष+१$  गुणिले असतां, गुणाकार  $\angle क्ष^३+१$  होतो; हें खरें आहे असें कृति केल्यानें दिसेल.

वरचा कृतीची रचना अंकगणितांतील भागाकाराप्रमाणे करितां येईल; परंतु त्यांत इतका मात्र भेद आहे, कीं भाज्य आणि भाजकाचे डाव्येकडील अंक तपासून, भागाकारांत नवें पद काढायाचें याचे जागीं, याप्रमाणे करितात, ह्मणजे, भाज्याचे किंवा वजावाकीचे डाव्येकडील पद, भाजकानें भागून, भागाकारांत नवें पद होतें. जसें या पुढीलप्रमाणें, जात एकच प्रश्न दोन निरनिराळ्या रचनेनें उलगडला आहे.

$  \begin{array}{r}  २६+१) ८६^३+१ ( ४६^३-२६+१ \quad १+२६) १+८६^३ ( १-२६+४६^३ \\  \underline{८६^३+४६^३} \\  -४६^३+१ \\  -४६^३-२६ \\  \hline  +२६+१ \\  २६+१ \\  \hline  ०  \end{array}  $	$  \begin{array}{r}  १+२६ \\  \hline  -२६+८६^३ \\  -२६-४६^३ \\  \hline  ४६^३+८६^३ \\  ४६^३+८६^३ \\  \hline  ०  \end{array}  $
--	---

क्षचे चढते किंवा उतरते घातांप्रमाणे पदांची रचना संभाळून मांडिली पाहिजे. या कृतीची साधारण रीति या पुढीलप्रमाणे आहे;

अकरणी बहुयुक्पदांची बेरीज, वजावाकी, आणि गुणाकार हीं अकरणी बहुयुक्पदे आहेत हें स्पष्ट आहे. दोन अकरणी बहुयुक्पदे दाखवायासाठीं प आणि क घे, यापासून वि काढायाची इच्छा आहे, अशा तऱ्हेनें, कीं  $p = कवि$  असें होईल. यांत प भाज्य आहे, क भाजक आहे, आणि जो भागाकार काढायाचा आहे तो वि आहे. सोयीप्रमाणे कोणतेहि बहुयुक् किंवा एकाकी पद दाखविण्यासाठीं अ घे, त्यास कने गुण, आणि तो गुणाकार पतून कजा कर, ह्मणजे असें करून प-अक होईल. या पद्धतीस र ह्मण, यावरून

$$p - अक = र \dots \dots \dots (१)$$

कोणतेहि दुसरें बहुयुक्पद दाखविण्यासाठीं अ घे; नंतर प चे जागीं

२९६ बीजगणितानुरूप पद्धती आणि त्यांचीं फलें.

र मांडून त्याशीं आणि कशीं वरची कृति पुनः कर. त्याचें उत्तर दाखविण्यासाठीं र घे. तर

$$र-अक = र \dots\dots\dots (२)$$

कोणतेंहि तिसरें बहुयुक्पद दाखविण्यासाठीं अ घे, तर

$$र-अक = र \dots\dots\dots (३)$$

कृतीचे प्रत्येक क्रमांत वजाबाकीला सोपें रूप द्यावें, असें कीं शेवटीं त्या वजाबाकीचें असें रूप व्हावें, कीं सावरून या पुढील दोन गोष्टीं. तून एकतरी लक्षांत यावी ; ह्मणजे पुढील बाकी ० होण्यास नवें बहुयुक्पद कसें काढावें, अथवा असें बहुयुक्पद काढण्यास अशक्य आहे कीं काय. जाचा योगानें वजाबाकी ० होईल, असें अ नवें बहुयुक्पद किंवा एकाकी पद काढितां येतें, अशी पहिल्यानें कल्पना कर. तर

$$र-अक = ० \dots\dots\dots (४)$$

तर, वरचे वेगळाले समीकरणांपासून, याप्रमाणें होतें,

$$\begin{aligned} प &= अक + र = अक + अक + र = अक + अक + अक + र \\ &= अक + अक + अक + अक = क(अ + अ + अ + अ) \end{aligned}$$

तर अ + अ + अ + अ हें इच्छिलें बहुयुक्पद आहे. (४) या अंकाचे समीकरणाचे जागीं हें पुढील समीकरण होतें,

$$र-अक = र$$

आणि मनांत आण कीं कृति पुढें चालविणें अनुपयोगी आहे हें स्पष्ट दिसते. तर याप्रमाणें होईल,

$$प = अक + अ'क + अ''क + अ'''क + र'''$$

$$(\div)क \quad \frac{प}{क} = अ + अ' + अ'' + अ''' + \frac{र'''}{क}$$

= अकरणी बहुयुक्पद + {एक अपूर्णांक जाचें रूप  $\frac{प}{क}$  यापेक्षां अति-सरळ.

उदाहरण.  $\frac{क्ष^4 + १}{क्ष^3 + २क्ष}$  यास अधिक सरळरूप दे.

$$प = क्ष^4 + १$$

$$क = क्ष^3 + २क्ष$$

$$क्ष^3 + २क्ष)क्ष^4 + १(अ = \frac{क्ष^4}{क्ष^3} = क्ष^१$$

$$\frac{क्ष^4 + २क्ष^३ = अक}{-२क्ष^३ + १ = र, अ' = \frac{-२क्ष^३}{क्ष^३} = -२क्ष^०$$

$$\frac{-२क्ष^३ - ४क्ष^३ = अ'क}{४क्ष^३ + १ = र', अ'' = \frac{४क्ष^३}{क्ष^३} = ४क्ष^०$$

$$\frac{४क्ष^३ + ८क्ष^३ = अ''क}{-८क्ष^३ + १ = र'', अ''' = \frac{-८क्ष^३}{क्ष^३} = -८क्ष^०$$

$$\frac{-८क्ष^३ - १६क्ष^३ = अ'''क}{१६क्ष^३ + १ = र'''}{}$$

ही कृति पुढें चालविणें उपयोगी नाहीं, तर याप्रमाणें आहे.

$$\frac{क्ष^4 + १}{क्ष^3 + २क्ष} = क्ष^१ - २क्ष^० + ४क्ष^० - ८ + \frac{१६क्ष + १}{क्ष^३ + २क्ष}$$

## २१८ बीजगणितानुरूप पद्धती आणि त्यांचीं फळे.

वरचे गोष्टीवरून, हा पुढील सिद्धांत निघतो, आणि बहुतकरून तो गणितांमध्ये फार उपयोगी पडतो.

जर प आणि क हीं दोन अकरणी बहुयुक्पदे असतील, आणि जर त्यांतून प चा घात मोठा असेल, तर  $\frac{प}{क}$  यास  $ग + \frac{ह}{क}$  हें रूप देतां येईल, यांत ग आणि ह अकरणी बहुयुक्पदे आहेत, आणि कपेक्षां ह एक किमतीनें तरी कमी आहे.

अभ्यासाकरितां उदाहरण. वरचा कृतींत, वजाबाक्या कामांत आणण्याचे पूर्वीं जर त्या ब, ब', ब'', इत्यादि याणीं वेगवेगळ्या गुणिल्या, तर याप्रमाणें होईल,

$$\frac{प}{क} = अ + \frac{अ'}{ब} + \frac{अ''}{बब'} + \frac{अ'''}{बब'ब''} + \frac{र'''}{बब'ब''क}$$

वरची कृति अनंत वेगवेगळ्या तऱ्हेनें कामांत आणितां येती ; कां कीं जरी केवळ वरचे उदाहरणाप्रमाणें ती रीति कामांत आणायास सोईवार पडती, तथापि तर्कामध्ये प, क, अ, अ', इत्यादि हीं कोणतींहि परिमाणें असतील, असें मानितां येईल. जसें या पुढील उदाहरणांत

$$प = १ \quad क = १ + क्ष असें घे,$$

$$(१ + क्ष) १ (अ = क्ष असें मनांत आण.$$

$$\frac{क्ष + क्ष^२}{१ - क्ष - क्ष^२} = र,$$

$$अ = क्ष^२ घे,$$

$$\frac{क्ष^२ + क्ष^३}{१ - क्ष - २क्ष^२ - क्ष^३}$$

$$\frac{प}{क} = \frac{१}{१ + क्ष} = क्ष + क्ष^२ + \frac{१ - क्ष - २क्ष^२ - क्ष^३}{१ + क्ष}$$

परंतु बहुतेक पक्षांत ही कृति अपूर्णाकांची मेळवणी आणि वजाबाकी करण्याची मनःकल्पित रीति मात्र आहे. जेव्हां भाज्याचे डाव्ये-



कडचें पद भाजकाचे डाव्येकडचे पदानें भागून, भागाकाराचीं पदे काढितात अशी चाल आहे, तेव्हां अशा उलगाडण्याचे रितीपासून उत्तर बहुतकरून प्रमाणरूप आणि उपयोगी असते. ह्मणजे, या पुढील-प्रमाणें उत्तरें निघतात;

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \frac{x^5}{1+x}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \frac{x^4}{1-x}$$

$$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} - \frac{1}{x+1}$$

$$\frac{1}{1-2x+x^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \frac{5x^4-4x^5}{1-2x+x^2}$$

वरचा कोणत्याहि श्रेणीचीं पदे अनियत वाढविलीं असतां, नियतते जवळ पोचतील कीं नाहीं हें वरचे रितीपासून कळेल. ह्मणजे, हें पहाण्यांत येतें, कीं

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n \dots \dots \dots (अ)$$

यास  $\frac{x^{n+1}}{1-x}$  हें मिळविल्याने  $\frac{1}{1-x}$  होतो. २७६ पृष्ठाप्रमाणें जेव्हां १ पेक्षां  $x$  लहान आहे, आणि जसा न अनियत वाढत जातो, तसा  $x^{n+1}$  अनियत घटत जातो, तेव्हां (अ) चें सर्वधन २७७ पृष्ठाप्रमाणें  $\frac{1}{1-x}$  याचे जवळ जवळ निरंतर येत जातें.

सद्यः प अकरणी बहुयुक्पद दाखविण्यासाठीं (प) घे, आणि (प) + (क) = (प+क), यापासून असें समजावें, कीं प आणि क अकरणी बहुयुक्पदे आहेत, यावरून त्यांची बेरीज अकरणी बहुयुक्पद आहे. तर सर्वदां याप्रमाणें होतें;

$$(प) + (क) = (प+क),$$

$$(प) - (क) = (प-क)$$

$$(प) \times (क) = (पक); \text{ आणि कांहीं विशेष पक्षांत } \frac{(प)}{(क)} = \left( \frac{प}{क} \right)$$

(ए) यास जें प्रत्येक बहुयुक्पद निःशेष भागितें यास पचा गुण्य किंवा गुणक ह्मणतात ; ह्मणजे,  $\kappa^2-१ = (\kappa+१)(\kappa-१)$ , ह्मणून  $\kappa+१$  आणि  $\kappa-१$  या पद्धती  $\kappa^2-१$  हिचे गुण्य आणि गुणक आहेत. २९३ पृष्ठावरून स्पष्ट आहे.

१. जा बहुयुक्पदांमध्ये मोठा घात आहे, त्या घातापेक्षां त्या पदांचे गुण्यगुणकांमध्ये त्याहून मोठा घात होऊं शकत नाहीं.

२. जर बहुयुक्पदाचा घात म असेल, आणि जर त्याचा गुण्य किंवा गुणक यांतून एकाचा घात प असेल, तर बाकी राहिल्या पदाचा घात म-प असावा.

जसे या पुढील उदाहरणांत

$$\kappa^2-१ = (\kappa-१)(\kappa^2+\kappa+१)$$

$$= (\kappa^2-१)(\kappa^2+१)$$

वरचें बहुयुक्पद चवथ्या वर्णाचें आहे, एक पक्षां त्याचे गुण्यगुणक पहिल्या वर्णाचे आणि तिसऱ्या वर्णाचे आहेत,  $(१+३=४)$ , आणि दुसऱ्या पक्षां त्याचे गुण्यगुणक दुसऱ्या आणि दुसऱ्या वर्णाचे आहेत,  $(२+२=४)$ .

आतां जी गोष्ट पुढें सांगतो ती केवळ अकरणी बहुयुक्पदांविषयीं आहे, आणि निःशेष भागाकार या शब्दापासून असें समजोवें, कीं भागाकार केल्यानें कांहीं शेष रहात नाहीं. पूर्वी सांगितलेल्या गोष्टींवरून हे पुढील सिद्धांत स्पष्ट निघतात.

१. भाज्याचा वर्ण भाजकाचे वर्णाबरोबर तरी नसला, तर निःशेष भागाकार होणें अशक्य आहे.

२. जेव्हां भाज्याचा वर्ण भाजकाचे वर्णापेक्षां मोठा आहे, आणि जर निःशेष भागाकार होण्यास अशक्य आहे, तर बाकीचा वर्ण भाज्य आणि भाजकाचे वर्णाहून लहान असतो.

३. जर भाज्याचा वर्ण म असेल, आणि भाजकाचा वर्ण न असेल, तर भागाकाराचा वर्ण (म-न) होईल, बाकीचा वर्ण (न-१) यापेक्षां मोठा असणार नाहीं. कांकीं जोंपर्यंत बाकीचा वर्ण भाजकाचे वर्णाचे बरोबर किंवा त्यापेक्षां मोठा आहे, तोंपर्यंत कृति पुढें चालेल.

४. भाज्य प, भाजक क, भागाकार अ, आणि बाकी र असे असतील, तर

$$प = अक + र \quad \text{अथवा} \quad \frac{प}{क} = अ + \frac{र}{क}$$

५. म आणि न यांस जें परिमाण निःशेष भागितें, तें परिमाण त्यांची बेरीज, वजाबाकी, आणि गुणाकार यांसहि पूर्ण भागितें. भाजक दाखविण्यासाठीं ज्ञ घे; तर

$$\begin{aligned} \frac{म}{ज्ञ} &= (अ) & \frac{न}{ज्ञ} &= (ब) & \frac{म+न}{ज्ञ} &= (अ+ब) \\ \frac{म-न}{ज्ञ} &= (अ-ब) & \frac{मन}{ज्ञ} &= अवज्ञ = (अवज्ञ) \end{aligned}$$

६. चवथ्या सिद्धांतामध्ये जें परिमाण प आणि क यांस निःशेष भागितें, तें परिमाण रलाहि पूर्ण भागितें, आणि क आणि र यांचा प्रत्येक भाजक प, इत्यादि यांसहि निःशेष भागितो, ह्मणजे त्या तिहींतून दोहोंस निःशेष भागून, तिसऱ्यास निःशेष भागित नाही, असा कोणताहि भाजक नाही.

उदाहरण, प आणि क यांस ज्ञ निःशेष भागितो असें मनांत आण, तर

$$\begin{aligned} \frac{प}{ज्ञ} \text{ हा भागाकार निःशेष आहे, अथवा } &= \left( \frac{प}{ज्ञ} \right) & \frac{क}{ज्ञ} &= \left( \frac{क}{ज्ञ} \right) \\ अ \times \left( \frac{क}{ज्ञ} \right) &= \left( \frac{अक}{ज्ञ} \right) \text{ यामुळे } \left( \frac{प}{ज्ञ} \right) - \left( \frac{अक}{ज्ञ} \right) &= \left( \frac{प}{ज्ञ} - \frac{अक}{ज्ञ} \right) \\ &= \left( \frac{प-अक}{ज्ञ} \right); \text{ परंतु ही पद्धति } \frac{र}{ज्ञ} \text{ चे बरोबर आहे, यामुळे ही निःशेष} \\ &\text{आहे, ह्मणजे } र \text{ हा ज्ञ याणें निःशेष भागिला जातो. तशाच तर्कानें} \\ &\text{बाकीचे दुसरे दोन पक्ष सिद्ध होतात.} \end{aligned}$$

७. प आणि क यांचा जो अति मोठा साधारण भाजक आहे, तो क आणि र यांचाहि अति मोठा साधारण भाजक आहे.

८. जर कोणत्याहि गुणाकाराचे गुण्य आणि गुणक यांतून एक पद क्षेपें भागिलें जात नाही, तर क्षेपें जें घात दुसऱ्या पदास निःशेष भागितात, ते घात मात्र त्या पदांचे गुणाकारास निःशेष भागिताल.

उदाहरण,  $(क्ष^३+अ)(क्ष^३+६क्ष^२)$  यांचे गुणाकारांत ६ अक्ष<sup>३</sup> हें अतिलहान पद आहे, आणि जा पेक्षां कोणत्याहि पद्धतीतील अति लहान पदांत जो क्षचा घात असतो, त्याहून क्षचा मोठा घात त्या पद्धतीस निःशेष भागित नाही, यामुळे या उदाहरणांत क्ष<sup>३</sup> हा क्षचा अति मोठा घात आहे, जाणें वरचा गुणाकार निःशेष भागिला जातो. परंतु क्ष<sup>३</sup>+६क्ष<sup>२</sup> यास निःशेष भागायासाठीं क्ष<sup>३</sup> हा अति मोठा घात आहे.

९. जर कोणतीहि पद्धति क्षचा कोणत्याहि घातांनै निःशेष भागिली जाती, तर त्या पद्धतीचा कोणताहि दुसरा भाजक जो, क्षचा कोणत्याहि घातांनै निःशेष भागिला जात नाही, अशा भाजकांनै, त्या पद्धतीस क्षचा कोणत्याहि घातांनै भागून आलेला भागाकार निःशेष भागिला जाईल.

उदाहरण, क्ष<sup>३</sup>-क्ष यास क्ष याणें भागिलें, तर क्ष<sup>३</sup>-१ होतो; क्ष-१ त्या पद्धतीचा निःशेष भाजक आहे, आणि, यामुळे, जरी ठाऊक नसलें, तरी तो क्ष<sup>३</sup>-१ या भागाकाराचा निःशेष भाजक आहे.

हा सिद्धांत सिद्ध करण्यासाठीं क्ष<sup>३</sup>प ही पद्धति घे, आणि जी क्ष+१ याणें भागिली जाईल; ह्मणजे पुढीलप्रमाणें होतें असें मनांत आण,

$$\frac{(क्ष^३प)}{क्ष+१} = (अ) \quad क्ष^३(प) = (अ)(क्ष+१)$$

यामुळे (८) प्रमाणें क्ष<sup>३</sup>याणें (अ) निःशेष भागिला जातो;

$$\text{अथवा } \frac{अ}{क्ष^३} = (ब) \quad \text{ह्मणजे } (अ) - क्ष^३(ब)$$

$$\text{यामुळे } क्ष^३(प) = क्ष^३(ब)(क्ष+१)$$

$$(प) = (ब)(क्ष+१) \quad \text{अथवा } \frac{प}{क्ष+१} = (ब)$$

ह्मणजे, प आणि क्ष<sup>३</sup>प हीं दोन्हीं क्ष+१ यांणीं निःशेष भागिलीं जातात, आणि क्ष<sup>३</sup>प याचे दुसऱ्या कोणत्याहि भाजकाविषयीं तसेंच दाखवितां येईल.

आतां दोन अंकरणी बहुयुक्पदांचा अति मोठा साधारण भाजक काढण्याची रीति, अंकगणितामध्ये दोन पूर्णांकांचा दृढ भाजक काढ-

ण्याचा रीतिप्रमाणेंच आहे. उदाहरण, क्ष<sup>१</sup>-क्ष आणि ३क्ष<sup>१</sup>-३क्ष<sup>२</sup> यांचा अति मोठा साधारण भाजक काढ. पहिल्याने त्या दोन पद्धतीतून एकाकी पदांचा गुण्य किंवा गुणक निराळा कर; ह्मणजे खास हें पुढील रूप दे,

$$\text{क्ष}(\text{क्ष}^1-1) \text{ आणि } 3\text{क्ष}^2(\text{क्ष}^2-1)$$

सद्यः एकाकी पदांचा गुणक सोडून, या पुढील पदांचा अति मोठा साधारण भाजक काढ,

$$\text{क्ष}^1-1 = \text{प} \text{ आणि } \text{क्ष}^2-1 = \text{क} \text{ असे घे,}$$

$$\text{क्ष}^2-1) \text{ क्ष}^1-1 \text{ (क्ष}$$

$$\text{क्ष}^1-\text{क्ष}$$

$$\text{र बाकी} = \frac{\text{क्ष}^1-\text{क्ष}}{\text{क्ष}-1) \text{ क्ष}^2-1 \text{ (क्ष}^3+\text{क्ष}^2+\text{क्ष}+1}$$

$$\text{र बाकी} = 0$$

७ व्या सिद्धांताप्रमाणें क्ष<sup>१</sup>-१ आणि क्ष<sup>२</sup>-१ यांचा जो अति मोठा साधारण भाजक, तोच क्ष<sup>२</sup>-१ आणि क्ष-१ यांचाहि अति मोठा साधारण भाजक आहे; क्ष-१ ह्या पद्धतीचा अति मोठा साधारण भाजक तीच पद्धति आहे, आणि ती क्ष<sup>२</sup>-१ हिला निःशेष भागिती, तर त्या दोन शेवटील पद्धतींचा अति मोठा साधारण भाजक आहे, यामुळे क्ष-१ ही क्ष<sup>१</sup>-१ आणि क्ष<sup>२</sup>-१ यांचा अति मोठा साधारण भाजक आहे. वर सांगितल्या दोन मूळ पद्धतींचा भाजक क्ष आहे; यामुळे, क्ष (क्ष-१) ही पद्धति त्यांचा अति मोठा साधारण भाजक आहे.

९ व्या सिद्धांताप्रमाणें वजाबाकीतून भागाकारानें क्षचा कोणताहि घात नाहींसा करितां येईल. उदाहरण, १-क्ष<sup>३</sup> आणि १-क्ष<sup>२</sup> यांचा अति मोठा साधारण भाजक काढिताना, क्ष<sup>३</sup>-क्ष<sup>२</sup> अथवा क्ष<sup>३</sup>(१-क्ष<sup>२</sup>) ही पहिली वजाबाकी आहे; परंतु जा भाजकामध्ये क्षचे घात आहेत, खाखेरीज क्ष<sup>३</sup>-क्ष<sup>२</sup> यांचे जे सगळे निःशेष भाजक आहेत, त्यांणीं १-क्ष<sup>२</sup> निःशेष भागिला जाईल. परंतु १-क्ष<sup>२</sup> आणि १-क्ष<sup>३</sup> या दोन्ही पद्धती क्षचा कोणत्याहि घातानें भागिल्या जात नाहींत; यामुळे त्यांचे सगळे साधारण भाजक १-क्ष<sup>२</sup> यामध्ये आहेत, आणि क्ष<sup>३</sup>-क्ष<sup>२</sup> या-

बीजगणितानुरूप पद्धती आणि त्यांचीं फलें यांचे प्रतवार रचनेविषयीं

मध्ये ते सर्व आहेत, तर कोणत्याहि भागाकारांत  $\kappa^3 - \kappa^2$  हिचे जागीं  $1 - \kappa^2$  ही पद्धति कामांत घेतां येईल.

भाजकास नव्या भाज्याचे स्थळीं घेतल्याचे पूर्वी, सोईस पडेल ति-  
तक्या वेळा घ्यावा, उदाहरण,  $\kappa^3 - 2\kappa^2 + 1$  आणि  $\kappa^3 - 1$  यांचा अति  
मोठा साधारण भाजक काढिल्याने,  $2\kappa^2 - \kappa - 1$  ही पहिली वजावाकी  
आहे; हिणे भागिल्याचे पूर्वी,  $\kappa^3 - 2\kappa^2 + 1$  यास २नीं गुणायास सोईस  
पडेल, ह्मणजे तेणेंकरून कांहीं नवा साधारण भाजक कृतीमध्ये येत  
नाहीं. अशे पक्षांमध्ये सगळी कृति या पुढीलप्रमाणें आहे, ही तरी अति  
संक्षेप कृति नाहीं. परंतु कठीण पक्षांस जा रिती लागू होतील, त्या  
या उदाहरणापासून उघड समजतील.

$$\kappa^3 - 2\kappa^2 + 1) \kappa^3 - 1 (\kappa$$

$$\kappa^3 - 2\kappa^2 + \kappa$$

$$2\kappa^3 - \kappa - 1) 2\kappa^3 - 8\kappa^2 + 2(1$$

$$2\kappa^3 - \kappa - 1$$

$$- 3\kappa^2 + 3$$

$$(\div) - 3$$

$$\kappa - 1) 2\kappa^3 - \kappa - 1 (2\kappa^2 + 1$$

$$2\kappa^3 - 2\kappa^2$$

$$\kappa - 1$$

$$\kappa - 1$$

$$0$$

यामुळे  $\kappa - 1$  अति मोठा साधारण भाजक आहे.



## आठवा अध्याय.

श्रेणी आणि अनियमित गुणक यांविषयी.

१ पेक्षां क्ष कमी असेल, तर

$१+क्ष+क्ष'+क्ष'+क्ष'+$  इत्यादि,

ही श्रेणी क्विती पुढे चालविली, तरी पदांची बेरीज  $१÷(१-क्ष)$  यापेक्षा अधिक किंवा याचे बरोबर कधी होणार नाही. असे २७७ पृष्ठावर पाहिले. या पद्धतीस अनंतश्रेणी ह्मणतात, २७७ वे पृष्ठाप्रमाणे,  $१÷(१-क्ष)$  ह्या अपूर्णाकास त्या बेरीजेची नियतता ह्मटली आहे, परंतु एथे त्यास सर्वधन असे नांव दिले आहे.

**व्याख्यान.** श्रेणीचीं पदे एकापुढे एक निरंतर मिळविली असतां जा नियततेचे जवळ जवळ जातात, त्या नियततेस अनंतश्रेणीचे सर्वधन ह्मणतात.

जा श्रेणीस बर सांगितलेल्याप्रमाणे नियतता असती, ह्मणजे तिचीं पदे मिळविल्याने इच्छेप्रमाणे मोठी संख्या सांपडू शकत नाही, तीस उत्तरती श्रेणी ह्मणतात; श्रेणीचीं पदे मिळविल्याने जे परिमाण होतें, त्याला जेव्हां कांहीं नियतता नसती, त्या श्रेणीस चढती श्रेणी ह्मणतात. या पुढील श्रेण्यांतून शेवटील श्रेणीशिवाय बाकीचा चढत्या आहेत, असे स्पष्ट दिसते.

$१+१+१+१+$  इत्यादि.

$१+२+३+४+$  इत्यादि.

$१+२+४+८+$  इत्यादि.

$१+\frac{१}{२}+\frac{१}{३}+\frac{१}{४}+$  इत्यादि.

अनंतश्रेणीमध्ये, प्रत्येक पदाचा त्याचा पुढल्या पदार्शी जो संबंध असतो, तो ठाऊक असला पाहिजे, नाही तर त्या श्रेणीविषयी कांहीं तर्क करितां येणार नाही. श्रेणीचीं सर्व पदे मांडितां येत नाही, कांकीं

जी श्रेणी मनांत असती तिचा जवळ जवळचे पदांचा संबंध कळल्याने मात्र ती श्रेणी कोणत्या तऱ्हेची आहे, हें माहीत होते. ह्मणजे पदामधल्या संबंधाचा कांहीं नियम नाही अशी श्रेणी तर्क करण्यांत येत नाही.

जेव्हां पहिलीं चार किंवा पांच पदे दिलीं असतात, आणि त्यां मधला संबंध ठाऊक असतो, तेव्हां पदांचा नेम प्रत्यक्ष कळतो, असें कदाचित् शिकणाराचा मनांत येईल. उदाहरण.

१+१+१+१+१+१+१+१+१+ इत्यादि.

या श्रेणीचा दिलेल्या पदामध्ये जो नियम आहे, त्याप्रमाणें ती श्रेणी पुढे चालविली असता तींत अनुक्रमानें एक मिळवायाचे आहेत, असें त्याचे मनांत येईल. परंतु ही कल्पना खरी नाही; कां कीं वरची श्रेणी अनंत वेगळ्या तऱ्हांनीं पुढे चालेल. आणि दिलेलीं पदे जशीं आहेत त्यांमध्ये जो संबंध आहे, तो संबंध त्या प्रत्येक तऱ्हेमध्ये असतो. ह्मणजे, वरची श्रेणी वा पुढीलप्रमाणें चालेल;

९ वे पद. १० वे. ११ वे १२ वे. १३ वे. १४ वे. १५ वे. १६ वे.

१      १      २      ३      ४      ५      ७      १० इत्यादि.

हिचा नेम हाच आहे, कीं पहिल्या न पदांचे बेरिजेचा दशमस्थळीं जो अंक येतो, तितक्याने न पदापेक्षां (न+१) हें पद अधिक असतें, ह्मणजे जोपर्यंत पदांचा बेरिजेचे दशमस्थळीं एक अंक वाढे, तोपर्यंत तीं सर्व पदे एकसारखीच असावीं. या पुढील श्रेणीचे पदांतले नेम शिकणाराने काढून दाखवावे.

७ १६ २२ २६ ३२ ३६ ४२ अनंत पावेतो.

५ १० ९ १० ९ १० ९ अनंत पावेतो.

५ १० ११ १५ २१ ३० ३९ ४३ ५२ ६१ ७०

७९ ८५ ९४ १०३ १०९ १०९ १०९ अनंत पावेतो.

कांहीं विशेष पक्षांपासून साधारण प्रतिज्ञांचें अनुमान काढायास जर यत्न केला, ह्मणजे, कांहीं थोड्या पदांपासून श्रेणीचे नेमाचें अनुमान करण्यास यत्न केला, तर कदाचित् चुक होईल. जो नेम दिसण्यांत



येतो तो नेहेमी खरा आहे किंवा नाही, हे काहीं थोडे पक्ष पहाण्याने मात्र काढितां येतें. परंतु जो नियम श्रेणीचे पदांमध्ये असावा असे वाटतें, तो नेम तपासल्यानंतर खरा नाही असे दृष्टीस येतें; जसे या पुढील प्रमाणे या पुढील अंकांची श्रेणी घे, ह्मणजे, १, २, ३, ४, ५, इत्यादि, प्रत्येक अंक त्याचे जवळचा मोठ्या अंकानें गुण, आणि त्या गुणाकारास ४१ मिळीव, पुढीलप्रमाणें;

$$१ \times २ + ४१ = ४३$$

$$५ \times ६ + ४१ = ७१$$

$$२ \times ३ + ४१ = ४७$$

$$६ \times ७ + ४१ = ८३$$

$$३ \times ४ + ४१ = ५३$$

$$७ \times ८ + ४१ = ९७$$

$$४ \times ५ + ४१ = ६१$$

$$८ \times ९ + ४१ = ११३, \text{ इत्यादि.}$$

असें करून याप्रमाणें वेगळालीं पदे निघतात, असें दिसतें;

४३, ४७, ५३, ६१, ७१, ८३, ९७, ११३, इत्यादि.

यांत असें दिसतें, कीं सगळीं पदे प्रेम\* ह्मणजे अविभाज्य अंक आहेत, आणि श्रेणीचीं पदे पुढें या नेमानेंच चालतील, अशी कल्पना करायास वरचे गोष्टीवरून संभव होतो; ह्मणजे ही पुढील गोष्ट खरी आहे अशी कल्पना करितां येती; जर क्ष कोणताहि पूर्णांक असेल, तर क्ष (क्ष+१) + ४१ हा प्रेम अंक असावा. आणि श्रेणीचीं पुढचीं पदे  $३९ \times ४० + ४१$  अथवा  $१६०१$ , यापावेतो चालविलीं असतां तीं सर्व पदे प्रेम अंकांशिवाय दुसरीं काहीं नाहींत. तथापि, याचे पुढचे पद, अथवा  $४० \times ४१ + ४१$  हा प्रेम अंक नाही असे स्पष्ट दिसतें; कां कीं तो अंक याप्रमाणें आहे,  $(४०+१)४१$ , अथवा  $४१ \times ४१$ .

एकादे श्रेणीचा नियम सांगण्याची गरज वारंवार पडती, ती अडचण चुकविण्याबद्दल, यापुढें असें समजावें, कीं जीं काहीं श्रेणीचीं पहिलीं पदे येतील, त्या पदांविषयी जर दुसरा काहीं नियम सांगितला नसेल,

\* प्रेम अंक ह्मणजे, जो त्याणेंच किंवा १ याणें मात्र निःशेष भागिल जातो, याशिवाय दुसऱ्या कोणत्याहि अंकानें निःशेष भागेल जात नाही. प्रेम अंकांचो श्रेणी या पुढीलप्रमाणें आहे,

१, २, ३, ५, ७, ११, १३, १७, १९, इत्यादि.

तर त्या पदांत जो साधारण नियम दृष्टीस पडतो, तो त्या श्रेणीचा नियम आहे. जसे  $१+क्ष+क्ष^२+३$  इत्यादि यांपासून असे समजते, की या श्रेणीची पुढील पदे  $क्ष^३+क्ष^४+क्ष^५+३$  इत्यादि आहेत.

**व्याख्यान.** श्रेणीचे साधारण पद ह्मणजे त्या श्रेणीचे न पदाची बीजगणितरूप पद्धति आहे, असे पुढील उदाहरणांवरून समजेल.

श्रेणीची पहिली कांही थोडी पदे.      न पद, अथवा साधारण पद.

$$१+१+१+१+३ \text{ इत्यादि.}$$

$$१$$

$$१+२+३+४+३ \text{ इत्यादि.}$$

$$न$$

$$२+३+४+५+३ \text{ इत्यादि.}$$

$$न+१$$

$$०+१+२+३+३ \text{ इत्यादि.}$$

$$न-१$$

$$१+४+९+१६+३ \text{ इत्यादि.}$$

$$न^२$$

$$४+९+१६+२५+३ \text{ इत्यादि.}$$

$$(न+१)^२$$

$$क्ष+क्ष^२+क्ष^३+क्ष^४+३ \text{ इत्यादि.}$$

$$क्ष^न$$

$$१+क्ष+क्ष^२+क्ष^३+३ \text{ इत्यादि.}$$

$$क्ष^{न-१}$$

$$क्ष^म+क्ष^{म+१}+क्ष^{म+२}+क्ष^{म+३}+३ \text{ इत्यादि.}$$

$$क्ष^{म+न-१}$$

$$१ + \frac{क्ष}{२} + \frac{क्ष^२}{३} + \frac{क्ष^३}{४} + ३ \text{ इत्यादि.}$$

$$क्ष^{न-१}$$

$$न$$

$$१ + क्ष + \frac{क्ष^२}{२} + \frac{क्ष^३}{२.३} + ३ \text{ इत्यादि.}$$

$$क्ष^{न-१}$$

$$१.२.३... (न-१)$$

या शेवटील श्रेणीत पहिले पद दिले आहे, असे साधारण पदांमध्ये येत नाही. कां की जर  $न=१$ . तर साधारण पदाचे रूप याप्रमाणे होते.  $\frac{क्ष^{न-१}}{०}$  अथवा  $\frac{१}{०}$ , परंतु हे रूप खरे नाही, खरे झटले असतां साधारण पद या पुढील गुणाकारांतील, न गुण्य किंवा गुणक यांचा गुणाकार आहे;

$$१ \times \frac{क्ष}{१} \times \frac{क्ष}{२} \times \frac{क्ष}{३} \times \frac{क्ष}{४} \dots$$

सिद्धांत.  $अ+ब+क+इ+फ+$  इत्यादि ही श्रेणी या पुढील सारिखी आहे ;

$$अ \left\{ १ + \frac{ब}{अ} + \frac{कब}{बअ} + \frac{इकब}{कबअ} + \frac{फइकब}{इकबअ} + \text{इत्यादि} \right\}$$

ही गोष्ट सिद्ध करायास शिकणारास अवघड पडणार नाही. प्रत्येक पद याचे पूर्वीचे पदाशी जें प्रमाण\* ठेवितें तें दाखविण्यासाठी, अंश-स्थळीं जें अक्षर असतें तें मोठे रूपानें लिही.

$$\frac{ब}{अ} = ब, \frac{क}{ब} = क, \frac{इ}{क} = इ, \frac{फ}{इ} = फ \text{ इत्यादि.}$$

तर  $अ+ब+क+इ+फ+$  इत्यादि या पुढील प्रमाणें होईल,

$$अ \left\{ १ + ब + कब + इकब + फइकब + \text{इत्यादि} \dots \dots \dots (१) \right\}$$

ब, क, इ, फ, जर हीं प्रत्येक प्रमाणें कांहीं ष या सांगितल्या परिमाणापेक्षां लहान असतील, तर

अ(१+ब) ही अ(१+ब) यापेक्षां लहान होईल,

अ(१+ब+कब) ही अ(१+ब+बब) यापेक्षां लहान होईल,

इत्यादि.

अथवा (१) या श्रेणीचे कितीहि पदांचें सर्वधन, या पुढील श्रेणीचे तितक्येच पदांचे सर्वधनापेक्षां कमी होईल,

$$अ(१ + ब + ब^२ + ब^३ + \text{इत्यादि}) \dots \dots \dots (२)$$

तेव्हां, जर ष एकापेक्षां लहान असेल, तर (१) ही उतरती श्रेणी

\* जें प्रमाण अहा बशीं ठेवितो, तें दाखविण्यासाठीं  $\frac{अ}{ब}$  असें बीजरूपानें मांडितात.

असावी; कां कीं  $१+५+५^२+$  इत्यादि कितीहि पदे घेतलीं, तरी  $१ \div (१-५)$  यापेक्षां मोठीं होऊं शकत नाहीं, यामुळे, (२) या श्रेणीचीं कितीहि पदे घेतलीं, तरी  $अ \div (१-५)$  यापेक्षां मोठीं होऊं शकत नाहीं; (२) या श्रेणीचे वेगवेगळ्ये पदांपेक्षां (१) या श्रेणीचीं वेगवेगळीं पदे लहान आहेत, यामुळे हिचीं कितीहि पदे घेतलीं, तरी  $अ \div (१-५)$  हिजपेक्षां मोठीं होऊं शकत नाहींत.

यामुळे कोणतेहि पद त्याचे पूर्वीचे पदार्थां जें प्रमाण ठेवितें, तें प्रमाण जर एकापेक्षां लहान अशा परिमाणाहून लहान असेल, तेव्हां ती श्रेणी उतरती असती. श्रेणीचीं कांहीं पदे टाकून त्यांचे पुढले पदांत वरची गोष्ट घडती, इतकें मात्र एथें सुचवितों; कां कीं, एकाचे श्रेणीचीं पहिलीं शंभर पदे वाढत जातात असे मनांत आण, तथापि शंभराव्या पदानंतरचे कितीहि पदांचे सर्वधनापासून, असे मनांत आण, कीं ५० यापेक्षां मोठें उत्तर येत नाहीं, आणि पहिल्ये शंभर पदांचे सर्वधन १००० आहे असें ह्मण, तर १०५० यापेक्षां मोठें उत्तर कोणत्याहि सर्वधनापासून निघणार नाहीं, ह्मणून अशी श्रेणी साधारण रूपानें पाहिली असतां उतरती आहे, अथवा खरें ह्मटलें असतां ती श्रेणी शंभराव्या पदानंतर उतरूं लागती.

उदाहरण.  $१+१+\frac{१}{२}+\frac{१}{२\cdot३}+\frac{१}{२\cdot३\cdot४}+$  इत्यादि

ही श्रेणी उतरती आहे. कां कीं यांत

$$\frac{१}{२} = १, \frac{१}{२} = \frac{१}{२}, \frac{१}{३} = \frac{१}{३}, \frac{१}{४} = \frac{१}{४}, \text{ इत्यादि.}$$

ह्मणून दुसऱ्या गुणोत्तरापुढील सगळीं गुणोत्तरे  $\frac{१}{२}$  पेक्षां लहान आहेत, आणि तें दुसरें गुणोत्तर एकापेक्षां लहान आहे.

या श्रेणीची नियतता बीजगणितांत बहुत उपयोगी अंक आहेत, याजकरितां दशांशाचे दाहा स्थलांपावेतो त्यांस काढितों, आणि दशांशाचे दाहाव्येस्थलीं खरा अंक होण्यासाठीं अकरा स्थले पावेतो घेतों. वेगळालीं पदे दाखविण्यासाठीं अ, अ., इत्यादि घे, तर याप्रमाणें होतें,

$a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = \frac{1}{2}a_2, a_4 = \frac{1}{3}a_3, a_5 = \frac{1}{4}a_4$  इत्यादि तर.

$a_1 = 1$	१.००००००००००००००
$a_2 = 1$	१.००००००००००००००
$a_3 = \frac{1}{2}a_2$	०.५०००००००००००००
$a_4 = \frac{1}{3}a_3$	०.१६६६६६६६६६६६७
$a_5 = \frac{1}{4}a_4$	०.०४१६६६६६६६६६७
$a_6 = \frac{1}{5}a_5$	०.००८३३३३३३३३३३३
$a_7 = \frac{1}{6}a_6$	०.००१३८८८८८८८८८९
$a_8 = \frac{1}{7}a_7$	०.०००१९८४१२७०
$a_9 = \frac{1}{8}a_8$	०.००००२४८०१५९
$a_{10} = \frac{1}{9}a_9$	०.०००००२७५५७३
$a_{11} = \frac{1}{10}a_{10}$	०.००००००२७५५७
$a_{12} = \frac{1}{11}a_{11}$	०.०००००००२५०५
$a_{13} = \frac{1}{12}a_{12}$	०.००००००००२०९
$a_{14} = \frac{1}{13}a_{13}$	०.०००००००००१६
$a_{15} = \frac{1}{14}a_{14}$	०.००००००००००१
	२.७१८२८१८२८४६

हे सर्वधन शेवटील अंकापावेतो खरे आहे; सारांश श्रेणीचे सर्वधन या पुढील दोन अंकांचे मध्ये आहे;

२.७१८२८१८२८४५

आणि २.७१८२८१८२८४६

परंतु ते सर्वधन या दोहोंतून पहिल्यापेक्षा दुसरे अंकांचे अधिक अवळ आहे. या सर्वधनाची नियतता दाखविण्यासाठी  $e$  हे अक्षर कामांत घेतात; अथवा याप्रमाणे मांडितात;

$e = १ + १ + \frac{१}{२} + \frac{१}{२ \cdot ३} + \text{इत्यादि. } (= २.७१८२८१८२८४६ \text{ जवळ जवळ) } ७ \text{ वें पृष्ठ पहा.}$

वरची श्रेणी त्वरेने उतरत जाती असे ह्मणतात.

सिद्धांत.  $अ+ब+क+ इत्यादि$ , जेव्हां या श्रेणीचीं पदे परस्पर असा संबंध ठेवितात, कीं  $\frac{ब}{अ}, \frac{क}{ब}$ , इत्यादि हीं सर्व एकापेक्षां मोठीं असतात, अथवा कोणत्याहि सांगीतलेल्या पदानंतर अशीं वाढत जातात, तेव्हां ही श्रेणी नेहमी चढती आहे.

हा सिद्धांत वरचे सिद्धांतासारखा आहे, यामुळे याचा खरेपणा दाखवायास शिकणारावर सोंपितो.

सिद्धांत.  $अ-ब+क-इ+ इत्यादि$ , जेव्हां या श्रेणीचीं पदे अनियत घटत जातात, तेव्हां ती उतरती आहे; ह्मणजे, जेव्हां  $ब$  पेक्षां  $अ$ , आणि  $क$  पेक्षां  $ब$  इत्यादि मोठीं आहेत, आणि जेव्हां श्रेणीचे कांहीं पद कोणता कसाही लहान अपूर्णाक मनांत कल्पून घेतला त्यापेक्षां लहान आहे, तेव्हां ती उतरती आहे.

सिद्धांताचे संकेताप्रमाणें  $अ, ब, क, इ$ , इत्यादि कोणत्याहि श्रेणीचीं पदे उतरत जातात, असे असोत, तर

$$(अ-ब) + (ब-क) + (क-इ) + \text{इत्यादि}$$

ही उतरती श्रेणी असावी, कां कीं, पहिल्या दोन पदांची बेरीज  $अ+क$  आहे, पहिल्या तीन पदांची बेरीज  $अ-इ$  आहे, आणि याप्रमाणें पुढेही. आतां  $अ, ब, क, इ$ , इत्यादि पदे अनियत घटत जातात, तर  $अ-क, अ-इ$ , इत्यादि या श्रेणीचीं पदे वाढत वाढत जातात अशी आहेत, आणि त्या श्रेणीची नियतता  $अ$  आहे. यामुळे वरचे श्रेणीचीं एका आड एक-पदे घेऊन जी श्रेणी होती, तिची नियतता अपेक्षां लहान असावी. परंतु ती श्रेणी पुढीलप्रमाणें आहे,

$$अ-ब+क-इ+ इत्यादि.$$

यावरून सिद्धांत खरा आहे.

यावरून

$$१ - \frac{१}{२} + \frac{१}{३} - \frac{१}{४} + \text{इत्यादि.}$$

ही उतरती श्रेणी आहे हें कळतें, जिची नियतता १ पेक्षा लहान आहे. सिद्धांत. जर कोणतेंहि दिलेलें परिमाण प, या पुढील प्रमाणाचे कोणत्याहि श्रेणीपेक्षा मोठें असेल,

हणजे

$$\frac{व}{अ} \cdot \frac{क}{ब} \cdot \frac{इ}{क} \cdot \frac{क}{इ} \cdot \frac{ग}{फ} \text{ इत्यादि.}$$

तर

$$अ + बक्ष + कक्ष + इक्ष + फक्ष + गक्ष + \text{इत्यादि} \dots \dots \dots (अ)$$

जेव्हां  $\frac{१}{प}$  यापेक्षा क्ष लहान आहे, तेव्हां ही वरची श्रेणी उतरती आहे.

कांकीं वरची श्रेणी या पुढीलप्रमाणें आहे,

$$अ \left\{ १ + \frac{व}{अ} क्ष + \frac{क}{ब} \cdot \frac{व}{अ} \cdot क्ष^२ + \frac{इ}{क} \cdot \frac{क}{ब} \cdot \frac{व}{अ} \cdot क्ष^३ + \text{इत्यादि.} \right\}$$

आतां  $\frac{व}{अ}, \frac{क}{ब}$  इत्यादि यांपेक्षा प मोठा आहे, यामुळे  $\frac{व}{अ}, \frac{क}{ब}$  इत्यादि यांचे जागीं प मांडिला असतां वरचे श्रेणीची किंमत अधिक होती. हणून असें केल्यानें ती श्रेणी याप्रमाणें होती.

$$अ \left\{ १ + पक्ष + प^२क्ष + प^३क्ष + \text{इत्यादि.} \right\}$$

$$\text{अथवा } अ \left\{ १ + (पक्ष) + (पक्ष)^२ + (पक्ष)^३ + \text{इत्यादि.} \right\}$$

यांत जर १ पेक्षा पक्ष लहान असेल, अथवा,  $\frac{१}{प}$  यापेक्षा क्ष लहान असेल, तर २७६ पृष्ठाप्रमाणें ही वरची उतरती श्रेणी आहे. आणि त्याच कल्पनेवरून मुलची पद्धति अधिक उतरती असावी, कांकीं तिचीं पदे या वरचे श्रेणीचे पदांपेक्षा उत्तरोत्तर लहान आहेत.

कोणत्याहि श्रेणीचे पदांचे प्रमाणांतून कांहीं दिलेल्या प्रमाणानंतरचा प्रमाणाहून जर प मोठा असेल, तर जा पदांपासून तें प्रमाण होतें, त्यापुढें जेव्हां १ पेक्षा पक्ष लहान आहे, तेव्हां ती श्रेणी उतरती होती. हणून मनांत आण, कीं (अ) श्रेणीचें हजारवें पद आणि त्याचे पुढलीं पदे ही पुढील आहेत,

$$अक्ष^{१०००} + बक्ष^{१०००} + कक्ष^{१००१} + \text{इत्यादि.}$$

$$\text{अथवा } अक्ष^{१००} \left\{ १ + \frac{व}{अ} क्ष + \frac{क}{ब} \cdot \frac{व}{अ} क्ष^२ + \text{इत्यादि.} \right\}$$

तर, वरचा तर्काप्रमाणें जर  $\frac{व}{अ}, \frac{क}{ब}$ , इत्यादि प्रमाणापेक्षां जर प मोठा असेल, आणि जर  $\frac{१}{१}$  पेक्षां क्ष लहान असेल, तर वरची श्रेणी उतरती आहे.

उदाहरण, ही पुढील श्रेणी घे

$$१ + २क्ष + ३क्ष^२ + ४क्ष^३ + \text{इत्यादि.}$$

हिचीं प्रमाणें  $\frac{२}{१} \quad \frac{३}{२} \quad \frac{४}{३} \quad \frac{५}{४}$  इत्यादि.

यांत पहिल्याप्रमाणानंतरचा सर्व दुसऱ्या प्रमाणापेक्षां २ मोठे आहेत; या मुळें जर  $\frac{१}{२}$  पेक्षां क्ष लहान असेल, तर ही श्रेणी दुसऱ्यापदापासून उतरत जाती. शंभरावें पद आणि त्याचे पुढील पदे याप्रमाणें आहेत,

$$१०० क्ष^{९९} + १०१ क्ष^{१००} + १०२ क्ष^{१०१} + \text{इत्यादि.}$$

हिचीं प्रमाणें  $\frac{१०१}{१००} \quad \frac{१०२}{१०१} \quad \frac{१०३}{१०२}$  इत्यादि.

यांत पहिल्याप्रमाणाशिवाय सर्व दुसऱ्या प्रमाणापेक्षां  $\frac{१०१}{१००}$  हें प्रमाण मोठें आहे. यामुळें, जर  $१ \div \frac{१०१}{१००}$  अथवा  $\frac{१००}{१०१}$  पेक्षां क्ष लहान असेल, तर शंभराव्या पदापासून ही श्रेणी उतरत जाती. याच प्रमाणें दाखवितां येईल, कीं जा पदापासून १ पेक्षां क्ष लहान आहे, त्या पदापासून ही श्रेणी उतरत जाती, आणि जा पदापासून उतरण्याचा आरंभ होतो तें पद क्ष, पुरतेपणीं १ याचे जवळ केल्यानें, हवें तेवढें लांब नेतां येईल. पुढील प्रमाणें दुसरें उदाहरण घे,

$$१ + क्ष + \frac{क्ष^२}{२} + \frac{क्ष^३}{२ \cdot ३} + \frac{क्ष^४}{२ \cdot ३ \cdot ४} + \text{इत्यादि.}$$

हिचीं प्रमाणें  $१ \quad \frac{१}{२} \quad \frac{१}{३} \quad \frac{१}{४}$  इत्यादि.

हीं प्रमाणें उत्तरोत्तर अनियत घटत जातात, ह्यापून या श्रेणींत असें एक पद येईल, कीं त्या पदा पुढचीं सर्व पदे कोणत्याहि सांम्यीतलेल्या अतिलहान म अपूर्णाकापेक्षां लहान होतील. परंतु जर म हवा तेवढा लहान केला, तर  $\frac{१}{म}$  हवा तेवढा मोठा करितां येईल. यामुळें क्षची प्रत्येक किंमत कशीहि मोठी असली, तरी त्याचे किमतीविषयी ही श्रेणी उतरती आहे; परंतु क्ष जेवढा जेवढा अधिक मोठा घेतां येईल, त्याप्र-



माणें जा पदापासून श्रेणीचा उतरण्याचा आरंभ होतो, तें पद लांब जाईल.

पुढीलप्रमाणें तिसरें उदाहरण घे,

$$१ + २क्ष + २ \cdot ३क्ष^२ + २ \cdot ३ \cdot ४ क्ष^३ + \text{इत्यादि.}$$

हिचीं प्रमाणें २ ३ ४ ५ इत्यादि.

हीं प्रमाणें उत्तरोत्तर अनियत वाढत जातात, ह्मणून या सर्व पदापेक्षां मोठें असें कोणतेंहि परिमाण नाही. यामुळे, क्षला कोणतीहि किंमत देतां येत नाही, जिणेंकरून ही श्रेणी उतरती होईल. हा पुढील सिद्धांत वरप्रमाणें सोप्या रितीनें स्थापितां येईल.

सिद्धांत.  $\frac{ब}{अ} + \frac{क}{ब}$ , इत्यादि कोणत्याहि प्रमाणाहून प लहान असेल, तर

$$अ + बक्ष + कक्ष^२ + \text{इत्यादि.}$$

ही श्रेणी  $\frac{१}{३}$  या पेक्षां क्ष चे प्रत्येक मोठ्या किमतीविषयीं चढती आहे.

याच रितीनें जी श्रेणी मागील उदाहरणांत दाखविली, ती  $\frac{१}{३}$  पेक्षां मोठ्या अशा क्षचे प्रत्येक किमतीविषयीं, दुसऱ्यापदापासून चढती, आणि तीच  $\frac{१}{४}$  पेक्षां मोठ्या अशा क्षचे प्रत्येक किमतीविषयीं तिसऱ्यापदापासून चढती, आणि याप्रमाणें पुढेंहि; यावरून क्षला कोणत्याहि लहान अपूर्णाकाची किंमत दिल्यानें ही श्रेणी कोणत्याहि पदापासून चढती होणार नाही असा लहान अपूर्णाक नाही.

अशा तऱ्हेची चढती श्रेणी व्यवहार कामांत येत नाही; जी श्रेणी उतरती करितां येती, तिजपासून जीं साधारण अनुमानें निघतात, तीं अनुमानें सर्व श्रेण्यांस लावूं नये, हें सुचवायासाठीं मात्र या वरचा श्रेण्या घेतल्या आहेत.

यापुढें  $अ + बक्ष + कक्ष^२ + \text{इत्यादि}$  या श्रेणीविषयीं बोलणें, तर अर्थ हाच समजावा, कीं जा श्रेण्या चढत्या करितां येतील त्यांविषयीं मात्र बोलणें आहे; परंतु जर याचें उलटें सांगितलें असलें तर हा सांगितला अर्थ घेऊं नये. समळीं पदें धन आहेत असें मानितों.

सिद्धांत.  $अ + बक्ष + कक्ष^२$  या जातीचे सर्व श्रेण्यांत हा गुण आहे, ह्मणजे क्ष एवढा लहान घेतां येईल, कीं त्या श्रेणींतील कोणत्याहि पदा-

मध्ये त्या पदाचे पुढील सर्व पदांची बेरीज इच्छेप्रमाणे हव्या तेवढ्या वेळा जाईल.

उदाहरण, क्ष पुरतेपणीं लहान घेतला, तर कक्ष<sup>२</sup> हे पद इक्ष<sup>३</sup>+फक्ष<sup>३</sup>+ इत्यादि यांपेक्षां दहा हजार पट अधिक मोठे करितां येईल. क्षची अति मोठी किंमत दाखविण्यासाठीं क्ष, असें चिन्ह घे, जेणेकरून इ+फक्ष+ इत्यादि ही उतरती श्रेणी होती, आणि असे पक्षांत त्या पदांची बेरीज दाखविण्यासाठीं स घे. तर क्ष, पेक्षां क्षचा जा प्रत्येक किंमती लहान आहेत, त्या प्रत्येकांविषयीं इ+फक्ष+ इत्यादि ही पद्धति सपेक्षां लहान आहे. आतां कक्ष<sup>२</sup> यामध्ये इक्ष<sup>३</sup>+फक्ष<sup>३</sup>+ इत्यादि पदे कित्येक वेळा किंवा वेळेचे भाग वेळा जातात, ह्मणजे

$$\frac{\text{कक्ष}^2}{\text{इक्ष}^3+\text{फक्ष}^3+\text{इत्यादि}} \text{ अथवा } \frac{\text{क}}{\text{इक्ष}+\text{फक्ष}^2+\text{इत्यादि}} \text{ अथवा } \frac{\text{क}}{\text{क्ष}(\text{इ}+\text{फक्ष}+\text{इत्यादि})}$$

क्ष, पेक्षां क्ष लहान घे, ह्मणून, यावरून इ+फक्ष+ इत्यादि पेक्षां स मोठा आहे, अथवा

$$\frac{\text{क}}{\text{क्ष}(\text{इ}+\text{फक्ष}+\text{इत्यादि})} \text{ अथवा } \frac{\text{कक्ष}^2}{\text{इक्ष}^3+\text{फक्ष}^3+\text{इत्यादि}} \text{ यापेक्षां } \frac{\text{क}}{\text{क्षस}} \text{ लहान आहे}$$

आतां क आणि स हीं दोन नियमित परिमाणे आहेत, ह्मणून क्ष एवढा लहान घेतां येईल, कीं इच्छेप्रमाणे क:क्षस हवा तेवढा मोठा करितां येईल; परंतु क:क्षस पेक्षां कक्ष<sup>२</sup> ÷ (इक्ष<sup>३</sup>+फक्ष<sup>३</sup>+ इत्यादि) अधिक मोठी आहे, तर ही इच्छेप्रमाणे हवी तेवढी मोठी करितां येईल. यावरून हा सिद्धांत स्थापिला जातो.

उदाहरण.

$$१+२क्ष+३क्ष^2+४क्ष^3+५क्ष^4+\text{इत्यादि}$$

या श्रेणींत क्ष किती लहान असावा, असा कीं तिचे चवथे पदामध्ये त्याचे पुढील सगळ्या पदांची बेरीज, थोडक्या तरी १००० वेळा जाईल.

या श्रेणीतील चवथ्या पदाचे पुढलीं सर्व पदे याप्रमाणे मांडितात;

$$५क्ष^4 \left\{ १ + \frac{६}{५}क्ष + \frac{९}{५} \cdot \frac{६}{५}क्ष^2 + \text{इत्यादि} \right\} \dots \dots \dots (अ)$$

आणि  $\frac{६}{५}$  हे प्रमाण त्याचे पुढील कोणत्याही प्रमाणापेक्षां मोठे आहे; यामुळे ही वरची श्रेणी फेर करून पुढीलप्रमाणे मांडिली असता वाढत जाते.

$$५क्ष^३ \{ १ + \frac{६}{५}क्ष + \frac{६}{५} \cdot \frac{६}{५}क्ष^२ + \text{इत्यादि.} \} \text{ अथवा } \frac{५क्ष^३}{१ - \frac{६}{५}क्ष} \dots (ब)$$

३०९ पृष्ठ पहा. आतां क्ष असा घेतला पाहिजे, कीं

$$१००० \frac{५क्ष^३}{१ - \frac{६}{५}क्ष} \text{ यापेक्षां } ४क्ष^३ \text{ हे पद मोठे आहे.}$$

$$(x) \left( \frac{१ - \frac{६}{५}क्ष}{४क्ष^३} \right), २५० \times ५क्ष \text{ अथवा } १२५० \text{ क्ष यापेक्षां } १ - \frac{६}{५}क्ष$$

खचित मोठे असावे, जर  $१२५०$  क्षपेक्षां  $१-२$  क्ष मोठे आहेत, अथवा जर  $१२५२$  क्षपेक्षां  $१$  मोठा आहे, अथवा जर क्षपेक्षां  $\frac{१}{१२५२}$  मोठे आहेत, तर वरची गोष्ट निश्चयें खरी आहे. या पक्षांत  $१०००$  वेळा (ब) पेक्षां  $४क्ष^३$  मोठे आहेत; तर  $१०००$  वेळा (अ) पेक्षां अधिक मोठे आहेत.

सिद्धांत.

$अ_० + अ_१क्ष + अ_२क्ष^२ + \text{इत्यादि}$  आणि  $ब_० + ब_१क्ष + ब_२क्ष^२ + \text{इत्यादि}$  या दोन श्रेण्या जर क्षचा प्रत्येक नियमित किमतीविषयी सर्वदां बरोबर असतील, तर  $अ_० = ब_०$ ,  $अ_१ = ब_१$ ,  $अ_२ = ब_२$ , इत्यादि असे होईल, अथवा या दोन श्रेण्या सर्वांशी एकरूप होतील.

या दोन श्रेण्या  $अ_० + अ$  आणि  $ब_० + ब$  या रूपाचा आहेत अशी कल्पना कर, आतांच जें वर दाखविलें त्यावरून  $अ$  आणि  $ब$ , हे  $अ_०$  आणि  $ब_०$  यांचा कोणत्याही म भागापेक्षां लहान करितां येतील. शक्य असेल, तर  $अ_०$  आणि  $ब_०$  हे दोन निरनिराळे अंक आहेत, आणि  $अ_० = ब_० + त$  आहे अशी कल्पना कर. आतां सिद्धांताचे संकेताप्रमाणें दोन श्रेण्या सर्वदां बरोबर आहेत, तर यावरून  $अ_० + अ = ब_० + ब$ , अथवा  $ब_० + त + अ = ब_० + ब$ ; ह्याजें  $त = ब - अ$ . परंतु  $अ_०$  आणि  $ब_०$  हीं दोन्ही नियमित परिमाणें आहेत, यामुळे त्यांची वजाबाकी ही नियमित परिमाण आहे; आणि जीं प्रत्येक परिमाणें, हवीं तेवढीं लहान करितां येतील, त्या दोन परिमाणांचा वजाबाकी बरोबर त हें नियमित परि-

माण वरचा कल्पनेवरून आहे ही गोष्ट खोटी. यावरून  $a_0 = b_0$ .  
 +त असे होण्यास अशक्य; आणि तसेच तर्क रितीने दाखवितां येते,  
 कीं  $a_0 = b_0$  -त हेहि होण्यास अशक्य; यामुळे  $a_0 = b_0$ . हीं दोन  
 बरोबरीचीं पदे वरचे दोन्ही श्रेण्यांतून वजा करून बरोबरीचा वजावा-  
 क्या क्षनें भाग, तर याप्रमाणें होईल,

$a_1 + a_2 \text{ क्ष} + a_3 \text{ क्ष}^2 + \text{इत्यादि}$  आणि  $b_1 + b_2 \text{ क्ष} + b_3 \text{ क्ष}^2 + \text{इत्यादि}$   
 सर्वदां बरोबर आहेत;

वरची गोष्ट सिद्ध केल्याप्रमाणें  $a_1 = b_1$  असें निघते; बरोबरीचीं पदे  
 पुनः वरप्रमाणें वजा करून बाक्यांस क्षनें भागून  $a_2 = b_2$  असें निघेल  
 आणि याप्रमाणें पुढेहि. यावरून वरचा दोन श्रेण्यांतून एकीमध्ये एक  
 किंवा अधिक पदे कमी असतील, तर दुसऱ्या श्रेणीमध्ये तितकींच क-  
 मी असावीं; ह्मणजे, जर  $a - \text{क्ष}$  ही  $a_0 + a_1 \text{ क्ष} + a_2 \text{ क्ष}^2$  यांचे सर्वदां  
 बरोबर आहे, तर  $a = a_0$ ,  $-1 = a_1$ ,  $0 = a_2$ ,  $0 = a_3$  इत्यादि.

श्रेणीमध्ये  $\text{क्ष} = 0$  केलें जाईल, आणि ती श्रेणी तिचे पदांचे सं-  
 ख्यांविषयीं नियत आहे. असें कल्पून त्याच रितीनें साधारण चा-  
 लीचीं बीजगणितरूपाचीं उत्तरे घेतलीं जातील, हें मात्र वरची  
 कृती दाखविती. ह्मणजे, जर  $a_0 + a_1 \text{ क्ष} + \text{इत्यादि} = b_0 + b_1 \text{ क्ष}$   
 + इत्यादि, असें नेहेमी असेल, तर  $\text{क्ष} = 0$  असें करण्याचा परि-  
 णाम ह्मणजे,  $a_0 = b_0$  हें खरें आहे असें वर सिद्ध झालें. परंतु  
 पूर्वी पहाण्यांत आले, कीं जेव्हां  $\text{क्ष} = 0$  तेव्हां  $p = क$  असें ह्मण-  
 ण्यास योग्य नाही, परंतु जेथें  $\text{क्ष}$  पुरतेपणीं लहान केला जाईल,  
 अथवा  $0$  च जवळ केला जाईल अशे पक्षांत मात्र असें झटलें  
 जाईल, कीं इच्छेप्रमाणें  $p$ चे हवा तितका जवळ क्क आणिला जा-  
 ईल, जी अडचण नाहीशी केली ती या पुढीलप्रमाणें आहे.  $1 +$   
 $2\text{क्ष} + 2 \cdot 3\text{क्ष}^2 + \text{इत्यादि}$  या श्रेणींत असे पाहिले कीं  $\text{क्ष}$  कितीहि ल-  
 हान केला, तरी पदांचें सर्वधन इच्छेप्रमाणें हवें तेवढें मोठें केलें  
 जाईल. यावरून या पुढीलप्रमाणें जेव्हां  $\text{क्ष} = 0$ , तेव्हां वरची  
 श्रेणी  $1 + 0 + 0 + \text{इत्यादि}$  अथवा  $1$  असें ह्मणण्यास योग्य आहे कीं  
 काय! जर पदांची संख्या सात असली, तर योग्य रितीनें होय  
 असें ह्मणण्यास कांही भ्रम नाही; परंतु जेव्हां पदांची संख्या अ-

नंत आहे, तेव्हां जें पूर्वी सर्व सांगितलें त्यावरून कांहीं उत्तर दे-  
ववत नाहीं. जी श्रेणी उतरती केली जाईल, तिजवर मात्र वर-  
ची सिद्धता लागू होत्ये, ही गोष्ट शिकाणरानें मनांत धरावी.

वरची गोष्ट सिद्ध करायलास याप्रमाणें ह्मणण्याची चाल आहे,  
कीं जेव्हां वरचा दोन श्रेण्या बरोबर आहेत, आणि जेव्हां  $\text{क्ष} = ०$   
तेव्हांहि त्या श्रेण्या बरोबर आहेत, आणि यामुळें  $\text{अ}_० = \text{ब}_०$ . आ-  
णि याप्रमाणें पुढेंहि. या पक्षांत असें ह्मणण्याची गरज नाही, आ-  
णि हा पुढील सिद्धांत स्थापिला गेला असें ह्मणतां येईल. जेव्हां  
 $\text{क्ष}$  नियमित असून जा श्रेण्या उतरत्या केल्या जाताल, त्या जर  
नेहेमी बरोबर आहेत, तर जेव्हां  $\text{क्ष} = ०$  असेल, तरीहि त्या नेहेमी  
बरोबर असतील.

बहुतेक श्रेण्यांचे सर्वधनाची नियतता काढण्याची रीति या पुढील  
कित्येक उदाहरणांपासून समजांत येईल. पहिल्यानें, याप्रमाणें घे,

$$प = १ + \text{क्ष} + \text{क्ष}^२ + \text{क्ष}^३ + \text{क्ष}^४ + \text{इत्यादि}$$

यांत प विषयीं एक नियमित बीजगणितानुरूप पद्धति काढण्याची इच्छा  
हि. स्पष्ट आहे, कीं

$$१ + \text{क्ष} + \text{क्ष}^२ + \text{इत्यादि अनंत पावेतों} = १ + \text{क्ष} \{ १ + \text{क्ष} + \text{क्ष}^२ + \text{इत्यादि अनंत पावेतों} \}$$

$$\text{ह्मणजे } प = १ + \text{क्षप} \quad \text{अथवा } प = \frac{१}{१ - \text{क्ष}}$$

असें उत्तर पूर्वी निघालें. आतां, याप्रमाणें घे,

$$प = १ + २\text{क्ष} + ३\text{क्ष}^२ + ४\text{क्ष}^३ + \text{इत्यादि}$$

$$\frac{प-१}{\text{क्ष}} = २ + ३\text{क्ष} + ४\text{क्ष}^२ + ५\text{क्ष}^३ + \text{इत्यादि}$$

$$\frac{प-१}{\text{क्ष}} - प = १ + \text{क्ष} + \text{क्ष}^२ + \text{क्ष}^३ + \text{इत्यादि} = \frac{१}{१ - \text{क्ष}}$$

$$\text{यावरून, } प \left\{ \frac{१}{\text{क्ष}} - १ \right\} = \frac{१}{१ - \text{क्ष}} + \frac{१}{\text{क्ष}} = \frac{१}{\text{क्ष}} \cdot \frac{१}{१ - \text{क्ष}}$$

अथवा

$$प = \frac{१}{(१ - \text{क्ष})^२}$$

आतां याप्रमाणें घे,  $प = १ + ३\text{क्ष} + ५\text{क्ष}^२ + ७\text{क्ष}^३ + \text{इत्यादि}$

$$\frac{p-1}{k} = 2 + 4k + 6k^2 + 8k^3 + \text{इत्यादि}$$

$$\frac{p-1}{k} - p = 2 + 2k + 2k^2 + 2k^3 + \text{इत्यादि} = \frac{2}{1-k}$$

यावरून

$$p = \frac{1+k}{(1-k)^2}$$

आतां, या प्रमाणें घे,  $p = 1 + 4k + 6k^2 + 8k^3 + \text{इत्यादि}$ 

$$\frac{p-1}{k} = 4 + 6k + 8k^2 + 10k^3 + \text{इत्यादि}$$

$$\frac{p-1}{k} - p = 3 + 4k + 6k^2 + 8k^3 + \text{इत्यादि}$$

$$\therefore \left( \frac{p-1}{k} - p \right) k + 1 = 1 + 3k + 4k^2 + 6k^3 + 8k^4 + \text{इत्यादि} = \frac{1+k}{(1-k)^2}$$

यावरून

$$p = \frac{1+k}{(1-k)^2}$$

वर लिहिलेल्या श्रेण्यांचे पदांचे नियमित संख्यांचे सर्वधनाविषयी अधिक सरल बीजगणितरूप पद्धती काढण्याकरितां, वरचे सारिखाच रीति लावितां येईल. ह्मणजे या पुढीलप्रमाणें घे,

$$p = 1 + 2k + 3k^2 + \dots + (n-1)k^{n-2} + nk^{n-1}$$

$$\frac{p-1}{k} = 2 + 3k + 4k^2 + \dots + nk^{n-2}$$

$$\frac{p-1}{k} - p = 1 + k + k^2 + \dots + k^{n-2} - nk^{n-1}$$

$$\begin{aligned} १९८ \text{ पृष्ठाप्रमाणें, } &= \frac{1-k^{n-1}}{1-k} - nk^{n-1} = \frac{1-(n+1)k^{n-1} + nk^n}{1-k} \\ &= \frac{nk^{n+1} - (n+1)k^n + 1}{(1-k)^2} \end{aligned}$$

हें पुढील उदाहरण शिकणारानें सिद्ध करून दाखवावें;

$$1 + 3k + 4k^2 + \dots + (2n-1)k^{n-1} = \frac{2n-1k^{n+1} - 2n+1k^n + k^{n+1}}{(1-k)^2}$$

जी गोष्ट बहुतकरून तपासावी लागती, ती वरचे गोष्टीचे उलटी आहे; ह्मणजे श्रेणीचे पदांपासून सर्वधन काढावें असें नाहीं, परंतु, पद्धति सांगीतली असतां, जा श्रेणीचें सर्वधन ती पद्धति आहे त्या श्रेणीस काढण्याचें अथवा त्यांतल्या कोणत्याहि एक अक्षराचे घाताप्रमाणें त्या श्रेणीचा विस्तार करावयाचा आहे. मनांत आण कीं क्षचे घाता-

विषयी त्याचे गुणक इत्यादि सुद्धा श्रेणीचीं पदे काढण्याची इच्छा आहे, जी श्रेणी उत्तरती असून सर्व पक्षांत  $(१+क्ष) \div (१-क्ष)^२$  याचे बरोबर होईल. मनांत आण, कीं इच्छिलेली श्रेणी याप्रमाणें आहे,  $अ_० + अ_१क्ष + अ_२क्ष^२ + अ_३क्ष^३ +$  इत्यादि, तर याप्रमाणें होईल,

$$\frac{(१+क्ष)}{(१-क्ष)^२} = अ_० + अ_१क्ष + अ_२क्ष^२ + अ_३क्ष^३ + \text{इत्यादि}$$

वरचे समीकरणाचे दोन बाजूंस  $(१-क्ष)^२$  अथवा  $१-२क्ष+क्ष^२$  यांनी गुण, तर

$$\begin{aligned} १+क्ष &= \left\{ \begin{array}{l} अ_० + अ_१क्ष + अ_२क्ष^२ + अ_३क्ष^३ + \text{इत्यादि} \\ -२अ_०क्ष - २अ_१क्ष^२ - २अ_२क्ष^३ - \text{इत्यादि} \\ + अ_०क्ष^२ + अ_१क्ष^३ + \text{इत्यादि} \end{array} \right\} \\ &= अ_० + (अ_१ - २अ_०)क्ष + (अ_२ - २अ_१ + अ_०)क्ष^२ + \text{इत्यादि} \end{aligned}$$

या समीकरणांत क्षचे प्रत्येक किमतीविषयीं दोन्ही बाजू बरोबर आहेत, ह्मणून ३१७ वे पृष्ठावरचा सिद्धांतप्रमाणें हें पुढील होतें;

$$\begin{array}{ll} अ_० = १ & अ_१ - २अ_० = १ \text{ अथवा } अ_१ = २ \\ अ_२ - २अ_१ + अ_० = ० & \text{अथवा } अ_२ = ५ \\ अ_३ - २अ_२ + अ_१ = ० & \text{अथवा } अ_३ = ७ \\ \text{इत्यादि.} & \text{इत्यादि.} \end{array}$$

ह्मणून श्रेणी याप्रमाणें होईल,  $१ + २क्ष + ५क्ष^२ + ७क्ष^३ +$  इत्यादि हें पूर्वी सांगितल्याप्रमाणें आहे.

या श्रेणीचें पहिलें पद लागलेंच काढतां येतें; कां कीं क्ष = ०, करून उत्तरे कामांत आणितां येतात असें पूर्वी सिद्ध झालें, आणि जेव्हां क्ष = ० होतें तेव्हां  $(१+क्ष) \div (१-क्ष)^२$  या बरोबर १ उत्पन्न होतो आणि श्रेणीचें रूप अ\_० होतें, तर  $अ_० = १$ .

$(१-क्ष^२) \div (१-क्ष)$  यास क्षचे घातांविषयीं श्रेणीचें रूप विस्तार करून मांडिलें असतां काय होईल असा प्रश्न करितों? वरप्रमाणें या श्रेणीचें पहिलें पद १ आहे; तर याप्रमाणें कल्पना कर, कीं



$$\frac{1-k^2}{1-k} = 1 + a_1 k + a_2 k^2 + a_3 k^3 + a_4 k^4 + \text{इत्यादि}$$

$$1-k^2 = 1 + a_1 k + a_2 k^2 + a_3 k^3 + a_4 k^4 + a_5 k^5 + \text{इत्यादि}$$

$$-k - a_1 k^2 - a_2 k^3 - a_3 k^4 - a_4 k^5 + \text{इत्यादि.}$$

पहिल्या बाजूस  $k$  चा पहिला घात नाही, तर  $a_1 - 1 = 0$ , अथवा  $a_1 = 1$  असे होईल. यासारखेच  $a_2 - a_1 = 0$ , अथवा  $a_2 = a_1 = 1$ ;  $a_3 - a_2 = 0$ , अथवा  $a_3 = 1$ . परंतु पहिल्या बाजूस  $k^2$  याचा गुणक  $-1$  आहे, यामुळे  $a_4 - a_3 = -1$  अथवा  $a_4 - 1 = -1$ , ह्मणजे  $a_4 = 0$ ; पुनः,  $a_5 - a_4 = 0$  अथवा  $a_5 = 0$ ,  $a_6 - a_5 = 0$ , अथवा  $a_6 = 0$  आणि याप्रमाणे पुढेहि. यावरून श्रेणी या पुढीलप्रमाणे आहे,

$$1 + k + k^2 + k^3 + 0 \times k^4 + 0 \times k^5 + \text{इत्यादि}$$

$$\text{अथवा } 1 + k + k^2 + k^3$$

असे उत्तर केवळ सरळ भागाकाराने, अथवा १९७ पृष्ठावरचे रितीप्रमाणे निघते. ह्मणजे, असे दिसते, कीं जें परिमाण नियमित आहे तें दाखविण्यासाठीं जेव्हां एकादि अनंत श्रेणी घेतों, तेव्हां जें पद नियमित परिमाणांत नसतें त्या प्रत्येक पदाचा गुणक ० आहे, असे श्रेणीचा गुणक काढण्याचा रितीने दाखवितां येईल.

पुनः,  $1 \div 1 + k^2$  याचा विस्तार करून दाखविण्यासाठीं पुढीलप्रमाणे घे,

$$\frac{1}{1+k^2} = a_0 + a_1 k + a_2 k^2 + a_3 k^3 + \text{इत्यादि.}$$

वरचे कृतीवरून या पुढीलप्रमाणे होईल,

$$a_0 = 1 \quad a_1 + a_0 = 0 \text{ अथवा } a_1 = -1 \quad a_2 + a_1 = 0 \text{ अथवा } a_2 = 1$$

$$a_3 = 0 \quad a_4 + a_3 = 0 \text{ अथवा } a_4 = 0 \quad a_5 + a_4 = 0 \text{ अथवा } a_5 = 0$$

ह्मणून श्रेणी याप्रमाणे होईल,

$$1 + 0 \times k - k^1 + 0 \times k^2 + k^3 + 0 \times k^4 \text{ इत्यादि.}$$

अथवा

$$1 - k^2 + k^4 - k^6 + \text{इत्यादि.}$$

जाचा दोन बाजू गुणकाचे किमतीविषयी कोणत्याहि कल्पनेने एक-



रूप करवत नाही, असें एक समीकरण जर वरचे कृतीवरून निघतें, तर त्यावरून असें कळतें, कीं दिलेल्या पद्धतीस सांगीतल्या श्रेणीचें रूप देतां येत नाही. जर  $1 \div (1+k)$  क्ष यास श्रेणीचें रूप देण्यास या पुढीलप्रमाणें घेतलें ह्मणजे

$$\frac{1}{k(1+k)} = a_0 + a_1 k + a_2 k^2 + a_3 k^3 + \text{इत्यादि}$$

तर या पुढीलप्रमाणें निघेल,

$$1 = a_0 k + (a_1 + a_0) k^2 + (a_2 + a_1) k^3 + \text{इत्यादि}$$

कशीहि कल्पना केली तरी या दोन बाजू सारख्या करितां येत नाही; कां कीं १ याचे बरोबर होईल असें दुसऱ्या बाजूस क्षचे संबंधाचून कोणतेंहि पद नाही. सारांश याप्रमाणें निघेल,

$$\frac{1}{1+k} = 1 - k + k^2 - k^3 + \text{इत्यादि}$$

$$(\div) \text{ क्ष, } \frac{1}{k(1+k)} = \frac{1}{k} - 1 + k - k^2 + \text{इत्यादि}$$

ह्मणून या पक्षांत क्ष<sup>-1</sup>, असें ऋण घातप्रकाशक चिन्ह आणिल्याशिवाय, या अपूर्ण पद्धतीस क्षचे घन आणि पूर्ण घातांचे सारिणीचें रूप देतां येत नाही.

अभ्यासासाठीं ही पुढील उदाहरणें दिली आहेत;

१. जर  $p = a_0 + a_1 k + a_2 k^2 + \text{इत्यादि}$  तर

$$\frac{p}{1-k} = a_0 + (a_0 + a_1) k + (a_0 + a_1 + a_2) k^2 + \text{इत्यादि असें होईल.}$$

आणि  $\frac{p}{1+k} = a_0 + (a_1 - a_0) k + (a_2 - a_1 + a_0) k^2 + \text{इत्यादि असें होईल.}$

$$२. \frac{1}{1+k+k^2} = 1 - k + k^2 - k^3 + k^4 - k^5 + \text{इत्यादि.}$$

$$३. \frac{1+k}{k+k^2} = \frac{1}{k} - \left(\frac{1}{k^2} - 1\right) k + \left(\frac{1}{k^3} - \frac{1}{k}\right) k^2 - \text{इत्यादि.}$$

$$४. \frac{m+nk}{m+k^2} = \frac{m}{k} - \left(\frac{m}{k^2} - \frac{n}{k}\right) k + \left(\frac{m}{k^3} - \frac{kn}{k^2}\right) k^2 - \text{इत्यादि.}$$

## नववा अध्याय.

अंकगणितांतील बरोबरी शब्दार्थाहून भिन्न, अशा बीजगणितांतील

बरोबरी शब्दाचे अर्थविवरणी.

१३९ पृष्ठावर, शब्दांचे विस्तारामध्ये, असे सांगितले, की कोणत्याही दोन पद्धतींतून एक दुसरीचे जागीं चुकीवांचून मांडितां येईल त्या ठिकाणीं बरोबर हा शब्द लावायाजोगा आहे असे मानितां येतें. यापूर्वी धन किंवा ऋण अशा नियमित बीजगणितरूप परिमाणास मात्र हा विस्तार लागू केला; पद्धतीचे परिमितीचा निश्चय अंकगणितरूप किमतीवरून होतो, आणि समोरासमोरचे संबंधांतून कोणता सांगायाचा मनांत योजिला आहे हें मात्र बरोबरीचें चिन्ह दर्शवितें. आतां बरोबर हा शब्द, अथवा त्याचें चिन्ह = याचा विचार करितों, आणि त्याचा व्याख्यानापासून जो अर्थ होईल त्या अर्थाहून अधिक विस्तीर्ण अर्थानें त्याचा विचार करित नाहीं, परंतु जा अर्थानें पूर्वी तो शब्द कामांत घेतला त्याहून विस्तीर्ण अर्थानें त्याचा विचार करितों.

जेव्हां दोन परिमाणांतून एक परिमाण दुसऱ्याचे जागीं चुकीवांचून मांडितां येईल, तेव्हां तीं दोन परिमाणें बरोबर आहेत असें ह्मणतात. या व्याख्यानाचा अभिप्राय या पुढील प्रश्नाचे उत्तरांत आहे, चूक ह्मणजे काय? उत्तर हेंच आहे, कीं जेणेंकरून विरुद्ध उत्तरें निघतात, अथवा जेणेंकरून शुद्ध रीतीनें कृति करित असतां विरुद्ध उत्तरें निघतात, तिचें नांव चूक.

जेव्हां दोन उत्तरें समजायाजोगीं आहेत अथवा त्यांपासून अर्थ निघण्यास योग्य आहे, असें असतांही जर तीं दोन्ही परस्पर मिळत नाहीं, तर तीं उत्तरें विरुद्ध आहेत; परंतु यांतून एक किंवा दोनही समजायाजोगीं नसतील, या कारणावरूनच केवळ तीं उत्तरें विरुद्ध आहेत असें

ह्मणवत नाही. कां कीं जेव्हां प्रतिज्ञेचा कोणत्याहि भागाचा अर्थ ठाऊक नसतो, तेव्हां ती खरी किंवा खोटी आहे हें सांगवत नाही. उदाहरण,  $\frac{1}{2}$  पृष्ठावरील  $\frac{1}{2}$  हा पद्धति तिचे मागील विषयाशीं कांहीं विरुद्ध नव्हती, कां कीं  $\frac{1}{2}$  यास कांहीं पूर्वी अर्थ नव्हता. असा निश्चय झाल्यानंतर त्याचे पूर्वीचे मूल कारणापासून जें कांहीं निघण्यास शक्य होतें त्याशीं विरुद्ध न होई असा अर्थ द्यावा हा अभिप्राय होता.

वर दाखविलें गेलें, कीं जर एकमापेक्षां क्ष कमी असेल, तर  $१ + क्ष + क्ष^२ +$  इत्यादि याचे पदांचे बेरिजेपासून उत्तरोत्तर  $\frac{१}{१-क्ष}$  याचे अधिक जवळ उत्तरें निघतील, तथापि अशा कृतीपासून तीं उत्तरें अगदी त्याचे बरोबर होणार नाही. यावरून या पुढील समीकरणांत  $=$  हें चिन्ह कामांत घेतलें.

$$\frac{१}{१-क्ष} = १ + क्ष + क्ष^२ + क्ष^३ + \text{इत्यादि अनंत पावेतों.}$$

या समीकरणाचे दुसऱ्ये बाजूचीं पुरतेपणीं पदें घेतलीं, तर अंकगणितानुरूप बोलण्याप्रमाणें, त्याचा दोन बाजू हव्या तेवढ्या जवळ जवळ बरोबर करितां येतील. बीजगणितानुरूप बोलण्याप्रमाणें, वरचा दोन बाजू अगदी खऱ्या आहेत असें मानितां येईल; परंतु दुसऱ्या बाजूचीं सर्व पदें मांडिलेलीं असलीं किंवा तीं तेथें आहेत अशीं कल्पिलेलीं असलीं, तरी तीं त्यांत आहेत असें मानितां येईल. या कल्पनेवरून मात्र वरचे समीकरण खरें आहे, परंतु ही कल्पना अंकगणितरूपानें अशक्य आहे, हें लक्षांत ठेविलें पाहिजे. उदाहरण, समीकरणाची पहिली बाजू  $१ - क्ष^३$  यांणीं गुणून त्याचा गुणाकार  $१ + क्ष$  होतो; त्याच परिमाणानें दुसरी बाजू गुणिली असतां गुणाकार या पुढीलप्रमाणें होतो,

$$\left\{ \begin{array}{l} १ + क्ष + क्ष^२ + क्ष^३ + क्ष^४ + क्ष^५ + \text{इत्यादि अनंत पावेतों.} \\ - क्ष^३ - क्ष^४ - क्ष^५ - क्ष^६ - \text{इत्यादि अनंत पावेतों.} \end{array} \right.$$

$$\text{अथवा } १ + क्ष + ० + ० + ० + ० + \text{इत्यादि अनंत पावेतों.}$$

यांत प्रत्येक पुढलें पद ० होईल, हें पाहिजे तर सिद्ध केलें जाईल; श्रेणीचें प्रत्येक पद प्रत्यक्ष तपासून पहाण्यास अशक्य, ह्मणून अशानें सिद्ध होत नाही, परंतु श्रेणीचे जे नेम ठाऊक आहेत, त्यांचे अनुमानावरून सिद्ध होतें.  $क्ष^म \times क्ष^न = क्ष^{म+न}$  हें दाखवितां येतें, याचे प्रत्येक पक्ष पहाण्यास

अशक्य, ह्मणून अशानें दाखवितां येत नाही, परंतु  $\kappa^n$  याचा अर्थ ठाऊक आहे ह्मणून त्यावरून दाखवितां येतें.

जर अंकगणितरूपानें चालून, हवीं तितकीं पुष्कळ पदे घेतलीं, ह्मणजे  $\kappa^n$  पर्यंत घेतलीं, तर या पुढीलप्रमाणें होईल,

$$\begin{aligned} & (1 + \kappa + \kappa^2 + \dots + \kappa^{n-1} + \kappa^n) \times (1 - \kappa)^2 \\ &= \begin{cases} 1 + \kappa + \kappa^2 + \kappa^3 + \dots + \kappa^{n-1} + \kappa^n \\ \quad - \kappa^2 - \kappa^3 - \dots + \kappa^{n-1} - \kappa^n - \kappa^{n+1} - \kappa^{n+2} \end{cases} \\ &= 1 + \kappa - \kappa^{n-1} - \kappa^{n+2} \end{aligned}$$

यांत १ पेक्षां  $\kappa$  कमी आहे, तर न इतका मोठा घेतां येईल, कीं इच्छेप्रमाणें  $\kappa^{n+1}$  आणि  $\kappa^{n+2}$  हवे तेवढे लहान होतील. या ठिकाणीं बीजगणित रूपाची बरोबरी आहे, ती अंकगणितरूपाचे बरोबरीचे हवी तेवढी जवळ जवळ होईल.

आतां अशी कल्पना कर, कीं १ पेक्षां  $\kappa$  मोठा आहे; ह्मणजे  $\kappa=2$ , असें घे, तर

$$1 + \kappa + \kappa^2 + \kappa^3 + \dots \text{ इत्यादि अनंत पावेतों }$$

ही श्रेणी, गणितानुरूप भाषेप्रमाणें अनंत आहे, कांकीं  $1+2+4+8+\dots$  इत्यादि यांची बेरीज केल्यानें जी परिमिती येईल, तीस नियतता नाही. तर वरची श्रेणी आणि  $\frac{\kappa}{\kappa-1}$  या दोहोंमध्ये बीजगणितरूप बरोबरी आहे असें खचित् ह्मणावें कीं काय ?  $\frac{\kappa}{\kappa-1}$  इत्यादि पृष्ठांचे गोष्टीवरून असें ह्मणण्यास योग्य नाही, कां कीं  $\frac{\kappa}{\kappa-1}$  याची अंकगणितरूपानें गणना होत नाही, ही गोष्ट कशी स्पष्ट करावी हें जरी तेथें दाखविलें, तथापि त्या पासून त्याचे उलटे विषयाचा बोध होत नाही, ह्मणजे जें कांहीं अंक गणित रूपानें गणलें जात नाही, त्यास  $\frac{\kappa}{\kappa-1}$  याणें दर्शवायास योग्य आहे. तर वरचा श्रेणीचा योग्य बीज गणितरूप दर्शक काय आहे ? कांहीं दर्शक असेल, तर त्यास दाखविण्यासाठीं प घे; आतां वरचे श्रेणीचें रूप या पुढील प्रमाणें आहे,

$$1 + \kappa \{ 1 + \kappa + \kappa^2 + \dots \text{ इत्यादि अनंत पावेतों} \}$$

जर प याचे जागीं  $1 + \kappa$  प मांडितां येत नाही, तर वरची पद्धती दा-

$$प = १ + क्ष प जापासून प = \frac{१}{१-क्ष} येई असें,$$

जेव्हां १ पेक्षा क्ष कमी होता तेव्हां हेंच उत्तर निघालें होतें. आणि मागील पृष्ठाचे रितीप्रमाणें हेंहि दाखवितां येईल, कीं  $\frac{१}{१-क्ष}$  यांशीं किंवा  $१ + क्ष + क्ष^२ +$  इत्यादि यांशीं कशीहि बीजगणितरूप कृति केली, तरी दोहोंपासून सारखेंच उत्तर निघतें; खरें झटलें असतां, बीजगणितरूप गुणाकार कृतींत, जीं परिमाणें कामांत आणितात तीं धन असावीं असा कांहीं संकेत नाहीं, झणून जा पक्षांत १ पेक्षा क्ष मोठा आहे, त्या पक्षास मागील पृष्ठांत जी कृति कामांत आणिली ती बरोबर लागू होती. परंतु मागील पृष्ठाप्रमाणें या पक्षां अंकगणितरूपाची बरोबरी होत नाहीं, परंतु त्याचे केवळ उलटें घडतें; कां कीं जसजसा न वाढत जातो, तसे क्ष<sup>न+१</sup> आणि क्ष<sup>न+२</sup> हे घटण्याचे जागीं अधिक अधिक वाढत जातात.

३२० इत्यादि पृष्ठांवर बीजगणितरूप परिमाणांचा विस्तार करण्याची रीति सांगितली, त्यांत क्ष उतरत्ये श्रेणीचे नियततें असावा असें अगत्य नाहीं; परंतु ती कृति सर्व पक्षांसहि निश्चित लागू होती. उदाहरण, जर  $\frac{१}{१+क्ष}$  याचा विस्तार करायाचा असेल, तर हें विचारितों, कीं  $\frac{१}{१+क्ष} + \frac{१}{१+क्ष} +$  इत्यादि. या रूपाचा कोणकोणत्या पद्धती  $\frac{१}{१+क्ष}$  याचे बरोबर होतील.  $\frac{१}{१+क्ष}$  यास  $१ + क्ष$  यांणीं गुणिलें असतां,  $+$  होतो, इतकें मात्र या पद्धतीविषयीं ठाऊक आहे. क्षचे किमतीचे संबंधरहित,  $१ - क्ष + क्ष^२ - क्ष^३ +$  इत्यादि या श्रेणींतहि तसाच गुण आहे.

आतां या पुढील दोन गोष्टींचा विचार करितों; झणजे, पहिल्यानें, जोंपर्यंत उदाहरणावरून दाखविलें जाईल तोंपर्यंत = हें चिन्ह साधारण रीतीनें कामांत घेतलें असतां, कांहीं विरुद्ध उत्तरें निघणार नाहींत, असें सिद्ध करितां येतें. दुसऱ्यानें, अशे जातीचे सिद्धतेवर आश्रय ठेवण्याची गरज पडत नाहीं, परंतु जें उत्तर निघतें तें मूळ कल्पनांचे गुणांपासून अवश्य होतें.

वरची पहिली गोष्ट तपासण्यासाठीं, सर्व पक्षांत हें पुढील समीकरण खरें आहे असें मनांत घे,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \text{इत्यादि अनंत पावेतों.}$$

जर  $x = 1$ , तर वरची पद्धति याप्रमाणे होईल,

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \text{इत्यादि अनंत पावेतों.}$$

असें उत्तर कोणत्याहि अर्थाने, अंक गणितरूपाचे बरोबरीची पद्धति नाही; कां कीं ती श्रेणी विस्तार करून पदांची समसंख्या घेतली असतां अवश्य० होईल, आणि पदांची विषम संख्या घेतली असतां, १ होईल. कोणत्याहि परिमाणाशीं त्याच परिमाणाची प्रथम मिळवणी आणि नंतर लागलीच वजाबाकी, असा क्रम अनंत पावेतों करून त्याशीं बीजगणित रूप कृति केली असतां, उत्तर त्या परिमाणाचे अर्धाबरोबर होईल कीं नाही, याचा आतां विचार करितों. मनांत आण, कीं

$$\left. \begin{aligned} p &= 1 + x + x^2 + x^3 + \text{इत्यादि.} \\ -p &= -1 - x - x^2 - \text{इत्यादि.} \\ +p &= +1 + x + \text{इत्यादि.} \\ -p &= -1 - \text{इत्यादि.} \end{aligned} \right\} \text{(अ)}$$

$$\therefore p - p + p - \text{इत्यादि} = 1 + (x - 1) + (x - x^2 + 1) \text{ इत्यादि.}$$

$$१९७ \text{ पृष्ठावरून } = \frac{x+1}{x+1} + \frac{x^2-1}{x-1} + \frac{x^3+1}{x+1} \text{ इत्यादि.}$$

$$= \frac{x+x^2+x^3+\text{इत्यादि.}}{x+1} + \frac{१-१+१-\text{इत्यादि.}}{x+१}$$

परंतु  $p = \frac{1}{1-x}$  आणि  $x+x^2+x^3+\text{इत्यादि} = x(1+x+x^2+\text{इत्यादि}) = \frac{x}{1-x}$ ; यामुळे, जर वरची कृति  $\frac{1}{1-x}$  याचे अर्धकरण्याचे कृतीशीं बीजगणितरूपाने बरोबर असेल, आणि जर  $१-१+१-१+\text{इत्यादि}$  हे  $\frac{1}{2}$  या रूपाचे करितां येतील, तर हें पुढील समीकरण होईल;

$$\frac{1}{2} \frac{1}{1-x} = \frac{\frac{x}{1-x}}{x+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{x+1}$$

$$\text{अथवा } \frac{1}{2} \frac{x}{1-x} = \frac{x}{x-1} + \frac{1}{2} \frac{1}{x+1}$$

हें खरें आहे असें दिसते.

$१+क्ष+क्ष^२+क्ष^३+ इत्यादि.$

$-१-क्ष-क्ष^२-क्ष^३- इत्यादि.$

इत्यादि. इत्यादि.

अथवा  $(१-१+१- इत्यादि.) + (क्ष-क्ष+क्ष- इत्यादि.)$

यावरचा रूपावदल या पुढील रूपाने (अ) ही श्रेणी मांडण्याची बीज-  
गणित रूप कृति वरचे उदाहरणांत आहे, ह्यणजे

$१+क्ष+क्ष^२+क्ष^३+ इत्यादि.$

$-१-क्ष-क्ष^२- इत्यादि.$

इत्यादि. इत्यादि.

परंतु = या चिन्हास प्रत्येक बीजगणितरूपाचे कामांत आणण्यानें  
गणितरूपाचा बरोबऱ्या उत्पन्न होतील असें ह्यणवत नाहीं, परंतु  
जेव्हां कधीं = हे चिन्ह बीजगणितरूपाने कामांत आणिल्यानें अंकगणि-  
तानुरूप समीकरण उत्पन्न होतें, तेव्हां दिसण्यांत येईल, कीं तें समीक-  
रण अंकगणितरूपाने खरें आहे; असें ह्यणतां येईल या प्रतिशेविषयी अ-  
द्यापि कोठें विरोध आला नाहीं.

आतां वरची दुसरी गोष्ट तपासून पहातों.

बीजगणिताचे मूळ भूत चिन्हांचे अर्थांची यापूर्वीं अशी योजना  
केली आहे, कीं त्या योजनेनें कित्येक पक्षांत बीजगणित अंकगणिताशीं  
अगदी मिळतें; आणि इतकेंच केवळ नाहीं, तर व्याख्यानापासून जा  
रिती निघतात, त्या अज्ञा योजिल्या आहेत, कीं जेव्हां उत्तर केवळ  
गणितरूपाचे असून कृतीतील त्याचे पूर्वीचा पायऱ्या बीजगणितरूपाचा  
असतात, तेव्हां त्या पायऱ्या अंकगणितरूप करायला जे फेर करावे  
लागतात, त्यांपासून उत्तरांत कांहीं फेर होणार नाहीं, असेंहि घडतें.  
आरंभीं असें असून, आणि आशिवाय बीजगणितरूप कृतीनें कितीहि  
पायऱ्या झाल्या तरी वरचे गोष्टीचा गुण फिरत नाहीं, हें उघड दाख-  
विलें गेलें, यावरून या पुढील दोन गोष्टी कळतात, ह्यणजे पहिल्यानें,  
जीं अंकगणित कृतीनें उत्तरें निघतात त्यांजवर जितका खरेपणाचा अ-



रंवसा ठेवितां येतो, तितका खरेपणाचा भरंवसा, जीं सर्व अंकगणित-रूपाचीं उत्तरे निघतात त्यांजवरहि ठेकितां येईल; दुसऱ्यानें, सगळीं उत्तरे जीं अंकगणितानें दाखवितां येत नाहीं, तथापि वरचे सांगितलेल्या व्याख्यानाशीं तीं पुरीं संगतवार आहेत; आणि, जर तीं सर्वदां अंकगणितरूपाने खरीं नसतील, तरी त्यांपासून अंकगणितरूपाचें असून खोटे असें उत्तर येण्यास अशक्य.

बीजगणिताचें भाषण कसें कामांत आणावें, याचा परिचय झाल्यावांचून वरचा भाषणांत जे शब्द आहेत, त्यांचा पुरतेपणीं बोध होणार नाही. आणि तो बोध झाल्यावांचून वरचा संवाद जो सर्वपक्षीं साधारण जातीचा आणि कठीण आहे, तो नव्ये शिकणारास पुरतेपणीं समजणार नाही, या कारणास्तव तो उघड करायास उदाहरणे दिलीं आहेत. या शिवाय बीजगणितरूपरहित, तर्क करण्याचीं मूळ कारणे हीं आहेत\* आणि तीं कठीण आहेत, यामुळे त्यांची माहितगारी केवळ बीजगणितानें नवे शिकणारास होणार नाही, तसे जातीचा एक तर्क या पुढीलप्रमाणे आहे; ह्मणजे, जर प्रतिज्ञा परस्परांशीं विरुद्ध नसून योग्यतेनें

\* परिमाण विद्यानुरूप तर्क, याचा अर्थ परिमाण विद्येस तर्क लावणें असा आहे, आणि दुसऱ्या कोणत्याहि प्रकारचे तर्काहून भिन्न नाही, हें लक्षांत ठेविलें पाहिजे. तर्क करण्याची संवय परिमाण विद्येनें होती, परंतु त्या परिमाण विद्येने तर्कविद्या शिकविली जात नाही; आणि तर्काचे प्रत्येक दुसऱ्या प्रकारामध्ये जीं मूळ कारणे कामांत आणितात, त्यांशिवाय परिमाण विद्यावानास कोणतेहि दुसरे मूळ कारण कामांत आणावयाची गरज पडत नाही. खरे झटलें असतां, ही गोष्ट उलटी आहे, कीं कीं दुसऱ्या प्रकारचे तर्काचीं मूळ कारणे परिमाण विद्येचे बहुतेक प्रकारांत लागू पडत नाहीं अशीं असतात, जा लोकांस ही वरची गोष्ट ठाऊक नाही त्यांचे मनांत असें वाटतें, कीं परिमाण विद्यानुरूप जो उपपत्ती तो दुसऱ्या सर्व जातीचे उपपत्तीहून भिन्न आहे.

परंतु ही गोष्ट अशी नव्हे; परिमाण विद्यानुरूप उपपत्ती, जेथपर्यंत लागू होती तेथपर्यंत तो दुसऱ्या सर्व प्रकारचे उपपत्ती सारखाच आहे, आणि तर्क करण्याचे रितींत परिमाण विद्येचा उत्तमपणा नाही, परंतु इतर साधारण विषयावर तर्क करणाराचें लक्ष्य, आपले विषयावर जितकें असतें, त्यापेक्षा परिमाण विद्यावानाचें लक्ष्य आपले विषयावर अधिक असतें. जे कांहीं मोजितां किंवा मापितां येतें त्यावर परिमाण विद्या लागू होती; आणि याशिवाय इतर विषयांवर परिमाण विद्यानुरूप उपपत्ति लागू करून, तिजविषयी जो कोणा बोलतो, त्याचे मनांतील अभिप्राय हाच, कीं ती उपपत्ति तर्कानुसार किंवा नियमित जातीची आहे, आणि त्याचा अभिप्राय असा नसल्यास, जाविषयी तो बोलत असतो तो विषय त्यास न समजतां तो बोलतो असें जाणावें.

जे या परिमाण विद्यानुरूप तर्काला तुच्छ मानितात, ते मुख्यत्वेकरून, परिमाण विद्येचे प्रतिवादी आहेत; आणि जे परिमाण विद्यावान आहेत त्यांचा दुसऱ्या विषयावर खरे तर्क करवत नाही, असा झोथ लाविला ह्मणून जय मानून ते परिमाण विद्येस तुच्छ मानितात.



आणि तर्कानुसाराने कामांत घेतल्या, तर त्यांपासून जे परिणाम निघतात, ते परस्परांस विरुद्ध होण्यास अशक्य. ही प्रतिज्ञा संपूर्ण अर्थाने जरी नेवे शिकणारास समजून घेण्यास फार कठीण आहे, तथापि तो कठिणपणा बीजानुरूपाचा नाही.

जेव्हां अंकगणितरूप उत्तर येते, ते जा कृतीचे पायऱ्यांपासून निघते, त्या पायऱ्या मुळीं जर अंकगणितरूपाचा नसल्या, तथापि त्यांस अंकगणितरूप देता येईल, असें वर सांगितले अथवा सुचविले आहे.  $४+५=९$  यांत बरोबरीची पूर्ण कल्पना दिसती, केवळ यांसच अंकगणित रूपाची बरोबरी झणावी असें नाही, परंतु जवळ जवळचा बरोबरीसहि\* अंकगणित रूपाची बरोबरी झणतात, झणजे ते या पुढील उदाहरणांत दिसेल.

$$\frac{१}{१-\frac{१}{२}} \text{ अथवा } २=१+\frac{१}{२}+\frac{१}{४}+\frac{१}{८}+ \text{ इत्यादि अनंत पावेतों.}$$

आतां मनांत आण, कीं १ पेक्षां अ कमी आहे, परंतु अशी कल्पना कर कीं इच्छेप्रमाणें हवा तेवढा १ चे जवळ असेल. आणि १ पेक्षां क्ष कमी आहे असें मनांत आण, झणून शेवटील समीकरणाची अंकगणितरूपाची स्थिती होण्यास क्ष असा असण्याचें अगत्य आहे; यावरून या पुढीलप्रमाणें होईल.

$$\left. \begin{aligned} \frac{१}{१+अ} &= १-अ+अ^२-अ^३+ \text{ इत्यादि } \dots\dots\dots (१) \\ \frac{१}{१-क्ष} &= १+क्ष+क्ष^२+क्ष^३+ \text{ इत्यादि } \dots\dots\dots (२) \end{aligned} \right\} \text{ अंकगणित रूपाने}$$

$$\frac{१}{१+अ} \cdot \frac{१}{१-क्ष} = १+क्ष+क्ष^२+क्ष^३+ \text{ इत्यादि}$$

$$-अ-अक्ष-अक्ष^२- \text{ इत्यादि}$$

$$+अ^२+अ^२क्ष+ \text{ इत्यादि}$$

$$-अ^३- \text{ इत्यादि}$$

$$अ > क्ष. \text{ अशे कल्पनेनें } = १-(अ-क्ष)+(क्ष^२-अक्ष+अ^२)- \text{ इत्यादि}$$

\* एथें अंकगणिताची मर्यादा सुटत नाही. झणजे  $\sqrt{१०}$ ,  $\sqrt[३]{११}$  इत्यादि यांस जवळ जवळ यात्रिवाय दुसरी स्थिति नाही; असे अपूर्णांक काढिता येतात जे परस्पर गुणून इच्छेप्रमाणें हवे तेवढे १०चे जवळ जवळ होतील, आणि १,  $\frac{१}{२}$ ,  $\frac{१}{३}$  इत्यादि पदांची बेरीज घेतल्यानें इच्छेप्रमाणें हवी तेवढी २ चे जवळ जवळ होईल.

$$\begin{aligned}
&= \frac{अ+क्ष}{अ+क्ष} - \frac{अ^३-क्ष^३}{अ+क्ष} + \frac{अ^३+क्ष^३}{अ+क्ष} - \text{इत्यादि} \\
&= \frac{अ-अ^३+अ^३-क्ष^३}{अ+क्ष} + \frac{क्ष+क्ष^३+क्ष^३+क्ष^३}{अ+क्ष} \\
&= \frac{अ}{१+अ} \cdot \frac{१}{अ+क्ष} + \frac{क्ष}{१-क्ष} \cdot \frac{१}{अ+क्ष}
\end{aligned}$$

१ पेक्षां अ कमी घेतला, मग तो कितीहि थोडा असला तरी कांहीं चिंता नाही, तर अशी कल्पना आहे तोंपर्यंत वरची कृति अंकगणित रूपाची आहे; परंतु अ=१ अशी कल्पना करितांच वरचे (१) या समीकरणाचें अंकगणितरूप नाहीस होतें. तथापि या शेवटील समीकरणाचें रूप ३२८ पृष्ठाचे समीकरणाप्रमाणें होतें.

फार सरळ पक्ष वर दाखविला, परंतु पुरती विस्तार कृति करून आणि तऱ्हेतऱ्हेचा कृती घेऊन, कोणत्याहि बीजगणितरूप बरोबरीला अंकगणितरूप बरोबरीस आणितां येईल. परंतु असें करायास एकदांच तोंकडी आणि साधारण अशी रीति अद्यापि शिकणारास समजणार नाही.

मनांत आण, कीं पहिल्यानें क्ष धन आहे. नंतर त्यास ० होऊं दे, आणि त्यानंतर तो ऋण होऊं दे. तर हा पुढील कोष्टक आणि त्यासारखे दुसरे कोष्टक होतील.

क्षचें चिन्ह	+	०	-
$\frac{१}{क्ष}$ याचें चिन्ह	+	$\infty$	-
$क्ष^३$ . . . . .	+	०	-
$\frac{१}{क्ष^३}$ . . . . .	+	$\infty$	-
$क्ष^३$ . . . . .	+	०	+
$\frac{१}{क्ष^३}$ . . . . .	+	$\infty$	+

या आणि याशिवाय दुसऱ्या उदाहरणांपासून, हें पुढील मूळ कारण निघते; जर क्ष, अपासून बकडे त्याचें मधील सर्व किमती-

तून जाताना क्षचे फड्शनाचें चिन्ह धनापासून ऋणाकडे जातें, अथवा ऋणापासून धनाकडे जातें, तेव्हां जा ठिकाणीं तो फेर होतो, ती जागा क्षची किंमत शून्य किंवा अनंत या चिन्हांनीं दर्शवितात; परंतु याची उलट झणजे फड्शनाची किंमत जेव्हां शून्य किंवा अनंत होत्ये, तेव्हां त्याचें चिन्ह नेहेमी बदलावें ही गोष्ट खरी नाहीं.

यांत जी अनंतता सांगितली ती  $\frac{\infty}{0}$  या रूपाची आहे; परंतु पूर्वी पाहिलें, कीं अंकगणितरूप अनंतता संपादायास झणजे अंक अनियत वाढविण्याचा सगळ्या अंकगणितानुरूप रीति,  $\frac{\infty}{0}$  याणें योग्य दर्शविल्या जात नाहीं. जर हें पुढील समीकरण घेतलें,

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \text{ इत्यादि अनंत पावेतों.}$$

तर पहाण्यांत येतें, कीं जेव्हां १ पेक्षां क्ष अधिक आहे, तेव्हां अंकगणितरूपाचे भाषेप्रमाणें समीकरणाची दुसरी बाजू अनियत अंक संपादायाची रीति मात्र दाखविती, आणि पहिली बाजू ऋण होत्ये.  $\frac{1}{2}$  पासून २पर्यंत जेव्हां क्ष जातो तेव्हां चिन्हाची बदल होती असें मनांत आण, आणि जेव्हां क्ष=१ होतो तेव्हां ती बदल होती, तिजपासून याप्रमाणें होतें.

$$2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \text{ इत्यादि.}$$

$$\frac{1}{0} = 1 + 1 + 1 + 1 + \dots \text{ इत्यादि.}$$

$$-\frac{1}{1} = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots \text{ इत्यादि.}$$

यामुळें असें दिसतें, कीं चढती श्रेणी ऋण परिमाणाची बीजगणितानुरूप दर्शक होईल; परंतु

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots \text{ इत्यादि}$$

यांत १पेक्षां क्ष मोठा असेल, तेव्हां ही श्रेणी चढती आहे, आणि सर्व पक्षांत व्यापासून त्याचें उत्तर धन येईल. यापासून असें दिसतें, कीं जर अनंत श्रेणीविषयीं विचार आहे, आणि सांगितली बरोबरी शुद्ध बीजगणित रूपाची आहे, तेव्हां कोणत्याहि अंकगणित रूपाचे ताडण्याचे रितीनें परिमाणाचें ताडणें होणार नाहीं. झणजे, जर

अंकगणित आणि बीजगणित यांतोळ बरोबरी शब्दाचे अर्थाविषयी.

अ पेक्षां अ मोठा असेल, ब पेक्षां ब मोठा असेल, इत्यादि तर असें ह्मणवें, कीं अ+ब+ इत्यादि यांपेक्षां अ+ब+ इत्यादि मोठे आहेत; परंतु पहिल्यानें दोहोंचीं पदे जोंपर्यंत नियमित आहेत; आणि दुसऱ्यानें अ, ब, इत्यादि यांचा संबंध असा असावा कीं अ+ब+ इत्यादि सांगितलेल्या नियततेचे वर जाणार नाहीं, तर वरची गोष्ट घडेल, परंतु जेव्हां अ+ब+ इत्यादि अनियत वाढतात, तेव्हां वरचे सारिखा सारांश काढवत नाहीं; आणि या कारणास्तव  $१+२+४+८$  इत्यादि यांची बीजगणितानुरूप पद्धति  $१+\frac{१}{२}+\frac{१}{४}+$  इत्यादि या पद्धतीपेक्षां अधिक आहे असेंहि ह्मणवत नाहीं.

ही वरची रीति कधीं सोडिली जात नाहीं, कां कीं परिमाणावर जो तर्क चालवावा तो तर्क लागू न होई असें झाल्याचे पूर्वीं जें परिमाण घेतलेलें असतें तें अंकगणिताचे विषयाचे बाहेर जातें. तर लक्ष्यांत ठेवावें कीं चढत्या श्रेणीविषयीं, जीं उत्तरें बरोबरीचा अशा नियत बीजानुरूप पद्धतींचे ताडण्यापासून निघतात तीं घेतात, त्यांशिवाय दुसरीं कोणतींहि ताडण्यापासून निघालेलीं उत्तरें मान्य केलीं जात नाहीं.

## दहावा अध्याय.

### फड्शनगणिताविषयीं.

क्षचें फड्शन ह्मणजे काय तें पूर्वीच सातवे अध्यायाचे पहिल्या पृष्ठांत सांगितलें ; एकाद्या अव्यक्त फड्शनास नियमित चिन्ह देण्याचें असतें, अथवा फड्शनास संक्षेपरूपानें मांडण्याचें असतें, ह्मणून या अध्यायांत फड्शनास मांडण्याची रीति दाखविली आहे.

क्ष<sup>२</sup> + अक्ष इत्यादि पद्धतीत जा रितीनें क्ष येतो, त्या रितीविषयीं आणि क्षचे किंमतीविषयीं मात्र विचार करणें असतो, परंतु जा रितीनें अ अथवा त्याची किंमत त्या पद्धतीत येती, याजविषयीं विचार करावाचा नसतो, तेव्हां त्या पद्धतीस क्षचें फड्शन असें ह्मणतों, आणि जसा गुणक मांडितात त्याप्रमाणें क्षचा मार्गे कांहीं अक्षर मांडून तें फड्शन दाखवितों. परंतु हें फड्शन चिन्ह आणि दुसरें कोणतेंहि गुणक चिन्हें या दोहोंचा गोंधळ चुकविण्याकरितां, फड्शन चिन्हें दाखविण्यास कांहीं अक्षरें निराळीं घेतलेलीं असतात, आणि तीं गुणक दाखवायास घेत नाहीं. या ग्रंथांत फ, ष, ०, ५ अशीं चिन्हें घेतलीं आहेत. ह्मणजे वेगळाले पक्ष दाखविण्याविषयीं फ क्ष, ष क्ष, ० क्ष, ५ क्ष, हीं चिन्हें केवळ क्षचें फड्शन आहेत असें जाणावे, तें फड्शन दिलेलें असो अथवा नसो. फ ० क्ष याचा अर्थ हाच, कीं जसा फ क्ष हा क्षचें फड्शन आहे, तसा फ ० क्ष हें ० क्षचें फड्शन आहे ; ह्मणजे जर फ क्ष = क्ष + क्ष<sup>२</sup>, तर फ ० क्ष हा ० क्ष + (० क्ष)<sup>२</sup> आहे.

उदाहरणें ० क्ष = १ + क्ष<sup>२</sup> फ क्ष = १ - क्ष<sup>२</sup> असें घे, तर

$$फ ० क्ष = १ - (१ + क्ष<sup>२</sup>)^२ = -२क्ष<sup>२</sup> - क्ष<sup>४</sup>$$

$$० फ क्ष = १ + (१ - क्ष<sup>२</sup>)^२ = २ - २क्ष<sup>२</sup> + क्ष<sup>४</sup>$$

$$\begin{aligned} \circ \text{क्ष} &= \text{क्ष}^{\text{अ}} \text{ असें घे, तर } \circ(१+\text{क्ष}) = (१+\text{क्ष})^{\text{अ}} \quad \circ(२\text{क्ष}) = (२\text{क्ष})^{\text{अ}} \\ \circ(\text{अ}) &= \text{अ}^{\text{अ}} \quad \text{ब} = \text{ब}^{\text{अ}} \text{ इत्यादि} \end{aligned}$$

समीकरणांतील क्षचा प्रत्येक किमतीविषयीं एक किंवा अनेक फड्शननें जीं अवश्य खरीं आहेत, त्या समीकरणास फड्शनानुरूप समीकरण ह्मणतात. जसें जर  $\circ \text{क्ष} = \text{अक्ष}$ , तर  $\circ(\text{बक्ष}) = \text{अबक्ष} = \text{ब} \times \circ \text{क्ष}$ , अथवा

$$\circ(\text{बक्ष}) = \text{ब} \circ \text{क्ष}$$

जेव्हां  $\circ \text{क्ष}$  याचा अर्थ अक्ष आहे, तेव्हां वरचे समीकरण नेहमी खरें आहे.

यावरून हीं पुढील समीकरणें काढितां येतील;

$$\begin{aligned} \text{जर } \circ \text{क्ष} &= \text{क्ष}^{\text{अ}} & \text{तर } \circ \text{क्ष} \times \circ \text{य} &= \circ(\text{क्षय}) \\ \circ \text{क्ष} &= \text{अ}^{\text{क्ष}} & \text{तर } \circ \text{क्ष} \times \circ \text{य} &= \circ(\text{क्ष} + \text{य}) \\ \circ \text{क्ष} &= \text{अक्ष} + \text{ब} & \text{तर } \frac{\circ \text{क्ष} - \circ \text{य}}{\circ \text{क्ष} - \circ \text{ब}} &= \frac{\text{क्ष} - \text{य}}{\text{क्ष} - \text{ब}} \\ \circ \text{क्ष} &= \text{अक्ष} & \text{तर } \circ \text{क्ष} + \circ \text{य} &= \circ(\text{क्ष} + \text{य}) \end{aligned}$$

जा बीजगणित रूपानें एकादें फड्शनानुरूप समीकरण स्थापिलें जातें तें रूप त्या समीकरणापासून नेहमी काढितां येतें; उदाहरण, जर  $\circ(\text{क्षय}) = \text{क्ष} \times \circ \text{य}$  असें आहे, आणि हें सर्वदां खरें आहे असें कल्पिलें, तर जेव्हां  $\text{य} = १$  असेल तेव्हांहि खरें होईल, आणि त्यापासून  $\circ(\text{क्ष}) = \text{क्ष} \times \circ(१)$  असें होईल. परंतु  $\circ \text{क्ष}$  यांत क्षचे ठिकाणीं १ मांडिल्यानें  $\circ(१)$  हें अन्यसंबंधरहित परिमाण होतें, त्यास क ह्मण; तर कची कोणती एकादि किंमत त्या समीकरणास स्थापील किंवा नाही, इतकें मात्र पहाण्याचें राहिलें आहे.  $\circ \text{क्ष} = \text{कक्ष}$  घे; तर  $\circ(\text{क्षय}) = \text{कक्षय}$  आणि  $\text{क्ष} \times \circ \text{य} = \text{क्ष} \times \text{कय} = \text{कक्षय}$ ; यावरून कचा सर्व किमतीविषयीं  $\circ(\text{क्षय}) = \text{क्ष} \circ \text{य}$ , आणि  $\circ \text{क्ष}$  हा  $\text{कक्ष}$  आहे,  $\circ(१)$  हा  $\text{क} \times १$  अथवा  $\text{क}$  पूर्वीचे कल्पनेप्रमाणेंच आहे. त्याचप्रमाणें,

जर  $०क्षय = (०क्ष)^य$ , तर  $क्ष = १$  केल्याने या पुढीलप्रमाणे होते

$$०य = \{०(१)\}^य = क^य \quad ०क्ष = क^क्ष$$

$$०(क्षय) = क^क्षय = (क^क्ष)^य = (०क्ष)^य$$

आणि  $०(१) = क^१ = क$ , हे पूर्वीचे कल्पनेप्रमाणे आहे. फड्शन संबंधी जे यांत लिहिण्याचे पडेल त्याची माहितगारी होण्यास हा आणि पुढला सिद्धांत पुरेसा आहे.

पूर्वी पाहिले की जर  $०क्ष = क^क्ष$ , तर  $०क्ष \times ०य = ०(क्ष+य)$  असे होते; परंतु जांचा योगाने असे गुण होतील अशी क्षची दुसरी कांही फड्शनने आहेत की नाही, हे अद्यापि समजत नाही. तथापि याचे उलट आतां सिद्ध करून दाखवितों, ह्मणजे,  $०क्ष \times ०य = ०(क्ष+य)$  हे समीकरण  $क^क्ष$  अशेरूपाचे फड्शन असल्या शिवाय क्षचा कोणत्याहि फड्शनाने स्थापिले जाणार नाही.

$$०क्ष \times ०य = ०(क्ष+य) \dots \dots \dots (अ)$$

मनांत आण, की यांत  $०क्ष$  हे असे जातीचे फड्शन आहे, की क्ष आणि य यांचा कशाहि किमती असोत तरी वरचे समीकरण खरे होईल. यचे ठिकाणी  $अ+व$  मांड, त्यापासून हे होईल

$$०क्ष \times ०(अ+व) = ०(क्ष+अ+व)$$

परंतु वर लिहिल्याप्रमाणे (अ) समीकरणापासून  $०(अ+व) = ०अ \times ०व$ , यावरून

$$०क्ष \times ०अ \times ०व = ०(क्ष+अ+व)$$

यांत कोणत्याहि अक्षराचे जागीं ह्मणजे एथे अचे जागीं  $क+इ$  मांड. यापासून हे होईल

$$०क्ष \times ०(क+इ) \times ०व = ०(क्ष+क+इ+व)$$

परंतु  $०(क+इ) = ०क \times ०इ$

यावरून  $०क्ष \times ०क \times ०इ \times ०व = ०(क्ष+क+इ+व)$

आणि याप्रमाणे पुढेंहि; ह्मणजे जर हव्या त्या किमतीचीं न पदें असतील, ह्मणजे,  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$ , असें असेल, तर पुढील-प्रमाणें होईल

$$0a_1 \times 0a_2 \times \dots \times 0a_{n-1} \times 0a_n = 0(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n)$$

आतां हीं न परिमाणें परस्परांचा बरोबर असून प्रत्येक अचे बरोबर आहे अशी कल्पना कर. यापासून हें होईल

$$\left\{ \begin{array}{c} 0a \times 0a \times \dots \times 0a \times 0a \\ \text{न पदापर्यंत} \end{array} \right\} = 0 \left( \begin{array}{c} a + a + a + \dots + a + a \\ \text{न पदापर्यंत} \end{array} \right)$$

$$\text{अथवा} \quad (0a)^n = 0(na)$$

यांत न कांहीं पूर्णांक आहे\*.

या सारिखेंच, जर म परिमाणें प्रत्येक बचे बरोबर आहेत अशी कल्पना केली, तर याप्रमाणें होईल

$$(0b)^m = 0(mb)$$

म आणि न हे दोन्हीं पूर्णांक आहेत, ह्मणून आतां  $mb = na$  आहे अशी कल्पना घे, तर याप्रमाणें होईल

$$0(mb) = 0(na) \text{ अथवा } (0b)^m = (0a)^n$$

$$\text{अथवा} \quad 0b = (0a)^{\frac{n}{m}} \text{ परंतु } b = \frac{n}{m} a$$

$$\text{तर} \quad 0\left(\frac{n}{m} a\right) = (0a)^{\frac{n}{m}}$$

अथवा जेव्हां  $p$  पूर्णांक आहे, अथवा  $1 \leq p$  पृष्ठाप्रमाणें तो सममान अपूर्णांक आहे, तेव्हां  $0(pa) = (0a)^p$ . हेहि समीकरण खरें आहे.

वरचे (अ) समीकरणांत,  $x=0$  आणि  $y=0$  असें घे, यावरून  $x+y=0$ .  $0(0)$  यास क ह्मण, तेव्हां याप्रमाणें होईल,  $k \times k = k$ , अथवा  $k=1$ . नंतर  $y=-x$ , अथवा  $x+y=0$  असें घे, तर याप्रमाणें होईल

\* वरची कृति अपूर्णाकास लागू होईल असें कल्पवत नाहीं. १०४ आणि १०५ पृष्ठ पहा.



$$०क्ष \times ०(-क्ष) = ०(०) = १ \text{ अथवा } ०(-क्ष) = \frac{१}{०क्ष};$$

हैं समीकरण क्षचे प्रत्येक किमतीविषयीं खरें आहे, ह्मणजे प पूर्णांक किंवा सममान अपूर्णांक असेल, आणि क्षचे जागीं पअ मांडिला, तर त्याविषयीं हैं समीकरण खरें आहे. असें केल्यानें याप्रमाणें होईल

$$०(-पअ) = \frac{१}{०पअ} = \frac{१}{०(अ)^प} = ०अ^{-प}$$

अथवा जर प ऋण पूर्णांक किंवा सममान अपूर्णांक असेल तेव्हां हैं पुढील समीकरण खरें आहे,

$$०(पअ) = (०अ)^प$$

यावरून, २४० पृष्ठाप्रमाणें, अ=१ असें करून, जर प सममान जाती असेल, तर ही पुढील गोष्ट सिद्ध होईल.

$$०(प) = क^प$$

यांत क कोणतेहि परिमाण असो.

जेव्हां प असममान परिमाण असेल, जसें  $\sqrt{२}$ ,  $\sqrt[३]{४}$ , इत्यादि, तरी वरधें समीकरण खरें आहे; परंतु या समीकरणाचा सारांशाशीं अशे रितीनें कृति करितां येईल; कीं त्याचा ताळा दाखविण्याचें प्रयोजन पडणार नाहीं.

अभ्यासासाठीं उदाहरणें.

$$०(क्ष+य) + ०(क्ष-य) = २०क्ष \times ०य$$

हैं समीकरण अचे प्रत्येक किमतीविषयीं या पुढील समीकरणानें स्थापलें जाईल, हैं दाखीव;

$$०क्ष = \frac{१}{२}(अ^क्ष + अ^{-क्ष})$$

आणि

$$०(क्ष+य) = ०क्ष + ०य$$

यास या पुढील समीकरणावांचून दुसरें कांहीं उत्तर नाहीं हैं दाखीव ह्मणजे

$$०क्ष = अक्ष$$

## अकरावा अध्याय.

## द्वियुक्पदसिद्धांताविषयीं.

(अ+व)<sup>n</sup> यांत अ आणि व यांचे घातांप्रमाणे श्रेणींत विस्तार करण्याचे रितीला द्वियुक्पदसिद्धांत असें नांव दिलेलें आहे, ती श्रेणी नियत किंवा अनियत जसा पक्ष असेल त्याप्रमाणे असो, आणि न घात-प्रकाशक हा पूर्ण किंवा अपूर्ण, धन किंवा ऋण, सममान किंवा असममान असो.

(१+क्ष)<sup>n</sup> यास क्षचे घातांचे श्रेणींत विस्तार करण्याप्रमाणे वरचे पक्षाचा विस्तार केला आहे; कां कीं

$$अ+व = अ (१ + \frac{व}{अ}) \quad (अ+व)^n = अ^n (१ + \frac{व}{अ})^n$$

क्ष =  $\frac{व}{अ}$  असें घे, तर (१+क्ष)<sup>n</sup> हें विस्तार करण्याचें फड्शन आहे.

हा सिद्धांत फार उपयोगाचा आहे, यासाठीं त्याचे सिद्धतेचा दोन रिती दाखवितों; पहिली, पृथक्करणाची रीति, ह्मणजे तींत असा शोध करावा लागतो. कीं (१+क्ष)<sup>n</sup> याचे बरोबर श्रेणी ती कोणती आहे; दुसरी एकीकरण रीति, ह्मणजे तींत असें दाखविलें आहे, कीं जी श्रेणी पहिल्या रितीनें सांपडली ती इच्छिली श्रेणी आहे.

शक्य असेल, तर (१+क्ष)<sup>n</sup> ही क्षची पूर्ण घातांची श्रेणी या पुढील रूपाची असावी

$$(१+क्ष)^n = अ_० + अ_१क्ष + अ_२क्ष^२ + अ_३क्ष^३ + इत्यादि$$

यांत अ<sub>०</sub>, अ<sub>१</sub>, इत्यादि हीं नचीं फड्शनें आहेत, आणि क्षचीं नाहीत.

लेम्मा. जसा व अधिक अधिक अचे बरोबर होण्यास जवळ जवळ येतो, तसाच  $\frac{अ^n - व^n}{अ - व}$ , हा अपूर्णाक जा नियततेजवळ जवळ जातो, ती नियतता नअ<sup>n-१</sup> आहे, यांत नची किंमत कशीहि असो.

पहा कीं जेव्हां  $a=b$  आहे, तेव्हां वरचा अपूर्णाकाचे  $\therefore$  असें रूप होते, २८० पृष्ठ पहा.

पहिल्यानें, न पूर्णांक आहे अशी कल्पना कर. तर १९७ पृष्ठा-प्रमाणें,

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}$$

जेव्हां  $a$  आणि  $b$  हे परस्पर बरोबर होण्यास जवळ येतात, तेव्हां वरचे समीकरणाचे दुसऱ्ये बाजूची नियतता या पुढीलप्रमाणें होईल,

$$a^{n-1} + a^{n-2}a + a^{n-3}a^2 + \dots + a^{n-2}a + a^{n-1}$$

अथवा.  $a^{n-1} + a^{n-1} + a^{n-1} + \dots + a^{n-1} + a^{n-1}$

अथवा  $na^{n-1}$

वचे १ घातापासून  $n-1$  घातपर्यंत प्रत्येक घाताविषयीं एक एक पद आहे, आणि एक पद बऱ्या निराधार आहे, यावरून वरचे श्रेणीमध्ये  $n$  पदे आहेत हें स्पष्ट आहे.

दुसऱ्यानें, न अपूर्णांक आहे अशी कल्पना कर, ह्मणजे  $\frac{p}{q}$  असा आहे आणि त्यांत  $p$ ,  $q$ , हे पूर्णांक आहेत असें मनांत आण. तर याप्रमाणें होईल

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = \frac{\frac{p}{q}^n - \frac{p}{q}^n}{\frac{p}{q} - \frac{p}{q}} = \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^n - \left(\frac{p}{q}\right)^n}{\left(\frac{p}{q}\right) - \left(\frac{p}{q}\right)}$$

$$\left(\frac{p}{q}\right) = a, \text{ आणि } \frac{p}{q} = b, \text{ असें घे, } \text{तर वरची पद्धति} = \frac{a^p - b^p}{a^q - b^q}$$

$$= \frac{a^p - b^p}{a - b} \cdot \frac{a - b}{a^q - b^q}$$

भातां, जसा वचे जवळ  $a$  होत जातो, तसा  $b$  चे जवळ  $a$  होत जातो

आणि प आणि क हे पूर्णांक आहेत, ह्मणून वरचे अपूर्णाकांचे अंश आणि छेद यांचा नियतता  $p a_1^{p-1}$  आणि  $k a_1^{k-1}$  आहेत; यावरून वरचे अपूर्णाकांची नियतता ही आहे,

$$\frac{p a_1^{p-1}}{k a_1^{k-1}} \text{ अथवा } \frac{p}{k} a_1^{p-k} \text{ अथवा } \frac{p}{k} \left( a_1^{\frac{1}{k}} \right)^{p-k} \text{ अथवा } \frac{p}{k} a_1^{\frac{p}{k}-1} \text{ अथवा, } n a_1^{n-1}$$

तिसऱ्यानें, न ऋण आहे अशी कल्पना कर, आणि त्याचे जोडीचें धन परिमाण प असोवें, असें कीं  $n = -p$  होईल. तर

$$\begin{aligned} \frac{n a_1^{n-1}}{a_1^{-n}} &= \frac{a_1^{-p-n}}{a_1^{-n}} = \frac{a_1^{-p-n}}{a_1^{-n}} = \frac{1}{a_1^p} \cdot \frac{a_1^{-n}}{a_1^{-n}} \\ &= - \frac{1}{a_1^p} \times \frac{a_1^{-n}}{a_1^{-n}} \end{aligned}$$

जसा व कडे अ येत जातो, तशी वरची प्रथम गुणक पदाची नियतता  $-\frac{1}{a_1^p a_1^p}$  अथवा  $-a_1^{-2p}$  होईल, आणि प धन आहे, तर पूर्वी सिद्ध केल्याप्रमाणे वरचे दुसऱ्या गुण्य पदाची नियतता  $p a_1^{p-1}$  आहे. यावरून वरचे गुणाकाराची नियतता  $-a_1^{-2p} \times p a_1^{p-1}$  अथवा  $-p a_1^{-p-1}$ , आणि  $n = -p$  आहे तर या नियततेचें रूप  $n a_1^{n-1}$  होईल.

आतां पूर्वी कल्पिलेली श्रेणी पुनः घेतों,

$$(1+k)^n = a_0 + a_1 k + a_2 k^2 + a_3 k^3 + \text{इत्यादि}$$

इच्छेप्रमाणें क्षचे हवें तेवढें जवळ करितां येईल असें एक य परिमाण घे; क्षचे सर्व किमतीविषयीं वरची श्रेणी खरी आहे अशी कल्पना केल्यावरून, क्षचे जागीं य मांडितां येईल, तर याप्रमाणें होईल

$$(1+y)^n = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \text{इत्यादि}$$

$$(1+k)^n - (1+y)^n = a_1 (k-y) + a_2 (k^2-y^2) + \text{इत्यादि}$$

याचे दोन बाजूंस, क्ष-य, अथवा  $(1+k) - (1+y)$  यांणीं भाग.

$$\text{तर } \frac{(१+क्ष)^n - (१+य)^n}{(१+क्ष) - (१+य)} = अ_१ + अ_२ \frac{क्ष^२ - य^२}{क्ष - य} + अ_३ \frac{क्ष^३ - य^३}{क्ष - य} + \text{इत्यादि.}$$

याचा दोन्ही बाजू नेहेमी बरोबर आहेत, आणि जसे क्ष आणि य हे बरोबर होण्यास जवळ येत जातात, तसा  $१+क्ष$  आणि  $१+य$  हे बरोबर होण्यास जवळ होत जातात, यावरून त्या दोन बाजूंचा नियतता बरोबर आहेत; अथवा

$$न (१+क्ष)^{n-१} = अ_१ + २अ_२क्ष + ३अ_३क्ष^२ + \text{इत्यादि}$$

याचा दोन्ही बाजू  $१+क्ष$  याणीं गुण. तर

$$न(१+क्ष)^n = अ_१ + २अ_२क्ष + ३अ_३क्ष^२ + ४अ_४क्ष^३ + \text{इत्यादि} \\ + अ_१क्ष + २अ_२क्ष^२ + ३अ_३क्ष^३ + \text{इत्यादि}$$

परंतु

$$न (१+क्ष)^n = न अ_१ + नअ_२क्ष + नअ_३क्ष^२ + नअ_४क्ष^३ + \text{इत्यादि}$$

यामुळे, ३१७ पृष्ठाप्रमाणें

$$अ_१ = नअ_१, २अ_२ + अ_१ = नअ_२, \text{ अथवा } अ_२ = \frac{n-१}{२} अ_१ = \frac{n-१}{२} अ_१.$$

$$३अ_३ + २अ_२ = नअ_३, \text{ अथवा } अ_३ = \frac{n-२}{३} अ_२ = न \cdot \frac{n-१}{२} \cdot \frac{n-२}{३} अ_१.$$

$$४अ_४ + ३अ_३ = न अ_४, \text{ अथवा } अ_४ = \frac{n-३}{४} अ_३ = न \frac{n-१}{२} \frac{n-२}{३} \frac{n-३}{४} अ_१.$$

या सर्व पदांत अ. साधारण गुणक आहे, हें पाहून त्यास ही क्षची किंमत कल्पिलेल्या श्रेणींत मांडून याप्रमाणें होईल

$$(१+क्ष)^n = अ_१ (१ + नक्ष + न \frac{n-१}{२} क्ष^२ + न \frac{n-१}{२} \frac{n-२}{३} क्ष^३ + \text{इत्यादि})$$

यांत अ. याचा अद्यापि निश्चय झाला नाही. तो निश्चय करायकरितां पहिल्यानें पाहिलें पाहिजे, कीं वरची श्रेणी कधीं उतरती होत जाते कीं नाही.

परंतु अगोदर लक्षांत आणिलें पाहिजे, कीं जी गोष्ट सिद्ध झाली ती योग्य ह्मणण्याप्रमाणें, वरचे समीकरणाची सिद्धता नाही, परंतु हें मात्र आहे, कीं जर  $(१+क्ष)^n$  हीचा क्षचे पूर्ण घाताचे कोणत्याहि श्रेणींत सर्वदां विस्तार करितां येईल, तर ती श्रेणी वरची आहे. कारण अशी कल्पना घेतली, कीं  $(१+क्ष)^n = अ_१ + अ_२क्ष + अ_३क्ष^२ +$

इत्यादि आहे, परंतु असें कदांचित् घडेल, कीं जी श्रेणी कल्पायास योग्य ती अपूर्णाकाची किंवा ऋण, किंवा मिश्रघातांची असावी.

पूर्वीचा शोधामध्ये, जेव्हां अशक्यरूपाची कल्पना घेतली, तेव्हां कृतचिं शेषटास जाचा अर्थ सांगितला नाहीं असा कांहीं नवा उलढा विषय दृष्टीस पडल्यावरून, त्या अशक्य रूपाचे कल्पनेची सूचना झाली. जा श्रेणीस खरी असें सिद्ध करण्यास कल्पना अथवा अनुभव होता, त्या शिवाय दुसऱ्ये श्रेणीची कल्पना या पूर्वी घेतली नाहीं, आणि जी श्रेणी तयार झाली आहे तिचा खऱ्येपणाविषयी अनुभव अथवा कारणहि नाहीं, यावरून आपण खरे चालतो हें कळत नाहीं अथवा आपल्ये खोत्रेपणाची सूचना कोणती तीहि कळत नाहीं. जर कांहीं चुक झाली असेल, तर त्या चुकीनंतर श्रेणीचा निरंतर चढतेपणा दृष्टीस पडेल. या-जकरितां वरची श्रेणी शोधून पहातो.

वेगळालीं पदे जीं त्यांचे पूर्वीचे पदाशीं प्रमाणें ठेवितात तीं याप्रमाणें आहेत,

$$नक्ष, \frac{n-1}{2} क्ष, \frac{n-2}{3} क्ष, \frac{n-3}{4} क्ष \text{ इत्यादि}$$

याचें साधारण रूप हें होतें

$$\frac{(p+2) \text{ पद}}{(p+1) \text{ पद}} = \frac{n-p}{p+1} क्ष$$

पहिल्यानें, पहाण्यांत येतें, कीं जर न धन पूर्णांक असेल, तर श्रेणी नियत आहे; कां कीं  $(n+2)$  या आणि त्याचे पुढचे सगळ्ये पदांत  $n-n$  अथवा ०, गुणक स्थळीं येईल. यामुळे जा पक्षांत न अपूर्ण किंवा ऋण येतो असा पक्ष घेतो. जेव्हां  $p$ ,  $n$ चे पार गेला आहे तेव्हां श्रेणीचे मागलें प्रमाण नेहेमी ऋण होईल, आणि त्यावरून असें दिसेल, कीं श्रेणीचीं एकाआड एक पदे धन आणि ऋण होत जाताल; कां कीं जेव्हां दोन परिमाणांचें प्रमाण ऋण आहे, त्यावरून त्या परिमाणांचीं चिन्हे भिन्न आहेत असें कळतें. मागील पदाचें चिन्ह सोडून दे आणि त्यास धन कर. वरचे श्रेणीचीं पदे एकाआड एक धन आणि ऋण आहेत तिचा जोडीची धन पदांची श्रेणी जर उतरती करितां येईल तर ती श्रेणीहि उतरती करितां येईल, हें पहाण्याचा अभिप्राय आहे, ह्याणून वरची गोष्ट करितां येईल. यावरून या पुढीलप्रमाणें होईल

$$\frac{प-न}{प+१} \text{ क्ष अथवा } \frac{पक्ष}{१+प} - \frac{नक्ष}{१+प} \text{ अथवा } \frac{क्ष}{१+प} - \frac{नक्ष}{१+प}$$

जशीं जशीं मोठालीं पदे घेतों, तसें तसें वरचें दुसरें पद अनियत घटत जातें, आणि पहिल्याची नियतता क्ष होती. यामुळे जर १पेक्षां क्ष कमी आहे तर वर लिहिलेलें प्रमाण, कांहीं पदानंतर १पेक्षां कमी होईल, आणि नंतर तेंच प्रमाण क्ष नियततेचा जवळ क्रमानें येईल. ह्मणजे जेव्हां १पेक्षां क्ष कमी आहे तेव्हां ती मिळालेली श्रेणी नेहेमी उतरती आहे.

असा पक्ष खरा आहे तर, ३१८ पृष्ठाप्रमाणें, क्ष = ० असें केल्यानें त्यापासून जें उत्तर निघतें तें कामांत आणितां येईल, आणि त्यापासून  $(१)^१ = अ.$  असें होईल. जर न पूर्णांक असेल, तर  $अ. = १$ ; परंतु जर न अपूर्णांक असेल, जसा  $\frac{प}{क}$ , तर  $(१)^{\frac{प}{क}} = अ. = (१^{\frac{प}{क}})^{\frac{१}{क}} = (१)^{\frac{१}{क}}$ , ह्मणजे अ. हा १चें कोणतेंहि क मूळ होईल; ३१९ पृष्ठ पहा. जर त्याचें अंकगणितरूप मूळ घेतलें, तर  $अ. = १$  असें निघतें; आणि जर संशयाची पहिल्यानें कल्पिलेली श्रेणी खरी असेल, तर जेव्हां १पेक्षां क्ष कमी आहे, तेव्हां ही श्रेणी १+क्ष याचा अंकगणितरूपाचा न घात आहे अथवा सर्व पक्षांत  $(अ+क्ष)^१$  याचे बीजगणित रूपाचे बरोबरीचा आहे.

जेव्हां न पूर्णांक आहे तेव्हां वरची श्रेणी खरी आहे असें दाखवितों. कोणत्याहि पूर्णांकाविषयी ती खरी आहे अशी कल्पना कर, आणि तो पूर्णांक दाखवायासाठीं म घे. तर अ. हा १ असून याप्रमाणें होईल.

$$(१+क्ष)^१ = १ + मक्ष + म \frac{म-१}{२} क्ष^२ + म \frac{म-१}{२} \frac{म-२}{३} क्ष^३ + \text{इत्यादि}$$

दोन्ही बाजू १+क्ष यांनीं गुण.

$$(१+क्ष)^{म+१} = १ + मक्ष + म \frac{म-१}{२} क्ष^२ + म \frac{म-१}{२} \frac{म-२}{३} क्ष^३ + \text{इत्यादि.}$$

$$+ क्ष + म \quad क्ष^२ + म \frac{म-१}{२} \quad क्ष^३ + \text{इत्यादि.}$$

$$= १ + (म+१)क्ष + (म \frac{म-१}{२} + म)क्ष^२ + (म \frac{म-१}{२} \frac{म-२}{३} + म \frac{म-१}{२}) क्ष^३ + \text{इत्यादि.}$$

$$\text{परंतु } म \frac{म-१}{२} + म = म (\frac{म-१}{२} + १) = म \frac{म+१}{२} = (म+१) \frac{म}{२}$$

$$म \frac{म-१}{२} \frac{म-२}{३} + म \frac{म-१}{२} = म \frac{म-१}{२} (\frac{म-२}{३} + १) = (म+१) \frac{म}{२} \frac{म-१}{३}$$

यावरून

$(1+\text{क्ष})^{m+1} = 1 + (m+1)\text{क्ष} + (m+1)\frac{m}{2}\text{क्ष}^2 + (m+1)\frac{m-1}{2}\text{क्ष}^3 + \text{इत्यादि}$ .  
आतां  $m+1$  याचे जागीं  $n$ , अथवा  $m$ चे जागीं  $n-1$  मांडिला असतां ही श्रेणी या पुढील श्रेणी सारिखीच, अथवा तिचाच नियमाप्रमाणे चालेल,

$$(1+\text{क्ष})^n = 1 + n\text{क्ष} + n \cdot \frac{n-1}{2}\text{क्ष}^2 + n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{2}\text{क्ष}^3 + \text{इत्यादि}.$$

यावरून जर ही पद्धति नचे कोणत्याहि पूर्ण किमतीविषयीं खरी आहे; तर त्याचे जवळचे पुढल्या किमतीविषयीहि खरी आहे. परंतु जेव्हां  $n=1$  असेल तेव्हां ही खरी आहे; कां कीं

$$(1+\text{क्ष})^1 = 1 + 1\text{क्ष} + 1 \cdot \frac{1-1}{2}\text{क्ष}^2 + 1 \cdot \frac{1-1}{2} \cdot \frac{1-2}{2}\text{क्ष}^3 + \text{इत्यादि}$$

यामुळे, जेव्हां  $n=2$  तेव्हां खरी आहे; परंतु यामुळे जेव्हां  $n=3$ , तेव्हां खरी आहे, आणि याप्रमाणे पुढें अनंत पावेतों.

$(1+\text{क्ष})^n$  ही नचें फड्शन आहे, असें कल्पिलें, आणि तीस  $0n$  ह्मटलें, तर दिसण्यांत येतें, कीं

$$(1+\text{क्ष})^n \times (1+\text{क्ष})^m = (1+\text{क्ष})^{n+m}$$

$$\text{अथवा} \quad 0n \times 0m = 0(n+m)$$

परंतु जेव्हां  $n$  पूर्णांक आहे तेव्हां  $(1+\text{क्ष})^n$  ही इच्छिलेली श्रेणी आहे; यामुळे, जेव्हां  $n$  पूर्णांक आहे, आणि वरची श्रेणी  $0n$  आहे, असें ह्मटलें, तेव्हां

$$0n \times 0m = 0(n+m)$$

अथवा

$$(1 + n\text{क्ष} + n \cdot \frac{n-1}{2}\text{क्ष}^2 + n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{2}\text{क्ष}^3 + \text{इत्यादि})$$

$$\times (1 + m\text{क्ष} + m \cdot \frac{m-1}{2}\text{क्ष}^2 + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{2}\text{क्ष}^3 + \text{इत्यादि})$$

$$= 1 + (m+n)\text{क्ष} + (m+n)\frac{m+n-1}{2}\text{क्ष}^2 + (m+n)\frac{m+n-1}{2} \cdot \frac{m+n-2}{2}\text{क्ष}^3 + \text{इत्यादि}$$

केवळ गुणाकार कृतीने, हें हवें तेवढें पुढें पावेतों सिद्ध करितां येईल; कां कीं पहिल्या दोन श्रेण्या परस्पर गुणिल्या असतां याप्रमाणे होईल.



$$\begin{aligned}
 \text{परंतु न} \cdot \frac{n-1}{2} + नम + म \cdot \frac{म-1}{2} &= \frac{n^2-n+2नम+म^2-म}{2} \\
 &= \frac{(न+म)^2-(न+म)}{2} = (न+म) \frac{न+म-1}{2} \\
 न \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} + न \cdot \frac{n-1}{2} म + नम \frac{म-1}{2} + म \frac{म-1}{2} \cdot \frac{म-2}{3} \\
 &= \frac{n^3-3न^2+2न+3न^2म-3नम+3नम^2-3नम+म^3-3म^2+2म}{2 \times 3} \\
 &= \frac{(न+म)^3-3(न+म)^2+2(न+म)}{2 \times 3} = (न+म) \frac{न+म-1}{2} \cdot \frac{न+म-2}{3}
 \end{aligned}$$

आणि याप्रमाणें पुढेंहि. आतां हें पुढील मूल प्रकर्ण सांगतों; जा पक्षांत पूर्णांकांचे जागीं अक्षरें असतां वर दाखविल्याप्रमाणें बीज-गणितरूप गुणाकारावरून किंवा दुसरे कांहीं बीजगणितरूप कृती-वरून, एकादें खरें उत्तर निघतें, असें जेव्हां सिद्ध केलें जातें, तेव्हां अपूर्णाकाविषयीं, किंवा असममान अंकांविषयीं आणि अंक ऋण आहेत त्यांविषयीं हीं जीं अक्षरें घेतलीं त्यांपासून जें उत्तर निघतें तें त्याप्रमाणेंच खरें आहे. कां कीं पूर्णांकांविषयीं जीं उत्तरें खरीं आहेत, आणि जीं खरीं नाहींत यांचें तारतम्य पहोण्याची अद्यापि ग-रज पडली नाहीं; परंतु प्रवेशकांत सांगितल्याप्रमाणें पूर्णांक किंवा अपूर्णाकांचे जागीं अक्षरें घेतलीं तरी सगळ्या कृती खऱ्या आहेत. पूर्णांकाचे जागीं अक्षर घेतलें असतां, समीकरणांत एकादें पद होतें, परंतु जेव्हां अपूर्णाकाचे जागीं अक्षर घ्यावें तेव्हां तें पद नाहींसें होतें असा पक्ष कोणत्याहि कृतींत आला नाहीं. यामुळें म आणि न हे पूर्णांक असून गुणाकाराचे सरळ रितीनें, जर  $० न \times ० म = ० (म+n)$  असें होईल, तर जेव्हां म आणि न अपूर्णांक असतील किंवा त्यांतून एक किंवा दोन्ही ऋण असतील, तेव्हां त्याच कृतीवरून  $०(म+n)$  निघेल; यामुळें,

$$१ + नक्ष + न \frac{n-1}{2} क्ष^२ + \text{इत्यादि}$$

या श्रेणींत हाच गुण आहे, कीं जर ती, नचें फड्शन आहे असें मा-निलें, आणि त्यास  $०$  न असें झटलें असतां; तिचा योगानें सर्व पक्षांत हें पुढील समीकरण स्थापिलें जातें,

$$०न \times ०म = ०(म+न)$$

परंतु ३३९ पृष्ठावरून सिद्ध झालें, कीं वरचे समीकरणाचें उत्तर  $०न = क^n$  असावें, यांत  $क = ०(१)$ , आणि  $०(१)$  याची किंमत या पुढीलप्रमाणें आहे असें दिसतें.

$$१ + १क्ष + १\frac{१-१}{२}क्ष^२ + \text{इत्यादि अथवा } १ + क्ष$$

यामुळें सर्व पक्षांत  $०न = (१ + क्ष)^n$  वर जा सिद्धांताविषयीं विचार झाला तो हा आहे.

वरची श्रेणी कामांत आणायची, असेल तर पुढें चालायचे पूर्वी,  $न, \frac{न-१}{२}, \frac{न-३}{४}$ , इत्यादि वेगवेगळे गुणक काढावे ह्मणजे ही रीति सहज आणि सोपी होईल; जसें,  $न = \frac{१}{२}$  असें घे, अथवा  $\sqrt{१ + क्ष}$  या द्वियुक्पदास श्रेणीचें विस्तार रूप देण्याचें आहे असें मनांत आण.

$$न = \frac{१}{२}, \frac{न-१}{२} = -\frac{१}{४}, \frac{न-२}{३} = -\frac{१}{२}, \frac{न-३}{४} = -\frac{५}{८} \cdot \text{इत्यादि.}$$

$$\sqrt{१ + क्ष} = १ + \frac{१}{२}क्ष + \left(\frac{१}{२}\right)\left(-\frac{१}{४}\right)क्ष^२ + \left(\frac{१}{२}\right)\left(\frac{१}{४}\right)\left(-\frac{१}{२}\right)क्ष^३ + \left(\frac{१}{२}\right)\left(-\frac{१}{४}\right) \times \left(-\frac{१}{२}\right)\left(-\frac{५}{८}\right)क्ष^४ + \text{इत्यादि}$$

$$= १ + \frac{१}{२}क्ष - \frac{१}{८}क्ष^२ + \frac{१}{१६}क्ष^३ - \frac{५}{१२८}क्ष^४ + \text{इत्यादि}$$

$$\text{जर } न = -१ \text{ तर}$$

$$न = -१, \frac{न-१}{२} = -१, \frac{न-२}{३} = -१, \frac{न-३}{४} = -१ \text{ इत्यादि}$$

$$(१ + क्ष)^{-१} \text{ अथवा } \frac{१}{१ + क्ष} = १ + (-१)क्ष + (-१)(-१)क्ष^२ + (-१)(-१) \times (-१)क्ष^३ + \text{इत्यादि}$$

$$= १ - क्ष + क्ष^२ - क्ष^३ + \text{इत्यादि}$$

ही श्रेणी पूर्वी सिद्ध झाली त्याप्रमाणेंच आहे

$$\text{जर } न = ५, \text{ तर}$$

$$n=5 \quad \frac{n-1}{2} = 2 \quad \frac{n-2}{3} = 1 \quad \frac{n-3}{4} = \frac{1}{2} \quad \frac{n-4}{5} = \frac{1}{5} \quad \frac{n-5}{6} = 0$$

$$(1+x)^5 = 1 + 5x + \binom{5}{2}x^2 + \binom{5}{3}x^3 + \binom{5}{4}x^4 + \binom{5}{5}x^5$$

$$= 1 + 4x + 10x^2 + 10x^3 + 4x^4 + x^5 + 0 + 0 + \text{इत्यादि}$$

जा पक्षांत घातप्रकाशक पूर्णांक आहे, तेव्हां द्वियुक्पदाचा सिद्धांत या पुढीलप्रमाणे सिद्ध करण्याची चाल आहे; क्ष+अ यास क्ष+व याणीं गुण, ह्यणजे क्ष<sup>२</sup> + (अ+व) क्ष+अव असें होतें, आणि पुनः या गुणाकारास क्ष+क याणीं गुणून, याप्रमाणे होईल

$$x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x + abc$$

यावरून दिसते, की जर  $a_1, a_2, \dots, a_n$  अशीं न परिमाणे असतील, आणि जर सर्वांची बेरीज दाखविण्यासाठी  $p$ , घेतला, आणि प्रत्येक दोन पदांचे गुणाकारांची बेरीज दाखविण्यासाठी  $p$ , इत्यादि घेतले, ह्यणजे, जर,

$$p_1 = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

$$p_2 = a, \quad a_2 + a_2 a_3 + a_2 a_3 + \dots$$

$$p_3 = a_1 a_2 a_3 + a_1 a_3 a_2 + \dots$$

.....

.....

$$P_{n-1} = \{ \text{अ, यावांचून सर्वांचा गुणाकार} \} + \{ \text{अ, यावांचून सर्वांचा गुणाकार} \} + \dots$$

प<sub>न</sub> = सर्वांचा गुणकार.

याप्रमाणें घेतलें, तर या पुढीलप्रमाणें निघतें

$$(\text{क्ष}+\text{अ}_1)(\text{क्ष}+\text{अ}_2)\dots(\text{क्ष}+\text{अ}_n)=\text{क्ष}^n+\text{प}_1\text{क्ष}^{n-1}+\text{प}_2\text{क्ष}^{n-2}+\dots+\text{प}_{n-1}\text{क्ष}+\text{प}_n$$

प<sub>१</sub> यांत पदांची संख्या न आहे; आणि प<sub>१</sub> यामध्ये न परिमाणांतून २ परिमाणांचीं जितक्ये तऱ्हेचीं एकीकरणें होतील तितकी पदांची संख्या आहे, अथवा अंकगणित मूलपीठिकेचा २१० व्या कलमाप्रमाणें  $n \cdot \frac{n-1}{2}$ ; प<sub>२</sub> यामध्ये न परिमाणांतून ३ परिमाणांचीं जितक्ये तऱ्हेचीं एकीकरणें होतील तितकी पदांची संख्या आहे, अथवा  $n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3}$ ; आणि याप्रमाणें पुढेंहि. यावरून जर अशी कल्पना केली, कीं अ<sub>१</sub>, अ<sub>२</sub>, इत्यादि हीं सर्व परस्पर बरोबर असून प्रत्येक अचे बरोबर आहेत, तर याप्रमाणें होतें.

$$\text{प}_1 = \text{अ} + \text{अ} + \text{अ} + \dots = n \text{ अ}$$

$$\text{प}_2 = \text{अ}^2 + \text{अ}^2 + \text{अ}^2 + \dots = n \cdot \frac{n-1}{2} \text{ अ}^2$$

$$\text{प}_3 = \text{अ}_1^3 + \text{अ}_2^3 + \text{अ}_3^3 + \dots = n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \text{ अ}^3$$

.....

$$\text{अथवा } \left\{ \begin{array}{l} ((\text{क्ष}+\text{अ})(\text{क्ष}+\text{अ})\dots(\text{क्ष}+\text{अ})) \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{जांत न गुणक आहेत} \end{array} \right\} \end{array} \right\} = \text{क्ष}^n + n \text{अक्ष}^{n-1} + n \cdot \frac{n-1}{2} \text{अ}^2 \text{क्ष}^{n-2} + \text{इत्यादि.}$$

यांत, जर क्ष = १ असें कल्पिलें, तर याप्रमाणें होईल

$$(१+\text{अ})^n = १ + n\text{अ} + n \cdot \frac{n-1}{2} \text{अ}^2 + \text{इत्यादि.}$$

श्रेणीचे कोणत्याहि शेवटापासून आरंभिलें तर गुणक सारिखेच आहेत, याचें कारण अंकगणित मूलपीठिकेंतील २११ व्या कलमावरून लक्षांत येईल. जसें या पुढील उदाहरणांतहि दिसेल.

$$(१+\text{क्ष})^2 = १ + २\text{क्ष} + \text{क्ष}^2$$

$$(१+\text{क्ष})^3 = १ + ३\text{क्ष} + ३\text{क्ष}^2 + \text{क्ष}^3$$

$$(१+\text{क्ष})^4 = १ + ४\text{क्ष} + ६\text{क्ष}^2 + ४\text{क्ष}^3 + \text{क्ष}^4$$

$$(१+\text{क्ष})^5 = १ + ५\text{क्ष} + १०\text{क्ष}^2 + १०\text{क्ष}^3 + ५\text{क्ष}^4 + \text{क्ष}^5$$

$$(१+\text{क्ष})^6 = १ + ६\text{क्ष} + १५\text{क्ष}^2 + २०\text{क्ष}^3 + १५\text{क्ष}^4 + ६\text{क्ष}^5 + \text{क्ष}^6$$

(१-क्ष)<sup>n</sup> याची किंमत काढायासाठी, श्रेणीत क्षचें चिन्ह बदल कर; ह्मणजे, क्षचे जागी-क्ष मांड; क्ष<sup>२</sup> याचें चिन्ह तसेंच राहूं दे; क्ष<sup>३</sup> याचे जागी-क्ष<sup>३</sup> मांड; आणि याप्रमाणें पुढेहि; ह्मणजे याप्रमाणें होईल  
(१-क्ष)<sup>n</sup> = १ - नक्ष + न.  $\frac{n-1}{२}$  क्ष<sup>२</sup> - इत्यादि.

जेव्हां न पूर्णांक आहे, तेव्हां साधारण रूपानें श्रेणी या पुढील रितीनें मांडितां येईल, जांत १ आणि न यांचे मधील आणि त्यासुद्धां सर्व गुणक जे पूर्णांक आहेत ते प<sub>n</sub> याणें दाखविले जातात.

$$(१+क्ष)^n = प_n \left\{ \frac{१}{प_n} + \frac{क्ष}{प_१प_{n-१}} + \frac{क्ष^२}{प_२प_{n-२}} + \dots + \frac{क्ष^{n-१}}{प_{n-१}प_१} + \frac{क्ष^n}{प_n} \right\}$$

ह्मणजे वर सांगितल्याप्रमाणें गुणकांचा सारखेपणा यापासून दाखविला जातो.

अभ्यासासाठीं हीं पुढील उदाहरणें सांगतो;

१. जेव्हां न पूर्णांक आहे,

$$२^n = १ + न + न \frac{n-१}{२} + न \frac{n-१}{२} \cdot \frac{n-२}{३} + \text{इत्यादि}$$

$$०^n = १ - न + न \cdot \frac{n-१}{२} - न \frac{n-१}{२} \cdot \frac{n-२}{३} + \text{इत्यादि}$$

$$२^{n-१} = १ + न \frac{n-१}{२} + न \frac{n-१}{२} \cdot \frac{n-२}{३} \frac{n-३}{४} + \text{इत्यादि}$$

$$२. (अ+ब)^n = अ^n + नअ^{n-१}ब + न \frac{n-१}{२} अ^{n-२}ब^२ + \text{इत्यादि}$$

३. जर न अपूर्णांक असेल, तर

$$(क्ष + \frac{१}{क्ष})^२ = क्ष^२ + \frac{१}{क्ष^२} + २$$

$$(क्ष + \frac{१}{क्ष})^३ = क्ष^३ + \frac{१}{क्ष^३} + ३(क्ष + \frac{१}{क्ष})$$

$$(क्ष + \frac{१}{क्ष})^४ = क्ष^४ + \frac{१}{क्ष^४} + ४(क्ष^३ + \frac{१}{क्ष^३}) + ६$$

$$(क्ष + \frac{१}{क्ष})^{२n} = क्ष^{२n} + \frac{१}{क्ष^{२n}} + २n(क्ष^{२n-२} + \frac{१}{क्ष^{२n-२}}) \\ + २n \frac{२n-१}{२} (क्ष^{२n-४} + \frac{१}{क्ष^{२n-४}}) + \dots$$

$$\text{याचे शेवटीं } \frac{२n(२n-१) \cdot (२n-२) \dots (n+१)}{१ \cdot २ \cdot ३ \dots n}$$

$$(\kappa + \frac{1}{\kappa})^{2n+1} = \kappa^{2n+1} + \frac{1}{\kappa^{2n+1}} + (2n+1)(\kappa^{2n-1} + \frac{1}{\kappa^{2n-1}}) +$$

$$\text{याचे शेवटीं } \frac{(2n+1)(2n) \dots (n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n+1)} (\kappa + \frac{1}{\kappa})$$

$$8. \frac{(1+\kappa)^n + (1-\kappa)^n}{2} = 1 + n \frac{n-1}{2} \kappa^2 + n \frac{n-1}{2} \frac{n-2}{3} \frac{n-3}{4} \kappa^4 + \text{इत्यादि}$$

$$\frac{(1+\kappa)^n - (1-\kappa)^n}{2} = n\kappa + n \frac{n-1}{2} \frac{n-2}{3} \kappa^3 + \text{इत्यादि}$$

५. शिकणारानें आपल्या कामासाठीं या पुढील तऱ्हेनें उदाहरणें आणि त्यांचे ताले सिद्ध करून बाळगून ठेवावे; कोणताहि न घातप्रकाशक, पूर्ण किंवा अपूर्ण, धन किंवा ऋण असो, असा घेऊन सिद्धांताचे सहाय्यानें,  $(1+\kappa)^n$  आणि  $(1-\kappa)^{n-1}$  यांचा श्रेणीचे रूपांत विस्तार करावा; नंतर निघालेल्या पहिल्या श्रेणीस  $1+\kappa$  यांणीं गुणिलें असतां वरचे दुसऱ्या द्वियुक्पदाची श्रेणी होईल.

$$६. a^n = b^n + n(a-b) b^{n-1} + n \frac{n-1}{2} (a-b)^2 b^{n-2} + \text{इत्यादि.}$$

यानंतर या पुढील पक्षांवर विशेषेंकरून अधिक दृष्टी ठेवावी लागेल;

$$(1 + \frac{1}{n})^{n\kappa} = 1 + n\kappa \frac{1}{n} + n\kappa \frac{n\kappa-1}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + n\kappa \frac{n\kappa-1}{2} \frac{n\kappa-2}{3} \frac{1}{n^3} + \text{इत्यादि}$$

$$\text{परंतु } n\kappa \frac{1}{n} = \kappa, \quad n\kappa \frac{n\kappa-1}{2} \times \frac{1}{n^2} = \kappa \frac{\kappa-1}{2}$$

$$n\kappa \frac{n\kappa-1}{2} \times \frac{n\kappa-2}{3} \times \frac{1}{n^3} = \kappa \frac{\kappa-1}{2} \frac{\kappa-2}{3} \text{ इत्यादि, यावरून}$$

$$(1 + \frac{1}{n})^{n\kappa} = 1 + \kappa + \kappa \frac{\kappa-1}{2} + \kappa \frac{\kappa-1}{2} \cdot \frac{\kappa-2}{3} + \text{इत्यादि.}$$

वरचे श्रेणीत  $\kappa = 1$  असें घे, तर याप्रमाणें होईल

$$(1 + \frac{1}{n})^n = 1 + 1 + \frac{1-\frac{1}{n}}{2} + \frac{1-\frac{1}{n}}{2} \cdot \frac{1-\frac{2}{n}}{3} + \text{इत्यादि}$$

$$\text{परंतु } २०० \text{ पृष्ठाप्रमाणें, } (1 + \frac{1}{n})^{n\kappa} = \{(1 + \frac{1}{n})^n\}^\kappa$$

ह्मणजे वरची पहिली श्रेणी दुसऱ्या श्रेणीचा  $\kappa$  घात आहे, आणि

$$(1 + 1 + \frac{1-\frac{1}{n}}{2} + \text{इत्यादि})^\kappa = 1 + \kappa + \kappa \frac{\kappa-1}{2} + \text{इत्यादि}$$

जर  $n=0$ , तर  $(1+k)^n = 1$ , १७२ पृष्ठ पहा अथवा  $(1+k)^n - 1 = 0$ , अथवा  $\frac{(1+k)^n - 1}{n}$  हा अपूर्णांक  $\frac{0}{n}$  हें रूप धरितो. आतां

विचारितों कीं जेव्हां न अनियत घटत जातो, तेव्हां या अपूर्णाकास नियतता आहे कीं नाही, २८० पृष्ठ पहा.

साधारण रूपाचे सिद्धांतापासून,

$$\frac{(1+k)^n - 1}{n} = k + \frac{n-1}{2} k^2 + \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} k^3 + \text{इत्यादि.}$$

आणि जेव्हां न अनियत घटत जातो, तेव्हां दुसऱ्या बाजूची नियतता याप्रमाणे होती,

$$k + \left(\frac{-1}{2}\right)k^2 + \left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-2}{3}\right)k^3 + \left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-2}{3}\right)\left(\frac{-3}{4}\right)k^4 + \text{इत्यादि}$$

अथवा  $k - \frac{k^2}{2} + \frac{k^3}{3} - \frac{k^4}{4} + \text{इत्यादि}$   
ह्मणजे,

जसा न अनियत घटत जातो,

तसी  $\frac{1+k^n-1}{n}$  ही पद्धति या समोरचे श्रेणीचे अनियत ज-  
वळ जवळ होत जाती.

जर  $k = j-1$ , आणि जेव्हां न अनियत घटत जातो, तेव्हां  $\frac{j^n-1}{n}$  याची नियतता याप्रमाणे आहे,

$$(j-1) - \frac{1}{2} (j-1)^2 + \frac{1}{3} (j-1)^3 - \frac{1}{4} (j-1)^4 + \text{इत्यादि}$$

जेव्हां  $k$  अथवा  $j-1$ , १ पेक्षा कमी, अथवा  $j$ , २ पेक्षा कमी आहे, तेव्हां ही श्रेणी उतरती आहे या खेरीज या श्रेणीचे गुणाविषयी दुसरे कांहीं माहित नाही. जा पद्धतीपासून ही श्रेणी उत्पन्न होती तीस आतां शोधून पहातो. त्या पद्धतीमध्ये जर  $j$ चे जागी  $j^m$  घेतला, तर याप्रमाणे होईल

$$\frac{j^m-1}{m} \text{ अथवा } m \frac{j^m-1}{m}$$

यांत  $m$  नियत परिमाण आहे, आणि न अनियत घटत जातो अशी कल्पना कर; तर  $m$  न अनियत घटत जातो. आतां,

जेव्हां न अनियत घटत जातो तेव्हां जर ० नची नियतता न आहे, तर ० (मन) याची नियतता तीच असावी. परंतु यांत इतका मात्र भेद आहे, कीं जर (म=६ असें घेतलें), तर नचे कोणत्याहि अति लहान किमतीविषयी, जितका ० न त्या नियततेचे जवळ होत जातो, तितके ० (६न) त्याचे जवळ जात नाहीत, कां कीं या नियततेचा गुण याप्रमाणें आहे, कीं, न पुरतेपणीं लहान घेतल्यानें, इच्छेप्रमाणें लहान अशा नचा कोणत्याहि सांगितल्या क अपूर्णाकापेक्षां ० न कमी करितां येतो, तर नचे इच्छित्ये किमतीचा ६ वा भाग घेतल्यानें ० (६न) हे तसेच नचे तितके जवळ करितां येतील. यावरून वरचा दोन पद्धती ह्मणजे

$$\frac{ज्ञ-१}{न} \text{ आणि म } \frac{ज्ञम-१}{मन}$$

यांची नियतता सारिखीच आहे. परंतु जर पहिल्ये पद्धतीला  $\frac{१}{३}$  न हटलें, तर दुसरी पद्धती  $\frac{१}{३}$   $\frac{१}{३}$  (ज्ञ<sup>म</sup>) आहे; तर याप्रमाणें होतें

$$\begin{aligned} \frac{१}{३} \text{ ज्ञची नियतता} &= \frac{१}{३} \frac{१}{३} \text{ ज्ञ<sup>म</sup> ची नियतता} \\ &= \frac{१}{३} \times \frac{१}{३} \text{ ज्ञ<sup>म</sup> ची नियतता} \end{aligned}$$

अथवा

ज्ञ-१- $\frac{१}{२}$ (ज्ञ-१)<sup>२</sup>+इत्यादि= $\frac{१}{३}$ (ज्ञ<sup>म</sup>-१- $\frac{१}{२}$ (ज्ञ<sup>म</sup>-१)<sup>२</sup>+इत्यादि)  
या श्रेणीचा हा गुण पुढील शोधाचा ताळा पहाण्याकरितां कामांत आणितां येईल.

$$(१+क्ष)^{\sqrt{२}}$$

वरचा पद्धतींत मूळ प्रकाशक चिन्ह असममान आहे, असा पक्ष वरचे कृतींमध्ये अद्यापि आला नाही, परंतु  $\sqrt{२}$  याची नियतता अंकगणितरूपाने काढली असतां उत्तरोत्तर याप्रमाणें पदें होतात,

$$१, १.४, १.४१, १.४१४, १.४१४२, \text{ इत्यादि}$$

$$\text{यावरून } १+क्ष \left( १+क्ष \right)^{\frac{१४}{१०}} \left( १+क्ष \right)^{\frac{१४१}{१००}} \left( १+क्ष \right)^{\frac{१४१४}{१०००}} \text{ इत्यादि}$$

हीं उत्तरोत्तरचीं पदें घेतल्यानें  $(१+क्ष)^{\sqrt{२}}$  याचे नियततेचे जवळजवळ होत जावात असें जाणलें पाहिजे, ह्मणजे  $\sqrt{२}$  याचे जागीं, अथवा कोणत्याहि नियततेचे जागीं तें चिन्ह घेतलें आहे त्याचे जागीं कोणतेहि जवळचें पद



क असतां,  $(१+क्ष)\sqrt{२}$  याचे जोडीची जवळची श्रेणी याप्रमाणें आहे,

$$१ + कक्ष + क \frac{क-१}{२} क्ष^२ + इत्यादि$$

जेव्हां ही श्रेणी उतरती आहे, आणि जर प्रत्येक पद सहस्रांशाचे आंत खरें होई असें निघेल, तर स्पष्ट आहे, कीं श्रेणीचें सर्वधन सहस्रांशाचे आंत खरें होईल. १९४ पृष्ठाप्रमाणें  $\sqrt{२}$  यांचे जवळचा क आणि क+म ह्या दोन किंमती आहेत अशी कल्पना कर, ह्मणजे पहिली कमी आणि दुसरी अधिक, आणि अशी कल्पना कर कीं त्यांचें प पद आणि  $(१+क्ष)\sqrt{२}$  हीं ताडितों, अथवा,

क.  $\frac{क-१}{२} \dots \frac{क-प+२}{प-१} क्ष^{प-१}$  आणि  $(क+म) \cdot \frac{क+म-१}{२} \dots \frac{क+म-प+२}{प-१} क्ष^{प-१}$  यांचें प्रमाण याप्रमाणें आहे,

$$\frac{क+म}{क} \cdot \frac{क+म-१}{क-१} \dots \frac{क+म-प+२}{क-प+२}$$

यांत म इच्छेप्रमाणें लहान घेतां येईल, तर स्पष्ट आहे, कीं वरचे प्रत्येक गुण्य गुणक इच्छेप्रमाणें एकमाचे हवा तेवढा जवळ करितां येईल, आणि, यामुळे, त्यांचा गुणाकार इच्छेप्रमाणें एकमाचे हवा तेवढा जवळ केला जाईल. ह्मणजे कांहीं दिलेल्या पदांचे संख्येविषयीं, दोन जवळजवळचे पदांची किंमत इच्छेप्रमाणें जवळ जवळ करितां येईल. आतां क्ष हा १ पेक्षां कमी आहे अशी कल्पना कर, ह्मणून अशांन ३४५ पृष्ठाप्रमाणें दोन जवळचा श्रेण्या उतरत्या आहेत. यावरून, क पदे घेतलीं जातील, कीं त्यांचे पुढील राहिल्ये पदांचे बेरीजेची नियतता इच्छेप्रमाणें हवी तेवढी लहान होईल; आणि म इतका लहान घेतां येतो, कीं एक जवळचे श्रेणीचीं सर्व क पदे दुसऱ्ये जवळचे श्रेणीचे क पदांचे दशलक्षांशाचे आंत इतक्या अंतरानें जवळ होतील; यावरून ह्या जवळ जवळचा श्रेण्या या पुढील रूपानें मांडितां येतील;

$$अ + ब + क + \dots + न + \dots + \left\{ \begin{array}{l} \text{पूर्वीचे पदांचे बेरीजेचे दश} \\ \text{लक्षांशाहून कमी अशीं पु-} \\ \text{ढील राहिलेलीं पदे.} \end{array} \right.$$

$$अ(१+अ) + ब(१+ब) + \dots + न(१+न) + \left\{ \begin{array}{l} \text{पूर्वीचे पदांचे बेरीजेचे दश} \\ \text{लक्षांशाहून कमी अशीं पु-} \\ \text{ढील राहिलेलीं पदे.} \end{array} \right.$$

क<sup>२</sup>+क<sup>४</sup>

यांत अ, ब, .... व, हे प्रत्येक निरनिराळे दश लक्षांशापेक्षां कमी आहेत. अ+ब+क.....+ज हीस, पहिल्या जवळचे श्रेणीचे जवळची आहे असें ह्मण, आणि ती दाखवायासाठीं प घे; तर अ अ+बब+.....जव ही पचे दशलक्षांशापेक्षां कमी आहे, आणि पहिली जवळची श्रेणी पूर्णरूपानें मांडिली असतां याप्रमाणें होईल

प+क्षप यांत क्ष दश लक्षांशापेक्षां कमी आहे,  
दुसरी जवळची श्रेणी पूर्णरूपानें मांडिली असतां याप्रमाणें होईल

प(१+वि) + यप (१+वि) यांत वि आणि य प्रत्येक दशलक्षांशापेक्षां कमी आहेत.

यांची वजाबाकी याप्रमाणें आहे,

$$पवि + प(य-क्ष) + पयवि$$

ही वजाबाकी पचे तीन दश लक्षांशापेक्षां कमी आहे; कांकीं वि, य-क्ष, यवि, हीं निरनिराळीं प चे दशलक्षांशापेक्षां कमी आहेत. परंतु  $(१+क्ष)^{\sqrt{२}}$  याची नियतता वरचे दोन श्रेण्यांचे मध्यें असावी, आणि यामुलें त्या दोन जवळचे श्रेण्यांचें अंतर पचे तीन दशलक्षांश आहे, इतकें पचें आणि त्या नियततेचें अंतर नाही.

जेव्हां १ पेक्षां क्ष अधिक किंवा श्रेणी चढती आहे, तेव्हां या पक्षां वरचे रितीप्रमाणें तसेंच उत्तर दाखवायास अशक्य आहे; परंतु लक्षांत ठेविलें पाहिजे, कीं या पक्षांत केवळ बीजगणितरूप बरोवरीची प्रतिज्ञा सांगितली, परंतु अंकगणित रूपाची नाही; आणि जें वर लिहिलें तें हेंच आहे, कीं

$$१ + \sqrt{२} क्ष + \sqrt{२} \frac{\sqrt{२}-१}{२} क्ष^२ + इत्यादि$$

ही पद्धति, चुकीवांचून  $(१+क्ष)^{\sqrt{२}}$  याचे जागीं मांडितां येईल; ह्मणून ३४७, ३४८ पृष्ठांवरील मूळ कारणापासून जी सामान्य सिद्धता काढिली तीत या पक्षाची सिद्धता आहे. जेव्हां श्रेणी उतरती आहे, तेव्हां वरची कृती अंकगणित रूपाचे बरोवरीचा जवळपणा दाखविती.

इच्छेप्रमाणें जवळ जवळ होण्याविषयीं, कोणत्याहि दुसऱ्या पक्षांस वरची गोष्ट लागू होईल. आतां द्वियुक्पदसिद्धांताचे काहीं अधिक परिणाम सांगतो.

## बारावा अध्याय.

घातप्रकाशकांची आणि लाग्रतमाची श्रेणी यांविषयी.

जसजसे, बीजगणितरूपाचें चिन्ह दुसऱ्याे निरनिराळ्याे चिन्हांशीं किंवा चिन्हांचे एकीकरणाशीं संबंध ठेवितें, तस तशीं त्यास निरनिराळीं नांवें असतात. जसें अब, यांत वचे संबंधानें, अ यास गुणक ह्मणतात; अब चे संबंधानें अ यास फाक्टर\* ह्मणतात, तसेंच, अ<sup>व</sup> यांत, अ चे संबंधानें, व यास घातप्रकाशक ह्मणतात; अ<sup>व</sup> याचे संबंधाने, व यास लाग्रतम ह्मणतात, आणि वचे संबंधानें अ यास लाग्रतमाचा पाया ह्मणतात.

जसें ३<sup>४</sup>, यांत, ३ या पायास, ३<sup>४</sup> अथवा ८१ यांचें लाग्रतम ४ आहे; अ<sup>क्ष</sup>, यांत, अ या पायास अ<sup>क्ष</sup> याचें लाग्रतम क्ष आहे. हें याप्रमाणें दर्शवितां येईल, ह्मणजे ४ = लाग<sub>३</sub> ८१ आणि क्ष = लाग<sub>अ</sub> अ<sup>क्ष</sup>; यांत लाग ह्मणजे लाग्रतम शब्दाचा संक्षेप, आणि खालीं लिहिलेलीं अंक त्याचा पाया आहे.

उदाहरणें. १०<sup>३</sup> = १०००      ३ = लाग<sub>१०</sub> १०००

जर अ<sup>क्ष</sup> = य तर क्ष = लाग<sub>अ</sub> य

जर प<sup>क्ष</sup> = १-ज्ञ तर क = लाग<sub>प</sub> (१-ज्ञ)

काहीं दिलेल्या ह्मणजे एथे १० या पायास लाग्रतमाचा एकादा

\* फाक्टर हा इंग्लिश शब्द आहे, जा दोन पदांपासून काहीं गुणाकार होतो त्या प्रत्येक पदास ह्मणजे गुण्य किंवा गुणक यांतून प्रत्येकास सामान्यनाम फाक्टर आहे.



पर्याय लागू करण्यासाठी, ही पुढील समीकरणे एका पुढे एक उलगाडून, प्रत्येकांतून क्षची किंमत काढिली पाहिजे.

$$१०^{\text{क्ष}} = १ \quad १०^{\text{क्ष}} = २ \quad १०^{\text{क्ष}} = ३ \quad १०^{\text{क्ष}} = ४ \text{ इत्यादि}$$

ही किंमत बहुतकरून, केवळ जवळ काढितां येईल; ह्मणजे, बहुत करून एकमाशीं लाग्रतम असमान आहे. तेव्हां जर असें झटलें, कीं लाग<sub>१०</sub> २ = ३०१०३ आहे, तर अर्थ हाच, कीं

$१०^{३०१०३} = २$  चे अतिजवळ, अथवा  $100000\sqrt[100000]{१०^{३०१०३}} = २$  चे जवळ जवळ, आणि असा एकादा अपूर्णांक क काढितां येईल, कीं  $१०^{\text{क्ष}}$  इच्छेप्रमाणें २ याचे हवे तेवढे जवळ होतील; आणि ३०१०३ हे त्या अपूर्णांकाचे जवळचे आहेत.

या पुढील सिद्धांतामध्ये एकच पाया कल्पिला आहे, तो अ आहे.

१ सिद्धांत. पाया कोणताहि असला तरी, १ याचें लाग्रतम ० आहे. स्पष्ट आहे, कीं ही गोष्ट  $\text{अ}^0 = १$  याची मांडण्याची दुसरी रीति आहे, आणि ती याप्रमाणें मांडितां येईल, लाग<sub>अ</sub> १ = ०,

२ सिद्धांत. पायाचेंच लाग्रतम १ आहे. ही गोष्ट  $\text{अ}^1 = \text{अ}$ , यांत आहे, आणि ती याप्रमाणें दर्शविली जाती; ह्मणजे लाग<sub>अ</sub> अ = १.

३ सिद्धांत. य आणि  $\frac{१}{\text{य}}$  यांचीं लाग्रतमं भिन्नचिन्हांचीं असतात, परंतु त्यांची अंक गणितरूपाची किंमत बरोबर असती. कां कीं जर  $\text{य} = \text{अ}^{\text{क्ष}}$  अथवा  $\text{क्ष} = \text{लाग}_{\text{अ}} \text{य}$ , तर याप्रमाणें होतें,  $\frac{१}{\text{य}} = \text{अ}^{-\text{क्ष}}$  अथवा  $-\text{क्ष} = \text{लाग}_{\text{अ}} \frac{१}{\text{य}}$ ; ह्मणजे, लाग<sub>अ</sub>  $\frac{१}{\text{य}}$  = - लाग<sub>अ</sub> य.

४ सिद्धांत. जर पाया अ आहे, आणि  $\text{अ}^{\text{म}}$  आणि  $\text{अ}^{\text{न}}$  यांमध्ये कोणताहि पूर्ण किंवा अपूर्णांक येतो; तर त्यापूर्ण किंवा अपूर्णांकाचें लाग्रतम म आणि न यांमध्ये येतें.

कां कीं जर  $\text{अ}^{\text{म}}$  आणि  $\text{अ}^{\text{न}}$  यांचेमध्ये  $\text{अ}^{\text{क्ष}}$  हा अंक आहे; तर म आणि न यांचे मध्ये क्ष हें लाग्रतम येतें, १७९, १८० पृष्ठपहा.

पाया १०.		पाया $\frac{1}{2}$ .	
या खाली दिलेल्या अंकांमधील अंकांचे लाघ्रतम	या अंकांम- ध्ये असते	या खाली दिलेल्या अंकांमधील अंकांचे लाघ्रतम	या अंकांम- ध्ये असते
१ आणि १०	० आणि १	१ आणि $\frac{1}{2}$	० आणि १
१० आणि १००	१ आणि २	$\frac{1}{2}$ आणि $\frac{1}{4}$	१ आणि २
१०० आणि १०००	२ आणि ३	$\frac{1}{4}$ आणि $\frac{1}{8}$	२ आणि ३
इत्यादि	इत्यादि	इत्यादि	इत्यादि
$\frac{1}{10}$ आणि $\frac{1}{100}$	० आणि -१	१ आणि २	० आणि -१
$\frac{1}{100}$ आणि $\frac{1}{1000}$	-१ आणि -२	२ आणि ४	-१ आणि -२
$\frac{1}{1000}$ आणि $\frac{1}{10000}$	-२ आणि -३	४ आणि ८	-२ आणि -३
इत्यादि	इत्यादि	इत्यादि	इत्यादि

५ सिद्धांत. गुणाकाराचें लाघ्रतम त्याचे फाकट्याचे लाघ्रत-  
माचे बेरिजेबरोबर आहे. अ पाया असेल, आणि प, क, आणि र,  
यांचीं लाघ्रतमें प, क, आणि र असतील, तर

$$प = अ^p \quad क = अ^k \quad र = अ^r$$

पकर = अ<sup>प+क+र</sup> अथवा लाग(पकर) = प+क+र = लाग प+लाग क  
+लाग र.

६ सिद्धांत. प्रमाणाचें, भागाकाराचें, किंवा अपूर्णाकाचें लाघ्रतम,  
अग्रसर आणि उपाग्रसरांचें, भाज्य आणि भाजकाचें, किंवा अंश  
आणि छेद यांचे लाघ्रतमाचे वजावाकी बरोबर आहे.

$$\text{का की } \frac{प}{क} = अ^{प-क} \text{ अथवा लाग } \frac{प}{क} = प-क = \text{लाग प}-\text{लाग क}.$$

७ सिद्धांत. प<sup>म</sup> याचें लाघ्रतम पचे लाघ्रतमास मने गुणून नि-  
घतें; ह्मणजे, जर प = अ<sup>प</sup> आहे, तर प<sup>म</sup> = अ<sup>मप</sup>, अथवा लाग प<sup>म</sup> =  
मप = म लाग प.

८ सिद्धांत. ऋण अंकास गणितरूपाचें लाघ्रतम नाही; आणि  
ओ बीजगणिताविषयीं यापूर्वीं विचार झाला त्यांत, ऋणपायाचे

लाग्रतमाचा कांहीं पर्यायहि नाही. हा सिद्धांत नाही, परंतु व्याख्यान आहे, आणि त्याचा सारांश हाच; कीं कांहीं उलटे विषय आहेत, जांचा अर्थ अद्यापि शिकणाराचे समजांत येणार नाही, यामुळे ऋण परिमाणाचे लाग्रतमाचा विचार, आणि जा धन परिमाणाचे लाग्रतमास अंक गणितरूपाचा अर्थ आहे, याशिवाय धन परिमाणाचे सर्व लाग्रतमाचाहि विचार एकीकडे ठेवावा लागतो. कां कीं  $a^b = b$  या समीकरणाचे जरी केवळ एक अंकगणितरूप उत्तर आहे, तरी केवळ एकच उत्तर आहे असे सिद्ध झाले नाही.

१ सिद्धांत. ० याचे लाग्रतम अनंत आहे; याचा अर्थ हाच, कीं यचे लाग्रतम नेहेमी १ याचे एके किंवा दुसऱ्या वाजूस ऋण आहे, तर जसजसा य अनियत घटत जातो, तसतसे त्याचे लाग्रतम अंकगणितरूपाने अनियत वाढत जाते.  $(\frac{1}{2})^b$  हे अनियत घटण्यासाठी, क्ष अंकगणितरूपाने अनियत वाढत जावा आणि तो धनही असावा; आणि  $2^b$  ऋण आहे, तर त्यास अनियत घटण्यासाठी क्षलाहि अंकगणितरूपाची वाढ अनियत असावी. यावरून २७२ पृष्ठावरचे प्रतिज्ञेचा अर्थ कळून येतो; आणि लक्षांत ठेविले पाहिजे, कीं बीजगणितामध्ये  $\infty$  हे चिन्ह धन किंवा ऋण असते, ह्मणून ही गोष्ट या पुढीलप्रमाणे दाखवितां येईल. जर  $y = \frac{1}{x}$ , तर  $y$  आणि क्ष यांस सारखे चिन्ह असावे; जर क्ष अनियत घटत जातो, तर तो ० या रूपाचे जवळ येतो, आणि अशा रूपास कांहीं चिन्ह नाही, कां कीं हे धन आणि ऋण परिमाणांचे मध्यांतील मर्यादा आहे. यामुळे  $y$ , हा अनियत वाढत असतां, तसेच मर्यादेचे जवळ होत जातो; कां कीं  $y$  आणि  $\frac{1}{x}$  याचे चिन्ह सारखेच आहे, तर क्षचे कोणतेहि रूप असेल, जास धन किंवा ऋणचिन्ह कल्पिले जाईल, तर यला ही त्यासारखेच चिन्ह कल्पितां येईल. परंतु वेगवेगळ्या उदाहरणांपासून जो या गोष्टीचा समज व्हावयाचा तो भूमितीशीं बीजगणित लागू करण्याचीं कांहीं अधिक उदाहरणे पाहिल्यावांचून, शिकणारास प्राप्त होणार नाही.

वरचे सिद्धांतांचे दृष्टांतांविषयीं हीं पुढील उदाहरणे सांगतों.

$$क्ष \times १ = क्ष$$

$$लाग क्ष + लाग १ = लाग क्ष$$

$$(लाग १ = ०)$$

$$क्ष = क्ष$$

$$१ \times लाग क्ष = लाग क्ष$$

$$\text{लाग}_{\text{अ}} \text{क्ष} = \text{लाग}_{\text{अ}} \text{क्ष} + \text{लाग}_{\text{अ}} \text{अ} = \text{लाग}_{\text{अ}} \text{क्ष} + १$$

$$\text{लाग} \text{क्ष} \sqrt{y} = \text{लाग} \text{क्ष} + \text{लाग} y^{\frac{1}{2}} = \text{लाग} \text{क्ष} + \frac{1}{2} \text{लाग} y$$

$$\text{लाग} \frac{\text{क्ष} y^{\frac{1}{3}}}{\text{पक्ष}^2} = \text{लाग} \text{क्ष} + \frac{1}{3} \text{लाग} y - \text{लाग} \text{प} - २ \text{लाग} \text{क}$$

$$\begin{aligned} \text{लाग} \left( \frac{\text{क्ष} y^{\frac{1}{3}}}{\text{पक्ष}^2} \right)^{-1} &= -१ \{ \text{लाग} \text{क्ष} + ३ \text{लाग} y - \text{लाग} \text{प} - (-१) \text{लाग} \text{क} \} \\ &= -\text{लाग} \text{क्ष} - ३ \text{लाग} y + \text{लाग} \text{प} - \text{लाग} \text{क} \end{aligned}$$

आतां लाग्रतमाचे संबंधाचे श्रेण्यांचा विचार करितों.

३५२ व्या पृष्ठावर, न आणि क्ष यांचे सर्व किमतींविषयीं हा पुढील सिद्धांत सिद्ध केला आहे,

$$\left\{ १ + १ + \frac{१ - \frac{1}{n}}{२} + \frac{१ - \frac{1}{n}}{२} \cdot \frac{१ - \frac{2}{n}}{३} + \text{इत्यादि} \right\}^{\text{क्ष}} = \left\{ १ + \text{क्ष} + \text{क्ष} \frac{\text{क्ष} - \frac{1}{n}}{२} + \text{क्ष} \frac{\text{क्ष} - \frac{1}{n}}{२} \cdot \frac{\text{क्ष} - \frac{2}{n}}{३} + \text{क्ष} \frac{\text{क्ष} - \frac{1}{n}}{२} \cdot \frac{\text{क्ष} - \frac{2}{n}}{३} + \text{क्ष} \frac{\text{क्ष} - \frac{1}{n}}{२} \cdot \frac{\text{क्ष} - \frac{2}{n}}{३} \cdot \frac{\text{क्ष} - \frac{3}{n}}{४} + \text{इत्यादि} \right\}$$

या दोन श्रेण्या या साधारणरूपाचा आहेत, ह्मणजे  $(१ + \frac{1}{n})^{\text{क्ष}}$ , ह्मणून ३४५ व्या पृष्ठाप्रमाणें जेव्हां १ पेक्षां  $\frac{1}{n}$  कमी आहे, किंवा जेव्हां १ पेक्षां न अधिक आहे, तेव्हां वरचा दोन श्रेण्या उतरत्या आहेत. आतां मनांत आण, कीं न अनियत वाढत जातो तर या पक्षांत वरचा श्रेण्यांची नियतता याप्रमाणें होईल, ह्मणजे

$$१ + १ + \frac{१ - \frac{1}{n}}{२} + \frac{१ - \frac{1}{n}}{२} \cdot \frac{१ - \frac{2}{n}}{३} + \text{इत्यादि याची नियतता} = १ + १ + \frac{1}{२} + \frac{1}{२ \cdot ३} + \text{इत्यादि}$$

$$\text{आणि } १ + \text{क्ष} + \text{क्ष} \frac{\text{क्ष} - \frac{1}{n}}{२} + \text{क्ष} \frac{\text{क्ष} - \frac{1}{n}}{२} \cdot \frac{\text{क्ष} - \frac{2}{n}}{३} + \text{इत्यादि याची नियतता}$$



$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots$$

परंतु  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots$  इत्यादि याची जवळची किंमत  $2.718281828 \dots$ , आणि यास  $e$  म्हटलें. यामुळे  $2.718$  पृष्ठाप्रमाणें,

$$e = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots$$

यामुळे, जर  $e$  पाया असेल, तर जा अंकाचें लाग्रतम क्ष आहे, तो अंक  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots$  इत्यादि आहे. यावरून, शोधण्याचे क्रमानें, जाचा पाया  $e$  आहे, असा जो लाग्रतमाचा पर्याय निघाला, त्यास लाग्रतमाचा स्वाभाविक पर्याय म्हणतात; इंग्लिश भाषेंत त्याची दुसरींहि नामें आहेत तीं एथें सांगण्याचें प्रयोजन नाहीं.

एथें ही गोष्ट लक्षांत ठेविली पाहिजे, कीं बीजगणिताचे पृथक्करणामध्यें, नुसता लाग असा शब्द आला, तर असें समजावें कीं त्या लाग्रतमाचा पाया  $e$  आहे, जेव्हां असें नसेल तेव्हां विशेषकरून सांगितलें असेल.

वरचें समीकरण नेहेमी खरें असतानां, याप्रमाणें होतें

$$e^{kx} = 1 + kx + \frac{k^2 x^2}{2} + \frac{k^3 x^3}{2 \cdot 3} + \dots$$

परंतु  $e^{kx} = (e^k)^x$ ; आणि जर  $e$  पाया असून अचें लाग्रतम  $k$  आहे असें कल्पिलें, तर  $e^k = a$ , आणि

$$(e^k)^x \text{ अथवा } a^x = 1 + (लाग अ) x + \frac{(लाग अ)^2 x^2}{2} + \frac{(लाग अ)^3 x^3}{2 \cdot 3} + \dots$$

यापासून हें निघतें, कीं जर  $x$  अनियत घटत जातो तर  $\frac{a^x - 1}{x}$  याची नियतता लागू होईल.



परंतु अशे नियततेची श्रेणी पूर्वी ३५२ पृष्ठावर मिळाली; यावरून

$$\text{लाग अ} = (अ - १) - \frac{१}{२}(अ - १)^२ + \frac{१}{३}(अ - १)^३ - \text{इत्यादि}$$

अथवा, जर अ = १ + ब, तर याप्रमाणें होईल

$$\text{लाग (१ + ब)} = ब - \frac{ब^२}{२} + \frac{ब^३}{३} - \text{इत्यादि} \dots\dots\dots (१)$$

बचे जागीं - ब मांड, तर याप्रमाणें होईल

$$\text{लाग (१ - ब)} = -ब - \frac{ब^२}{२} - \frac{ब^३}{३} - \text{इत्यादि} \dots\dots\dots (२)$$

वरचे पहिल्ये श्रेणींतून दुसरी वजा कर, तर

$$\text{लाग (१ + ब)} - \text{लाग (१ - ब)} = \text{लाग } \left( \frac{१ + ब}{१ - ब} \right)$$

$$\text{लाग } \left( \frac{१ + ब}{१ - ब} \right) = २ \left\{ ब + \frac{ब^३}{३} + \frac{ब^५}{५} + \text{इत्यादि} \right\} \dots\dots\dots (३)$$

$$\frac{१ + ब}{१ - ब} = \frac{१ + क्ष}{क्ष} \text{ असे घे, तर ब} = \frac{१}{२क्ष + १}$$

$$\text{लाग } \frac{१ + ब}{१ - ब} = \text{लाग } \frac{१ + क्ष}{क्ष} = \text{लाग (१ + क्ष)} - \text{लाग क्ष}$$

$$\text{लाग (क्ष + १)} - \text{लाग क्ष} = २ \left\{ \frac{१}{२क्ष + १} + \frac{१}{३} \cdot \frac{१}{(२क्ष + १)^३} + \frac{१}{५} \cdot \frac{१}{(२क्ष + १)^५} + \dots \right\} \dots (४)$$

या शेवटील श्रेणीपासून याप्रमाणें होतें

$$क्ष = १, \text{ लाग } २ = २ \left\{ \frac{१}{३} + \frac{१}{३} \cdot \frac{१}{२७} + \frac{१}{५} \cdot \frac{१}{२४३} + \text{इत्यादि} \right\}$$

$$क्ष = २, \text{ लाग } ३ = \text{लाग } २ + २ \left\{ \frac{१}{५} + \frac{१}{३} \cdot \frac{१}{१२५} + \frac{१}{५} \cdot \frac{१}{३१२५} + \text{इत्यादि} \right\}$$

$$क्ष = ३, \text{ लाग } ४ = \text{लाग } ३ + २ \left\{ \frac{१}{७} + \frac{१}{३} \cdot \frac{१}{३४३} + \frac{१}{५} \cdot \frac{१}{१६८०७} + \text{इत्यादि} \right\}$$

$$क्ष = ४, \text{ लाग } ५ = \text{लाग } ४ + २ \left\{ \frac{१}{९} + \frac{१}{३} \cdot \frac{१}{७२९} + \frac{१}{५} \cdot \frac{१}{५९०४९} + \text{इत्यादि} \right\}$$

वरप्रमाणें पूर्णांकांचीं लाघ्रतयें क्रमक्रमानें हवीं तेवढीं जवळ जवळ काढितां येतील, ह्मणजे ही गोष्ट या पुढील उदाहरणावरून दिसेल त्यांत खरेपणाचे जवळ जवळ होण्यासाठीं दशांशांचीं स्थळें अकरापर्यंत घेतलीं आहेत.



परंतु केवळ प्रेम ह्मणजे अविभाज्य अंकांविषयीं वरची श्रेणी कामांत आणण्याची गरज पडेल, आणि आरंभीं जे लाग्रतमाचे कोष्टक तयार झाले ते, या पुढील प्रमाणें. ५९, अथवा ५८+१ यांचें लाग्रतम काढायास इच्छिलें आहे, असें मनांत आण. आतां ५८=२×२९, ह्मणजे हे दोन फाकूटर अविभाज्य अंक आहेत; जर, २ आणि २९ यांचीं लाग्रतमें पूर्वी सापडलीं आहेत, तर ५८ यांचें लाग्रतम या पुढील समीकरणापासून निघेल,

$$\text{लाग } ५८ = \text{लाग } २ + \text{लाग } २९$$

आणि ५९ यांचें लाग्रतम या पुढील समीकरणापासून निघेल,

$$\text{लाग } ५९ = \text{लाग } ५८ + २ \left\{ \frac{1}{116} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(116)^3} + \text{इत्यादि} \right\}$$

आतां लाग २ यापासून आरंभ करून या पुढीलप्रमाणें निघतें;

$$\begin{aligned} \text{लाग } २ &= \text{एक दिलेली लेणी} & \text{लाग } ६ &= \text{लाग } ३ + \text{लाग } २ \\ \text{लाग } ३ &= \text{लाग } २ + \text{एक दिलेली श्रेणी} & \text{लाग } ७ &= \text{लाग } ६ + \text{एक दिलेली श्रेणी} \\ \text{लाग } ४ &= २ \text{ लाग } २ & \text{लाग } ८ &= ३ \text{ लाग } २ \\ \text{लाग } ५ &= \text{लाग } ४ + \text{एक दिलेली श्रेणी} & \text{लाग } ९ &= २ \text{ लाग } ३ \end{aligned}$$

$$\text{लाग } १० = \text{लाग } २ + \text{लाग } ५; \text{ आणि इत्यादि.}$$

३५४ पृष्ठावरून ही पुढील श्रेणी सिद्ध केली ह्मणजे,

$$ज-१ - \frac{1}{2}(ज-१)^2 + \text{इत्यादि} = \frac{1}{म} (ज^म - १ - \frac{1}{2}(ज^म - १)^2 + \text{इत्यादि})$$

आतां हें दिसतें, कीं वरची श्रेणी या पुढील सारिखीच आहे,

$$\text{लाग } ज = \frac{1}{म} \text{लाग } ज^म$$

आणि त्या श्रेणीवरून हें पुढील समीकरण अधिक उघड होतें असें दिसतें, ह्मणजे

$$\frac{ज^म - १}{म} \text{ याची नियतता} = ज - १ - \frac{1}{2}(ज-१)^2 + \text{इत्यादि} = \text{लाग } ज.$$

म अनियत घटता केला, अथवा म उत्तरोत्तर लहान लहान अपूर्णांक केला, अशे कल्पने वरून समजांत येतें, कीं ज चें उत्तरोत्तर अधिक अधिक मोठें मूळ काढावें लागतें. ज चें पुरतेपणीं मोठें मूळ काढिल्यानें इच्छेप्रमाणें ज<sup>म</sup> हवा तेवढा १ या जवळ आणतां येईल, अथवा इच्छेप्र-

माणें  $ज्ञ^m - १$  हवा तेवढा लहान करितां येईल; ह्मणजे ३१६ पृष्ठाप्रमाणें  $ज्ञ^m - १$  इच्छेप्रमाणें सगळ्या श्रेणीचे सर्व घना बरोबर हवा तितका जवळ जवळ करितां येईल. या मूळ कारणाचे आधारावरून, आणि ज्ञचें वर्गमूळ वारंवार काढिल्यानें लाग्रतमाचे कोष्टक पूर्वकाळीं या पुढील सारणीचे सहाय्यानें करित असत,

लाग ज्ञ =  $\left( \frac{१४०७३७४८८३५५३२८}{-१} \right) \times १४०७३७४८८३५५३२८$   
 फार जवळ जवळ, जो अंक घेतला तो २<sup>०</sup> आहे, ह्मणजे तो अंक ४७ वेळा वर्गमूळ काढिल्याचे बरोबर आहे.

पूर्वीप्रमाणें एकादशे पूर्णांकाचें लाग्रतम काढिल्यानंतर, अंशाचे लाग्रतमांतून छेदाचें लाग्रतम वजा केल्यानें, अपूर्णांकाचें लाग्रतम काढितां येईल.

ही पुढील गोष्ट सांगितली पाहिजे; जेव्हां क्ष मोठा अंक आहे तेव्हां,

लाग (क्ष+१) = लाग क्ष +  $\frac{२}{२क्ष+१}$  जवळ जवळ ३६३ पृष्ठ पहा.

याविषयाविषयीं जें सांगण्याचें बाकी राहिलें, तें पुढील अध्याय पर्यंत ठेविलें आहे. आतां तर वरचे श्रेणीचे कांहीं उपयोग दाखवितों.

लेम्मा. जर फ(क्ष) हें क्षचें असें फड्शन असेल, कीं फ(क्ष+य) याचा या पुढील श्रेणीचे रूपांत विस्तार करितां येईल, ह्मणजे

$$अ_० + अ_१ + अ_२ + अ_३ + \text{इत्यादि तर}$$

यांत जर  $अ_०$ ,  $अ_१$ , इत्यादि हीं केवळ क्षचीं फड्शनें असतील, तर

$$फ (अ+ब\sqrt{-१}) + फ(अ-ब\sqrt{-१})$$

याशीं नुसते साधारण रितीनें काम केलें असतां, ही पद्धति नेहेमी धन किंवा ऋण परिमाणांची दर्शक होईल, ह्मणजे, जीं परिमाणें केवळ चिन्हरूप अथवा अशक्यरूपाचीं आहेत तीं सर्व नाहींशीं होतील; परंतु दुसऱ्या पक्षीं

$$फ (अ+ब\sqrt{-१}) - फ(अ-ब\sqrt{-१})$$

ही या रूपाची होईल, ह्मणजे, एक शक्य परिमाण  $\times \sqrt{-१}$ .

यचें चिन्ह बदल करून पहिल्यानें फ (क्ष+य) याची किंमत मांड,  
आणि नंतर फ (क्ष-य) याची किंमत मांड;

$$फ (क्ष+य) = अ_० + अ_१ य + अ_२ य^२ + अ_३ य^३ + इत्यादि$$

$$फ (क्ष-य) = अ_० - अ_१ य + अ_२ य^२ - अ_३ य^३ + इत्यादि$$

यापासून,

$$फ (क्ष+य) + फ (क्ष-य) = २ अ_० + २ अ_२ य^२ + २ अ_४ य^४ + इत्यादि$$

$$फ (क्ष+य) - फ (क्ष-य) = २ अ_१ य + २ अ_३ य^३ + २ अ_५ य^५ + इत्यादि$$

क्षचे जागीं अ मांड, तर अ\_०, अ\_१, इत्यादि हीं केवळ अचीं फड्शनें  
होतात; यचे जागीं व  $\sqrt{-१}$  मांड, ह्मणजे मनांत आण, कीं

$$य = व \sqrt{-१}$$

$$य^२ = व^२ \times -१ = -व^२$$

$$य^३ = -व^२ \times व \sqrt{-१} = -व^३ \sqrt{-१}$$

$$य^४ = -व^३ \sqrt{-१} \times व \sqrt{-१}$$

$$= -व^४ \times -१ = व^४$$

यावरून,

$$फ (अ+व \sqrt{-१}) + फ (अ-व \sqrt{-१}) = २ अ_० - २ अ_२ व^२ + २ अ_४ व^४ -$$

इत्यादि

हे शक्य परिमाण आहे; आणि

$$फ (अ+व \sqrt{-१}) - फ (अ-व \sqrt{-१}) = २ अ_१ व \sqrt{-१} - २ अ_३ व^३ \times \sqrt{-१} + इत्यादि$$

$$= \{ २ अ_१ व - २ अ_३ व^३ + इत्यादि \} \sqrt{-१}$$

हे शक्यरूप परिमाण  $\times \sqrt{-१}$  आहे.

उदाहरणें.  $\frac{१}{अ+व \sqrt{-१}} + \frac{१}{अ-व \sqrt{-१}} = \frac{२अ}{अ^२+व^२}$

$$\frac{१}{अ+व \sqrt{-१}} - \frac{१}{अ-व \sqrt{-१}} = -\frac{२व}{अ^२+व^२} \sqrt{-१}$$



या पूर्वी या पुस्तकांत  $\sqrt{-1}$  असे चिन्ह कामांत आणण्याची योग्यता, केवळ अनुभवावर ठेविली, आहे २०९ पृष्ठ पहा; कोठपर्यंत खरी उत्तरे निघतील हे पहाण्याकरितां उलगाडण्याचे लांब क्रमाचे उत्तर शोधायाचा आतां प्रसंग आला आहे. वरचे (अ) आणि (ब) समीकरणांचा दोनहि बाजूमध्ये बरोबरीचे बीजगणितरूप चिन्ह मांडिले आहे; तर हेंच विचारायाचें आहे, कीं जे संबंध पहिल्या दोन बाजूंत आहेत, तेच संबंध यांचे दुसऱ्या बाजूंत असतील कीं नाहीं ?

$$\text{०क्षजें} = \frac{e^{क्ष\sqrt{-1}} + e^{-क्ष\sqrt{-1}}}{2} \text{ यास ० क्ष झण}$$

$$\text{आणि} \frac{e^{क्ष\sqrt{-1}} - e^{-क्ष\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \text{ यास } \psi \text{ क्ष झण}$$

तर यावरून याप्रमाणें होतें

$$(\text{०क्ष})^2 = \frac{e^{2क्ष\sqrt{-1}} + 2e^{क्ष\sqrt{-1}}e^{-क्ष\sqrt{-1}} + e^{-2क्ष\sqrt{-1}}}{4}$$

$$(\psi \text{ क्ष})^2 = \frac{e^{2क्ष\sqrt{-1}} - 2e^{क्ष\sqrt{-1}}e^{-क्ष\sqrt{-1}} + e^{-2क्ष\sqrt{-1}}}{-4}$$

$$(\text{०क्ष})^2 + (\psi \text{ क्ष})^2 = \frac{4e^{क्ष\sqrt{-1}}e^{-क्ष\sqrt{-1}}}{4} = e^0 = 1$$

$$(\text{०क्ष})^2 - (\psi \text{ क्ष})^2 = \frac{e^{2क्ष\sqrt{-1}} + e^{-2क्ष\sqrt{-1}}}{2} = \text{० २क्ष}$$

$$\text{०क्ष} \times \psi \text{ क्ष} = \frac{e^{2क्ष\sqrt{-1}} - e^{-2क्ष\sqrt{-1}}}{4\sqrt{-1}} = \frac{1}{2} \psi (2 \text{ क्ष})$$

तर

$$(\text{०क्ष})^2 + (\psi \text{ क्ष})^2 = 1 \quad (\text{०क्ष})^2 - (\psi \text{ क्ष})^2 = \text{०}(2 \text{ क्ष})$$

$$2 \text{ ०क्ष} \times \psi \text{ क्ष} = \psi (2 \text{ क्ष})$$

या तीन संबंधांविषयी हेंच विचारायाचें आहे, कीं (अ) आणि (ब) या समीकरणांचा दुसऱ्या बाजूंविषयी हे संबंध खरे आहेत कीं नाहीं ?

कोणतीही श्रेणी तिणें तीच गुणायाची असेल, तर तिचा गुणाकार या पुढील रितीवरून निर्घेल; प्रत्येक पदाचा वर्ग कर, आणि त्याचे पुढील सर्व पदे त्याच पदाचे दुपटीने गुण. ह्मणजे (अ) या श्रेणीचा वर्ग याप्रमाणें आहे.

$$\begin{aligned} 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{3 \cdot 4} - \frac{x^6}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \text{इत्यादि} \\ + \frac{x^2}{2^3} - \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{इत्यादि} \\ + \text{इत्यादि} \end{aligned}$$

(ब) या श्रेणीचा वर्ग याप्रमाणें आहे

$$\begin{aligned} x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{3 \cdot 4 \cdot 5} - \text{इत्यादि} \\ + \frac{x^4}{2^3 \cdot 3^2} - \text{इत्यादि} \\ - \text{इत्यादि} \end{aligned}$$

यांत पहिला वर्ग दुसऱ्याने अधिक केला असता, याप्रमाणें होईल,

$$1 + \left\{ \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{3} \right\} x^2 - \left\{ \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{1}{2^3 \cdot 3^2} \right\} x^4 + \text{इ०}$$

$$= 1 + \{ 0 \} - \{ 0 \} + \text{इ०}$$

आणि पहिल्यांत दुसरा वर्ग वजा केला असता, याप्रमाणें होईल,

$$1 - 2x^2 + \left\{ \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3} \right\} x^4 - \left\{ \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{2^3 \cdot 3^2} \right\} x^6 + \text{इत्यादि}$$

$$= 1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{(2x)^6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \text{इत्यादि}$$

गुणाकारानें याच रितीप्रमाणें तिसरा संबंधहि खरा होईल. (अ) आणि (ब) या समीकरणांचे पहिल्ये आणि दुसऱ्ये बाजूंविषयी तशेंच रितीनें हीं पुढील उत्तरें सिद्ध करितां येतील.

$$\begin{aligned} \phi(x+y) &= \phi x \phi y - \psi x \psi y & \psi(x+y) &= \psi x \phi y + \phi x \psi y \\ \phi(x-y) &= \phi x \phi y + \psi x \psi y & \psi(x-y) &= \psi x \phi y - \phi x \psi y \end{aligned}$$



$e^{\sqrt{-1}}$  यास  $p$  ह्मण, आणि  $\frac{\psi x}{\theta x}$  यास  $(x)$  अथवा  $\chi$  ह्मण, तर (अ) आणि (ब) हीं समीकरणें याप्रमाणें होतील,

$$\frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \frac{p - \frac{1}{p}}{p + \frac{1}{p}} = \frac{\psi x}{\theta x} = x \text{ अथवा } \frac{p^2 - 1}{p^2 + 1} = \sqrt{-1} \cdot x$$

यावरून 
$$p^2 = \frac{1 + \sqrt{-1} x}{1 - \sqrt{-1} x} \quad ३६२ \text{ पृष्ठाप्रमाणें}$$

$$\begin{aligned} \text{लाग } p^2 &= 2 \left\{ \sqrt{-1} x + \frac{1}{3} (\sqrt{-1} x)^3 + \text{इत्यादि} \right\} \\ &= 2 \sqrt{-1} \left\{ x - \frac{1}{3} (x)^3 + \frac{1}{5} (x)^5 - \text{इत्यादि} \right\} \end{aligned}$$

परंतु  $p^2 = e^{2\chi\sqrt{-1}}$  अथवा लाग  $p^2 = 2\chi\sqrt{-1}$ , यामुळे

$$\chi = x - \frac{1}{3} (x)^3 + \frac{1}{5} (x)^5 - \text{इत्यादि.}$$

(अ) आणि (ब) या दोन श्रेण्या नेहेमी उतरल्या आहेत, हे ३१२ आणि ३१३ पृष्ठांवरून सिद्ध करितां येईल; परंतु  $\chi$  पुरते पूर्ण मोठा केल्याने, कोणतेहि पद ते कितीहि लांब असले, त्यापासून उतरण्याचा आरंभ होई असें करितां येईल. ह्मणजे, जर  $\chi = १०००$  असले, तर या पुढील लिहिलेल्या प्रदाचे पूर्वी पहिल्या श्रेणीचे उतरण्याचा आरंभ होणार नाही.

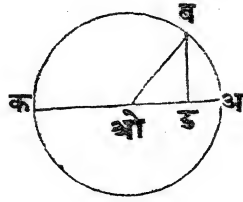
$\chi^{२६४}$

२.३ ४.५.....२६३.२६४

परंतु लक्षांत ठेविलें पाहिजे, कीं पदे अनुक्रमानें धन आणि ऋण आहेत, तर जरी श्रेणीचीं पहिलीं पदे मोठीं आहेत, तथापि  $\theta x$  आणि  $\psi x$  यांची खरी किंमत १ पेक्षा अधिक कधीं होऊं शकत नाहीं; कां कीं १ हा धन असेल किंवा ऋण असेल, त्यापेक्षां वरचा दोहोंतून एक तरी अंकगणितरूपानें अधिक असला, तर  $(\theta x)^2 + (\psi x)^2 = १$  हे खरें होण्यास अशक्य.

### ३७२ घातप्रकाशकांची आणि लाग्रतमाची श्रेणी यांविषयी.

त्रिकोणमितीमध्ये, वरचे श्रेण्यांचे गुण या पुढील रितीने भूमितीशी जोडिलेले आहेत. एक वर्तुळ कर;



आणि अ बिंदूपासून ब बिंदू पुढे चालतो, असा की शेवटीं त्याचे चालण्यापासून ओअ त्रिज्येचा क्ष वेळांचे लांबी बरोबर कौस होतो, आणि हवी तर वर्तुळाची पुनः प्रदक्षिणा करावी. बड रेष कअ रेषेवर लंब कर; तेव्हा सिद्ध करितां येईल, कीं बड हज्जजे  $\psi$  क्ष हा ओअचा अपूर्णाक आहे आणि ओड हज्जजे  $\phi$  क्ष हा ओअचा अपूर्णाक आहे.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

१.  $\frac{1+\psi}{1+\frac{1}{\psi}} = \psi$ , या समीकरणाचे सहाय्याने,

हें पुढील समीकरण सिद्ध कर,

$$\text{लाग क्ष} = \psi - \frac{1}{\psi} - \frac{1}{2} \left( \psi^2 - \frac{1}{\psi^2} \right) + \frac{1}{3} \left( \psi^3 - \frac{1}{\psi^3} \right) - \text{इत्यादि}$$

२. हें पुढील सिद्ध कर,

$$e^{\psi\sqrt{-1}} = \phi \text{ क्ष} + \sqrt{-1} \psi \text{ क्ष}$$

$$e^{-\psi\sqrt{-1}} = \phi \text{ क्ष} - \sqrt{-1} \psi \text{ क्ष}$$

$$(\phi \text{ क्ष} + \sqrt{-1} \psi \text{ क्ष})^m = \phi (\text{मक्ष}) + \sqrt{-1} \psi (\text{मक्ष}).$$

## तेरावा अध्याय.

गणितकृति सोपी करण्यासाठीं लाग्रतम कामांत आणण्याचा

रितीविषयीं.

पूर्वीचा अध्यायामध्ये स्वाभाविक लाग्रतमाचा पर्याय दाखविला, त्यांत अंशाचे लाग्रतमांतून छेदाचे लाग्रतम वजा केल्यानें अपूर्णाकाचे लाग्रतम निघते, या शिवाय दुसरी कांहीं सोपी रीति नाहीं. आणि तो पर्याय गणितकृति करण्याचे साधन आहे खरे, परंतु त्यांत वर सांगितलेला कमीपणा आहे. उदाहरण, \*३ यांचें लाग्रतम काढण्याची या पुढील पक्षां दुसरी कांहीं तोंकडी रीति नाहीं, ह्मणजे

लाग३-लाग१० अथवा  $१०९८६१२२९-२०३०२५८५०९=-१०३९७२८०$

३ चे लाग्रतम आणि \*३, \*०३, इत्यादि यांचीं लाग्रतम यांमध्ये वरपक्षां कांहीं अधिक स्पष्ट संबंध दिसून येण्याविषयीं दुसरा पर्याय काढितों.

लाग<sub>अ</sub> क्ष याचा मुळरूप व्याख्यानापासून हें होतें

$$\text{क्ष} = \text{अ}^{\text{लागअक्ष}} \quad \text{अ} = \text{क्ष}^{\frac{१}{\text{लागअक्ष}}}$$

तर याप्रमाणे होतें  $\text{क्ष} = \text{अ}^{\text{लागअक्ष}} = \text{ब}^{\text{लागबक्ष}}$

परंतु  $\text{ब} = \text{अ}^{\text{लागअब}} \therefore \text{क्ष} = \text{अ}^{\text{लागअब लागबक्ष}}$

साच सारिलें  $\text{क्ष} = \text{अ}^{\text{लागअक लागक व लागबक्ष}}$   
 $= \text{अ}^{\text{लागअक लागक व लागबक्ष}}$

हे शेवटील उत्तर या पुढीलप्रमाणे सिद्ध करितां येईल;

$$\begin{aligned} \text{अ } \frac{\text{लागअ इ लागइ क लागअ व लागवक्ष}}{\text{अ}} &= \left\{ \begin{array}{l} \text{लागअइ} \\ \text{अ} \end{array} \right\} \frac{\text{लागइ क लागक व लागक्ष}}{\text{अ}} \\ &= \frac{\text{लागइ क लाग क व लागक्ष}}{\text{इ}} = \frac{\text{लागक व लागवक्ष}}{\text{क}} = \frac{\text{लागवक्ष}}{\text{व}} = \text{क्ष} \end{aligned}$$

आतां, अ यास एकच अंक गणित रूप घातप्रकाशक लावितां येईल, जापासून क्ष असें उत्तर निघेल; कां कीं, शक्य असेल तर त्यास दोन घातप्रकाशक प आणि क आहेत असें मनांत आण, आणि  $\text{अ}^{\text{प}} = \text{क्ष}$ ,  $\text{अ}^{\text{क}} = \text{क्ष}$  असें घे, यावरून  $\text{अ}^{\text{प}} = \text{अ}^{\text{क}}$ , आणि  $\text{अ}^{\text{प}-\text{क}} = १$ ; या मुळे  $\text{प}-\text{क} = ०$ , अथवा  $\text{प} = \text{क}$ , ह्याजळे कल्पना केल्याप्रमाणे, प आणि क यांमध्ये कांहीं भेद नाही. यावरून,

$\text{क्ष} = \text{अलागअ क्ष} = \text{अलागअ व लागवक्ष}$ , असें असतां हे पुढील होतें,

$\text{लागअ क्ष} = \text{लागअ व लागवक्ष} = \text{लागअ क लागक व लागवक्ष इ०}$ .  
या पुढील एकरूप समीकरणाचे सहाय्याने हीं वरचीं उत्तरे स्मरणांत रहातील.

$$\frac{\text{क्ष}}{\text{अ}} = \frac{\text{क्ष व}}{\text{व अ}}$$

$$\frac{\text{क्ष}}{\text{अ}} = \frac{\text{क्ष व क}}{\text{व क अ}}$$

यापासून हा पुढील सिद्धांत होतो;

$$\frac{\text{अ}}{\text{व}} = \frac{\text{अ क}}{\text{क व}} = \frac{\text{अ इ क}}{\text{इ क व}} = \frac{\text{अ फ इ क}}{\text{फ इ क व}} \text{ इत्यादि}$$

जर प्रत्येक अपूर्णाकाचे जागीं त्याचे छेदाचे पायास त्याचे अंशाचे लाग्रतय घेऊन मांडिले असतां, वरचे समीकरणाची श्रेणी खरी होईल.

$\frac{\text{अ व}}{\text{व अ}} = \frac{\text{अ}}{\text{अ}}$  याचे सहाय्याने स्मरणांतर होतें कीं,  $\text{लागव अ लागअ व} = \text{लागअ अ} = १$

अथवा

$$\text{लागअ व} = \frac{१}{\text{लागव अ}}$$

होईल

$$\text{लाग}_{\text{अ}} = \frac{\text{लाग}_{\text{अक्ष}}}{\text{लाग}_{\text{अव}}}$$

अथवा; जा लाघ्रतमाचा पाया अ आहे, अशा कांहीं दिलेल्या पर्यायास दुसऱ्या व पायाचा पर्यायांत रूपभेद करण्याकरितां, प्रत्येक दिलेल्या लाघ्रतमास वचा दिलेल्या लाघ्रतमानें भाग.

व्यवहारांत सर्व अपूर्णाकास दशांशअपूर्णाकांचें रूप देण्यास सोंईस पडतें, तर जो पाया निवडून घेण्यास योग्य आहे, तो असा असावा कीं १०, १००, इत्यादि याचें लाघ्रतम पूर्णांक असावें, ह्मणजे तो पाया १० असावा. कां कीं, अशा पक्षांत याप्रमाणें होईल,

लाग १०=१, लाग १००=२, लाग १०००=३, इत्यादि आणि जर कोणत्याहि अंकाचें लाघ्रतम दाखविण्यासाठीं प घेतला, ह्मणजे जर तो अंक २५ आहे, तर याप्रमाणें होईल

$$\begin{aligned} \text{लाग } २५ &= \text{लाग } २५ - \text{लाग } १० = ५ - १ \\ \text{लाग } २५ &= \text{लाग } २५ - \text{लाग } १०० = ५ - २ \\ \text{लाग } २५ &= \text{लाग } २५ - \text{लाग } १००० = ५ - ३ \text{ इत्यादि} \\ \text{लाग } २५० &= \text{लाग } २५ + \text{लाग } १० = ५ + १ \\ \text{लाग } २५०० &= \text{लाग } २५ + \text{लाग } १०० = ५ + २ \text{ इत्यादि} \end{aligned}$$

तर अशानें, जेव्हां पाया १० आहे, तेव्हां अंकांत जर दशांशचिन्हाचा स्थळभेद झाला, तर लाघ्रतमाला कांहीं पूर्णांक मात्र मिळवावे किंवा खांतून वजा करावे लागतील.

जा लाघ्रतमाचे पर्यायाचा पाया १० आहे, तो पर्याय या पुढील समीकरणाचे सहाय्यानें स्वाभाविक पर्यायापासून काढिला आहे,

$$\text{लाग}_{\text{१०}} = \frac{\text{लाग}_{\text{क्ष}}}{\text{लाग}_{\text{१०}}} = \frac{\text{लाग}_{\text{क्ष}}}{२३०२५८५०९} = \text{लाग}_{\text{क्ष}} \times \frac{४३४२९}{४४८१९}$$

या लाघ्रतमाचे पर्यायास साधारण किंवा कोष्टकरूप किंवा दशांशरूप, अथवा त्रिगसाहेबाचा पर्याय असें ह्मणतात; आणि ४३४२९...

यांस त्या पर्यायाचा माड्यूलस ह्मणतात; आणि सामान्यतः जा पर्यायाचा पाया अ आहे, त्याचा माड्यूलस  $१ \div$  लागू अ, अथवा लागू अ आहे.

या अध्यायांत पुढे जा लाग्रतमाविषयी विचार होईल, तीं सर्व साधारण लाग्रतमे आहेत असे मनांत ठेवावे.

सांगितलेल्या अंकांचे लाग्रतम किंवा सांगितलेल्या लाग्रतमापासून अंक कसे काढवे. हे दाखविण्यासाठी लाग्रतमाचे काही कोष्टकांची रचना दाखवितो.

### १. लालांड साहेबाची रचना.

अंक	लाग्रतम	वाकी	अंक	लाग्रतम	वाकी
१०८०	३०३३४२		१११०	३०४५३२	
१०८१	३०३३८३	४१	११११	३०४५७१	३९
१०८२	३०३४२३	४०	१११२	३०४६१०	३९
१०८३	३०३४६३	४०	१११३	३०४६५०	४०
१०८४	३०३५०३	४०	१११४	३०४६८९	३९
इ०	इ०	इ०	इ०	इ०	इ०

### २. शेर्वीन हट्टन वाब्जे, या तीन साहेबांची रचना.

अंक	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९	वाकी
५१५०	७११०७२	८१५७	८२४१	८३२५	८४१०	८४९४	८५७८	८६६३	८७४७	८८३१	८८
१	८९१५	९०००	९०८४	९१६८	९२५३	९३३७	९४२१	९५०६	९५९०	९६७४	१८
२	९७५९	९८४३	९९२७	००११	००९६	०१८०	०२६४	०३४९	०४३३	०५१७	२८
३	७१२०६०१	०६८६	०७७०	०८५४	०९३९	१०२३	११०७	११९१	१२७६	१३६०	३८
४	१४४४	१५२८	१६१३	१६९७	१७८१	१८६५	१९५०	२०३४	२११८	२२०२	४८
इ०	इ०	इ०	इ०	इ०	इ०	इ०	इ०	इ०	इ०	इ०	इ०

बडतकरून लाग्रतमांत काही पूर्णांक, आणि त्याचे पुढे दशांश अपूर्णांक असे जोडिलेले असतात, ते दोन्ही किंवा यांतून एक ऋण अस-

तो ; परंतु बहुतकरून कोष्टकांमध्ये धन दशांश अपूर्णाक यांशिवाय दुसरें मांडीत नाहीं. सर्व पक्ष घेऊन ही रचना कशी आहे हें आतां दाखवितों.

१. एक ऋण लाघ्रतम घे, जसें—३·१६८०४, हें या पुढील रूपाचें आहे, —३·१६८०४, अथवा—४+(१-१६८०४), अथवा—४+८३१९६. असें लाघ्रतम विशेषेंकरून याप्रमाणें मांडितात, ४·८३१९६ यांत, चो-होंवर जें ऋणचिन्ह मांडिलें तें हें दाखवितें, कीं तो अंक मात्र ऋण आहे. यावरून, १३ यांचा अर्थ—१०+३, अथवा—७ आहे, १३६ यांचा अर्थ १०६-३० अथवा ७६ आहे. या रितीनें, प्रत्येक ऋण लाघ्रतमाचा रूपभेद असा करितां येईल, कीं त्याचा दशांश भाग धन होईल.

२. लाघ्रतमाचे दशांशाचा जो अंक आहे तो अंक कळल्यावर, सर्व लाघ्रतमाचा अंक आहे तो तरेनें या पुढील कोष्टकावरून काढितां येईल.

लाग $\frac{1}{1000}$ अथवा लाग $10^{-3} = -३$	लाग १० अथवा लाग $10^1 = १$
लाग $\frac{1}{100}$ अथवा लाग $10^{-2} = -२$	लाग १०० अथवा लाग $10^2 = २$
लाग $\frac{1}{10}$ अथवा लाग $10^{-1} = -१$	लाग १००० अथवा लाग $10^3 = ३$

जसें, ३०१०३ या लाघ्रतमाचा अंक जवळ जवळ २ आहे ; ह्मणजे, ३०१०३ = लाग २; यामुळे, १·३०१०३ = लाग १ + लाग २ = लाग २०, १·३०१०३ = लाग  $\frac{1}{10}$  + लाग २ = लाग  $\frac{२०}{१०}$  = लाग २, आणि याप्रमाणें पुढेंहि.

जर एकमापेक्षां कमी, काहीं दशांश अपूर्णाक असेल, आणि त्यास दाखविण्यासाठीं ड घेतला, तर ३५९ पृष्ठावरून हें कोष्टक होतें,

या खालील सांगितलेल्या अंकां या खालचा अंक- मधील अंकांचे लाग्रतम-	अथवा असावे.	आणि यामुळे तो अंक या खालचे रूपाचा असावा.	अशा अंकांची उदा- हरणे.
$\frac{1}{1000}$ आणि $\frac{1}{100}$	-३ आणि -२	-३ + ड	००१३, ०००८
$\frac{1}{100}$ आणि $\frac{1}{10}$	-२ आणि -१	-२ + ड	०१४, ०७३८
$\frac{1}{10}$ आणि १	-१ आणि ०	-१ + ड	१०३, ४२९६
१ आणि १०	० आणि १	० + ड	२५६, ७९९
१० आणि १००	१ आणि २	१ + ड	११०३, ४५९६
१०० आणि १०००	२ आणि ३	२ + ड	१५९, १५९१०८
६०	६०	६०	६०

**व्याख्यान.** साधारण लाग्रतमाचा पूर्ण भाग, तो धन असो किंवा ऋण असो, त्यात त्या लाग्रतमाचा गुणप्रकाशक ह्मणतात; आणि त्याचा दशांशभागास मान्टिस्सा ह्मणतात. जे पूर्वी सांगितलेल्यापासून जे सिद्धांत स्पष्ट निघतात, त्यांतून काहीं सांगतो.

१. (जा लाग्रतमांत ० सुद्धा पूर्णांक येतो) त्यांत दशांश चिन्हाचे स्वळाचा कसाहि भेद केल्याने लाग्रतमाचा मान्टिस्सामध्ये काहीं भेद होत नाही, परंतु त्याचे गुणप्रकाशकांमध्ये मात्र भेद होतो.

२. जेव्हां अंकाचे दशांश चिन्हाचे पूर्वी अर्थरूप अंक येतात, तेव्हां लाग्रतमाचा गुणप्रकाशक, धन आहे, आणि तो त्या अंकस्थळांचे संख्येत एक एक करी इतका असतो. जसे, १२३४५६७ यांचे लाग्रतम ४+ मान्टिस्सा आहे; ६९ यांचे लाग्रतम ०+ मान्टिस्सा आहे.

३. जेव्हां दशांशचिन्हाचे पूर्वी अर्थरूप अंक येत नाहीत, तेव्हां लाग्रतमाचा गुणप्रकाशक ऋण आहे, आणि पहिल्या अर्थरूप अंकाचे पूर्वी जितकी ० स्वळांची संख्या येती, त्यापेक्षा एक अधिक इतका गुणप्रकाशक असतो. जसे, ०००८३ यांचे लाग्रतम-४+ मान्टिस्सा आहे आणि ८३ यांचे लाग्रतम-१+ मान्टिस्सा आहे.

सांगितलेला अंक पूर्णांक आहे असे कल्पून, लालांड साहेबाचा को. ह्यांत लाग्रतमाचे आंकडे दिलेले असतात; जसे १०८१ यांचे लाग्रतम ३०३३८३ असे आहे. परंतु त्या कोष्टकांतून १०८१ यांचे लाग्रतम काढावाचे असेल, तर ०३३८३ हा मान्टिस्सा मात्र घ्यावा,



आणि त्याला ० प्रकाशक जोडावा. जसे, १०८१ यांचे लाघतम ००३३८३ आहे, आणि वर सांगितलेल्या रितीवरून हा पुढील कोष्टक होतो;

लाग १०८१००० = ६०३३८३	लाग १०८१ = ००३३८३
लाग १०८१०० = ५०३३८३	लाग १०८१ = १०३३८३
लाग १०८१० = ४०३३८३	लाग १०८१ = २०३३८३
लाग १०८१ = ३०३३८३	लाग १०८१ = ३०३३८३
लाग १०८१ = २०३३८३	लाग १०८१ = ४०३३८३
लाग १०८१ = १०३३८३	लाग १०८१ = ५०३३८३

दुसरे कोष्टकांत ५ अंकस्थळांचे अंकांचीं लाघतमें आहेत. पहिल्या कोष्टकांतून ५१५३ आणि ५१५४, अथवा ५१५३० आणि ५१५४० यांचीं हिं लाघतमें काढितां येतील; कां कीं त्यांत केवळ गुणप्रकाशकाचा मात्र भेद आहे; परंतु या दोन शेवटील अंकांमध्ये जे अंक येतात त्यांचीं लाघतमें ह्याणजे ५१५३१, ५१५३२, ..., ५१५३९ यांचीं लाघतमें दुसऱ्या कोष्टकांतून काढितां येतील.

आतां लक्षांत आणिलें पाहिजे, कीं जेव्हां एकाचे संख्येमध्ये एक अंक बदल होतो, तेव्हां लाघतमांतील जो पहिल्यानें अंक बदल होतो तो अंक संख्येतील बदललेल्या अंकाप्रमाणें डाय्येकडे जवळ किंवा दूर जाईल. ही गोष्ट या ह्याणण्याप्रमाणें आहे, कीं सर्व अंकांचे प्रमाणाशीं जितका अंकाचा फेर लहान आहे, तितका लाघतमामध्ये फेर लहान होईल, आणि ही गोष्ट या पुढील सिद्धांतावरून दाखवितां येईल. ३६३ आणि ३७५ पृष्ठांवरून १+क्ष यांचे साधारण लाघतम (म = ४३४२९....) हे घेऊन,

$$\text{लाग } १+क्ष = \text{लाग } क्ष + २म \left( \frac{१}{२क्ष+१} + \frac{१}{३} \cdot \frac{१}{(२क्ष+१)^३} + \text{इत्यादि} \right) \text{ आहे,}$$

यामुळे लाग १+क्ष होण्यासाठीं जें काहीं लाग क्षमध्ये मिळवावें लागतें तें असजसा क्ष मोठा होत जातो, तसें तें मिळवायाचें कमी होतें. ही गोष्ट या पुढील उदाहरणापासून स्पष्ट होईल, त्यांत जा अंकाचा बदल होतो, यास (') या चिन्हाने खुणाविला आहे. वेगळेवेगळे अंक

आणि त्यांची लाग्रतमें पहिल्याने मांडिली आहेत, आणि त्यांचे उजवे बाजूस पहिल्या कोष्टकांत फेर केलेल्या अंकाचे मूळचे संख्येशी जें प्रमाण होते तें मांडिलें आहे ; आणि दुसऱ्या कोष्टकांत एकमात्रा केवढा फेर लाग्रतमामध्ये होतो, तो सुमारानें मांडिला आहे.

		मूळचे सर्व अंका- शी फेराचें प्रमाण.	लाग्रतमांतील खरा फेर.
{ लाग १'	= ०.००००००००	१	$\frac{१}{३}$
{ लाग २'	= ०.३०१०३००	$\frac{१}{१०}$	$\frac{१}{२५}$
{ लाग १०'	= १.००००००००	$\frac{१}{१००}$	$\frac{१}{२५०}$
{ लाग ११'	= १.०४१३९२७	$\frac{१}{१०००}$	$\frac{१}{२५००}$
{ लाग १००'	= २.००००००००	$\frac{१}{१००००}$	$\frac{१}{२५०००}$
{ लाग १०१'	= २.००४३२१४	$\frac{१}{१०००००}$	$\frac{१}{२५००००}$
{ लाग १०००'	= ३.००००००००	$\frac{१}{१००००००}$	$\frac{१}{२५०००००}$
{ लाग १००१'	= ३.०००४३४१		
{ लाग १००००'	= ४.००००००००		
{ लाग १०००१'	= ४.००००४३४		
{ लाग १०००००'	= ५.००००००००		
{ लाग १००००१'	= ५.०००००४३		

यावरून, सुमारानें, लाग्रतमाचे मानदिस्तामध्ये जो खरा फेर पडतो तो त्याचे बरोबरीचे अंकांतील फेराचे अर्धापेक्षा कांहीं कमी असतो, ही गोष्ट शिकणारानें बर दिलेल्या श्रेणीपासून काढायास यत्न करावा. जसे, जर कांहीं अंक त्याचे सहस्रांशानें वाढतो, तर लाग्रतमाची वाढ  $\frac{१}{२०००}$  या अपूर्णाकापेक्षा कमी होईल, आणि याप्रमाणें पुढें हि. यावरून, कोणत्याहि कोष्टकांत लाग्रतमाचीं अंकस्थळें किती काढायाचें अगत्य आहे तें पुरतेपणीं कळेल. ह्मणजे मनांत आण, कीं असा एक कोष्टक करायाचा आहे, जांत १०००० पासून ९९९९९ पर्यंत प्रत्येक पांच स्थळांचा अंक यावा. कोष्टकाचें शेवटीं अंकाचा फेर सुमारानें  $\frac{१}{१०००००}$  होतो, आणि यामुळे लाग्रतमाची खरी वाढ  $\frac{१}{२५००००}$  अथवा ०.०००००४ आहे. यामुळे लाग्रतमाचीं अंकस्थळें सहा अगत्य

असावीं. सहा स्थळांपेक्षां कमी असलीं, तर फेर दिसून येणार नाही; उदाहरण,

$$\text{लाग } ९९८४६ = ४ \cdot ९९९३३०७$$

$$\text{लाग } ९९८४७ = ४ \cdot ९९९३३५०$$

या दोन लाग्रतमांमध्ये साहाय्ये स्थळीं मात्र भेद आहे. कोष्टकाचे आरंभी अंकांची वाढ  $\frac{1}{10000}$  यापेक्षां किंचित अधिक आहे, आणि लाग्रतमाची खरी वाढ  $0.00008$  जवळ जवळ आहे, तेथे पांच अंक-स्थळे पुरेशीं होतील. परंतु व्यवहाराचे सोयीसाठी, सर्व कोष्टकांत अंकस्थळे सारखींच असलीं पाहिजेत, यामुळे थोडी तरी साहा अंक-स्थळे असावीं. वरचा दुसऱ्या कोष्टकांत अंकांचीं पांच स्थळे आहेत, आणि त्यांचे समोर लाग्रतमाचीं सात स्थळे आहेत. परंतु लाग्रतमाचीं पहिलीं तीन स्थळे काहीं वेळापावेतो सारखींच रहातात, यासाठी, अद्यापि कोष्टकामध्ये फेर पुष्कळ होतो, तथापि जा जागीं फेर होतो, त्या जागीं ते अंक पहिल्या ओळींत मांडिलेले असतात; येणेकरून पुष्कळ जागा वांचती, परंतु तसे रचनेपासून, हीच अडचण होती, कीं लाग्रतमाचे तिसऱ्या अंकाचा फेर ओळीचे प्रारंभीच क्वचित पडतो, तर तिसरा नवा अंक पहिल्यानें दृष्टीस पडे तोपर्यंत मांडिता येत नाही. ही पुढील उदाहरणे जीं दुसऱ्या कोष्टकांतून काढिली आहेत, तीं त्या कोष्टकाची रचना आणि ही नवी अडचण, शब्दांनीं सांगितल्यापेक्षां अधिक चांगली दाखवितील.

अंकसंख्या.	लाग्रतमाचा मान्दिसा.	अंकसंख्या.	लाग्रतमाचा मान्दिसा.
५१५२०	७११ ९७५९	५१५२६	७१२ ०२६४*
५१५२१	७११ ९८४३	५१५२७	७१२ ०३४९*
५१५२२	७११ ९९२७	५१५२८	७१२ ०४३३*
५१५२३	७१२ ००११*	५१५२९	७१२ ०५१७*
५१५२४	७१२ ००९६*	५१५३०	७१२ ०६०१
५१५२५	७१२ ०१८०*	५१५३१	७१२ ०६८६

\* या सर्वांत मान्दिसाचे पहिले तीन अंकाविषयी खाली पाहिलें पाहिजे.

या कोष्टकांत पहाण्यांत येईल, कीं प्रत्येक लाग्रतम आणि त्याचे पूर्वीचे लाग्रतम यांचे अंतर  $\cdot 000000\angle 3$  किंवा  $\cdot 000000\angle 8$  किंवा  $\cdot 000000\angle 5$  आहे. सारांश,  $५१५२०$  आणि  $५१५२०+१०$  यांचे लाग्रतमांचे अंतर  $\cdot 000000\angle 8२$  आहे, ह्मणजे जशी अंकसंख्या क्रमाने एकएक वाढत जाते, तशी लाग्रतमांची मध्यम वाढ  $\cdot 000000\angle 8$  इतकी होती. यावरून,  $५१५२०$  या अंकाचे जागी आणि त्याचे जवळचे अंकाचे जागी हीं पुढील समीकरणे होतात;

$$\text{लाग } (५१५२०+१) = \text{लाग } ५१५२० + \cdot 000000\angle 8$$

$$\text{लाग } (५१५२०+२) = \text{लाग } ५१५२० + \cdot 000000\angle 8 \times २$$

अथवा जर  $१०$  पेक्षा ह अधिक नसेल, तर

$$\text{लाग } (५१५२०+ह) = \text{लाग } ५१५२० + \cdot 000000\angle 8 \times ह \dots (अ)$$

अथवा कोष्टकांतील लहान भागाविषयी, जेव्हां अंकसंख्या एकएकाने वाढत जातात, तेव्हां त्यांची लाग्रतमे जवळ जवळ गणितश्रेढीप्रमाणे वाढत जातात. आतां  $३६३$  आणि  $३७६$  पृष्ठांवरून  $म = \cdot 8३४२९\dots$  असे असून,

$$\begin{aligned} \text{साधारण लाग } (१+\frac{ह}{क्ष}) &= म \left( \frac{ह}{क्ष} - \frac{१}{२} \left( \frac{ह}{क्ष} \right)^2 + \frac{१}{३} \left( \frac{ह}{क्ष} \right)^3 - \text{इत्यादि} \right) \\ &= म \frac{ह}{क्ष} \text{ फार जवळ, जेव्हां } \frac{ह}{क्ष} \text{ लहान आहे } ३१५ / \\ &\quad \text{पृष्ठ पहा} \end{aligned}$$

अथवा लाग  $(क्ष+ह) = \text{लाग } क्ष + म \frac{ह}{क्ष}$  फार जवळ जवळ, हे समीकरण आणि वरचे (अ) समीकरण हीं एक रूपाची आहेत; यावरून जेव्हां  $ह = १०$  आहेत, तेव्हां जर (अ) जवळ जवळ खरे आहे, तर जेव्हां ह अपूर्णांक आहे, तेव्हां (अ) अगत्य अधिक खरे असावे. यावरून या पक्षांत याप्रमाणे होतें,

$$क्ष = ५१५२० \text{ आणि } \frac{म}{क्ष} \text{ अथवा } \frac{४३४२९४५}{५१५२०} = \cdot 000000\angle 8$$

$$\text{लाग } ५१५२० \frac{१}{२} = \text{लाग } ५१५२० + \cdot 000000\angle 8 \times \frac{१}{२}$$

$$\text{लाग } ५१५२० \cdot ३६ = \text{लाग } ५१५२० + 000000\angle 8 \times \cdot ३६$$

कोष्टकांत या ओळीवर बाकी मांडिली असती, ती या कामासाठी

आहे, कीं जेव्हां साहा किंवा सात स्थळांपर्यंत लाघतम काढायाचे इच्छिले आहे, तेव्हां वरचे समीकरणांत जो गुणाकार करावा लागतो, तो वरें करितां यावा. त्या ओळींत ८४ चे दशांशांचे जवळचे पूर्णांक लिहिले आहेत; जसें,

८४ यांचा एक दशांश = ८.४, याचे जवळचा पूर्णांक = ८ आहे

८४ यांचे दोन दशांश = १६.८ ..... १७ आहे

८४ यांचे तीन दशांश = २५.२ ..... २५ आहे

आणि याप्रमाणें पुढेहि. ८४ चे दशांशांतून एक अंक कापून टाकिल्याने त्यांचे शतांश काढितां येतात, परंतु टाकिलेला अंक ५ अथवा पांचांचे वर असेल, तर बाकीचा अंक एकानें वाढवावा, जसें,

८४ यांचा एक शतांश जवळ जवळ = ८, याचे जवळचा पूर्णांक = १ आहे

८४ यांचे दोन शतांश ..... = १७, याचे जवळचा पूर्णांक = २ आहे

८४ यांचे तीन शतांश ..... = २५, याचे जवळचा पूर्णांक = ३ आहे

आणि या प्रमाणें पुढेहि. यावरून बाक्यांची ओळ पहाण्यानें बाकीचे दशांश आणि शतांश लागलेच कळतात. आतां ३७६ पृष्ठावरचे दुसऱ्या कोष्टकापासून ५१५३९४६ यांचें लाघतम काढितो.

या अंकसंख्येचा लाघतमाचा मान्दिसा, आणि ५१५३९४६ यांचे लाघतमाचा मान्दिसा सारखाच आहे, आणि

$$\begin{aligned} \text{लाग } (५१५३९४६) &= \text{लाग } ५१५३ + ०००००८४ \times ४६ \\ &= \text{लाग } ५१५३९ + ०००००८४ \left( \frac{४}{१०} + \frac{६}{१००} \right) \end{aligned}$$

परंतु

$$०००००८४ \left( \frac{४}{१०} + \frac{६}{१००} \right) = ००००००१ \left( \frac{४}{१०} \times ८४ + \frac{६}{१००} \times ८४ \right)$$

$$\text{कोष्टकांतून} \quad = ००००००१ (३४ + ५)$$

१, ०१, ००१, इत्यादि याणीं, जर कोणताहि पूर्णांक गुणायाचा असेल, तर पूर्णांकाचा एक स्थळींचा अंक दशांशाचे पहिले किंवा दुसरे किंवा तिसरे इत्यादिस्थळीं मांडावा लागतो; यावरून हें होतें,

कोष्टकांतून लाग ५१५३९ यांचा मान्दिसा . . . . = ७१२१३६०  
 ९ चे पुढे जो ४ अंक येतो, त्यासाठी मिळवायाचे . . = ३४  
 आणि ४ चा पुढे जो ६ अंक येतो . . . . . = ५  
 बेरीज = ७१२१३९९

ही बेरीज ५१५३९४६ यांचे लाग्रतमाचा मान्दिसा आहे, आणि ५१५३९४६ यांचा लाग्रतमाचा मान्दिसाहि तोच आहे; या-मुळे, या शेवटील अंकाला योग्य गुणप्रकाशक लावला असता, याप्रमाणे होईल

$$\text{लाग } ५१५३९४६ = १७१२१३९९$$

तसेच रितीवरून, ही पुढील उदाहरणे निघतात,

लाग ५१५२७४८?		लाग ५१५०००८?	
लाग ५१५२७	१७१२०३४९	लाग ५१५००	०७११८०७२
४	३४	०	००
८	७	८	७
लाग ५१५२७४८	१७१२०६९०	लाग ५१५०००८	०७११८०७९

लाग ५१५२७६८०००?		लाग ००००५१५४८९९	
लाग ५१५२७०००००	१७१२०३४९	लाग ००००५१५४८	५७१२२११८
६	५०	९	७६
८	७	९	८
लाग ५१५२७६८०००	१७१२०४०६	लाग ००००५१५४८९९	५७१२२२०२

या प्रश्नाचे उलटें या पुढीलप्रमाणे करितात; मनांत आण, कीं १७११८३६६ या लाग्रतमाचा बरोवरीची अंकसंख्या कोष्टकांतून काढायाची आहे. गुणप्रकाशक सोडून कोष्टकांतून जो मान्दिसा ७११८३६६ यांचे जवळ असून, त्याहून कमी आहे त्यास शोधून काढितों. तर दिसण्यांत येतें, कीं तो मान्दिसा ७११८३२५ हा आहे, याची अंकसंख्या ५१५०३ आहे; यावरून अर्थ अंकांविषयी इच्छिलेली अंकसंख्या ५१५०३ यांपासून एक एकमाचे आंत इतकी आहे. तो इच्छिला अंक ५१५०३+६ असा घे, तर ठाऊक आहे, कीं ह असा घेतला पाहिजे, कीं



$$\text{लाग } (५१५०३+ह) = ४^{\circ}७११८३६६$$

परंतु ३८२ पृष्ठावरून

$$\text{लाग } (५१५०३+ह) = \text{लाग } ५१५०३ + ००००००८४ \times ह \text{ फार जवळ.}$$

$$= ४^{\circ}७११८३२५ + ००००००८४ \times ह$$

यावरून,

$$ह = \frac{४^{\circ}७११८३६६ - ४^{\circ}७११८३२५}{००००००८४} = \frac{०००००४१}{००००००८४} = \frac{४१}{८४}$$

आतां, कोष्टकांतल्ये बाकीचे ओळींत पहाण्यांत येतें, कीं

३४ हे ८४ चे  $\frac{४}{१०}$  चे जवळ आहेत,

७६ हे ८४ चे  $\frac{१०}{१०}$  अथवा,

७ हे ८४ चे  $\frac{१००}{१००}$  चे जवळ आहेत;

ह्याणून ३४+७ अथवा ४१ हे ८४ चे  $\frac{४}{१०} + \frac{१०}{१००}$ ; ह्याणजे  $\frac{४१}{८४} = ह$ ;

यावरून  $५१५०३ + ह = ५१५०३ + ४८$  आणि

$४^{\circ}७११८३६६$  हें  $५१५०३ \cdot ८४$  यांचें लाग्रतम आहे

$५^{\circ}७११८३६६$  हें  $५१५०३ \cdot ८४$  यांचें लाग्रतम आहे

परंतु लाग्रतम काढण्याची जी रीति आहे, तिचे उलट कृती के-  
ल्याने व्यवहार कामासाठीं फार सोईस पडतें. आतां कोष्टकाचे दुसऱ्ये  
भागांतून एक उदाहरण सांगतों.

२१७४८३६ यांचें लाग्रतम काय आहे.

$$\text{लाग } २१७४८ \quad (*) \quad ५३३७४१९३$$

$$\begin{array}{r} ३ \qquad \qquad \qquad ६० \\ ६ \quad (+) \qquad \qquad १२ \\ \hline \text{लाग } २१७४८३६ = ५३३७४२६५ \end{array}$$

\* पहा यांत एकदांय गुणप्रकाशक मांडिला आहे.

+ पूर्वीप्रमाणे, एथें ६चे समोर पाहिलें असतां, १२० दिसतात, त्यांतून एक अंक सोडून  
देतो.

५. ३३७४२६५ या लाग्रतमाचा बरोबरीची अंक संख्या काय आहे?

कोष्टकांत यांचे जवळचें लातग्रम	}	३३७४२६५
जाची अंकसंख्या		३३७४१९३
		७२

कोष्टकांत अंतरांचे ओळीत, या बाकीचे जवळचा अंक

जाचे समोर ३ आहेत . . . . . ६०  
१२०

बाकीवर ० मांड, कांकीं एक अंक सोडिला होता, यामुळे एक अंक, वर मांडिला पाहिजे, परंतु तो अंक कोणता हें माहित नाही. कोष्टकांत १२० यांचे समोर ६ हा अंक आहे.

यामुळे ५ गुणप्रकाशक आहे ह्यापून दशांश चिन्हा पूर्वी ६ अंकस्थले असावी, तर सांगितलेल्या लाग्रतमाचा बरोबरीचा इच्छिला अंक २१७४८३.६ आहे.

१. कोष्टकांतील बाकीची ओळ एकदां कामांत आणिल्यानंतर, शेवटीं जी वजाबाकी येती तिला, एक अंक कशासाठी जोडिला पाहिजे. २. तो अंक काय आहे हें कशासाठी समजू शकत नाही. ३. खरें होईल असे कशानें घडेल. जर कित्येक लाग्रतमें काढून नंतर प्रत्येकाची उलट कृती केली तर, ही गोष्ट शिकणाराचे मनांत अधिक ठसेल. ११५ आणि १२५ जांचें मध्यप्रमाण १२० आहे त्यांचे कोष्टकांतील वजाबाकीचें उत्तर कदाचित् वर निघालेलें १२, असेल. वरचे कृतीचीं ही पुढील उदाहरणें आहेत.

\* याविषयी जें पुढें येईल तें पहा.



२११८३२१४ आणि १९६४८३१७ या लाग्रतमाचा अंकसंख्या काय आहेत?

११८३२१४	
१३१३१	११८२९७८
	<u>२३६</u>
७	२३२
	<u>४०</u>
१	३३

उत्तर. ०१३१३१७१

१९६४८३१७	
९२२२१	१९६४८२९८
	<u>१९</u>
४	१९
	<u>०</u>

उत्तर. ९२२२१४०

२९ असे तहेचे परिमाणाचे गुणाकार आणि भागाकार शिकणा-  
रांस करण्यासाठी कदाचित् येतील. या परिमाणस ५नी गुणायचे  
असेल, तर जे हातचे येतील ते बीजगणिताचे मिळवणीचे रितीप्रमाणे  
ऋण परिमाणास मिळीव. जसे, ५वेळा ९हे ४५, यावरचे ५ मांडून  
हाती ४ घे; ५वेळा -२ हे -१० आहेत, आणि ४ मिळून -६ हो-  
तात, तर ६५ हे उत्तर आहे. अथवा

$$५(९-२)=४५-१०=४-१०+५=६५$$

२९ यांस ५नी भागायचे असेल, तर ऋण पद ५नी भागिले जाई  
असे कर, आणि तितक्याने पदाची बाकी वाढवून नीट कर. जसे,  
२९ हे ५+३९ आहेत, आणि

$$\frac{२९}{५} = \frac{५}{५} + \frac{३९}{५} = १ + ७.८ = ८.८$$

ही पुढील काही दुसरी उदाहरणे आहेत;

$$\begin{array}{r} ३४६ \\ ८ \\ \hline ६)२१६८ \\ \hline ४६१३ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} १४१७ \\ १० \\ \hline ५)६१७० \\ \hline २८३४ \end{array}$$

गुणाकार आणि भागाकार यांविषयी लाग्रतम कामांत आणण्याची  
ही पुढील उदाहरणे देतो. ५७२९५७८ यांस २०६२६४८ याणी

गुणिले असतां, आणि तो गुणाकार ७८५३९८२ यांणीं भागिला असतां, नंतर भागाकाराचा नऊ घात केला असतां, आणि त्या घाताचे दश-घात मूळ काढिले असतां, उत्तर काय येईल? अथवा हें पुढील काय होईल,

$$\left\{ \frac{572957 \times 2062687}{7853982} \right\}^{\frac{9}{10}}$$

लाग ५७२९५७	१०७५८१२२६
लाग २०६२६८७	१३१४४२५१
	बेरीज १०७२५४७७
लाग ७८५३९८२	६८९५०८९९
	वजावाकी ६१७७४५७८
	९
१०)	५३५९७१२०२
	६७५९७१२०
५७५०५	७५९७०५६
	६४
८	६०
	४०
५	३८

उत्तर,

$$0000005750575$$

शिकणारानें अभ्यासाकरितां या पुढीलप्रमाणें समीकरणाची सत्यता दाखवायासाठीं उदाहरणें करावीं, ह्मणजे जसा अ (अ+ब)=अ<sup>२</sup>+अब, जांत अ आणि ब कांहीं अंक असतील. अ आणि अ+ब यांचीं लाघतमें मिळवून त्यापासून अ(अ+ब) यांची किंमत निघती, आणि त्यापासून अ<sup>२</sup> आणि अब यांची निराळी किंमत काढावी; आणि जर सगळी कृती शुद्ध केली असेल, तर शेवटील पदांची बेरीज पहिल्या पदाचे बरोबर, होईल.

$$(अ+ब)(अ-ब) = अ^2-ब^2$$

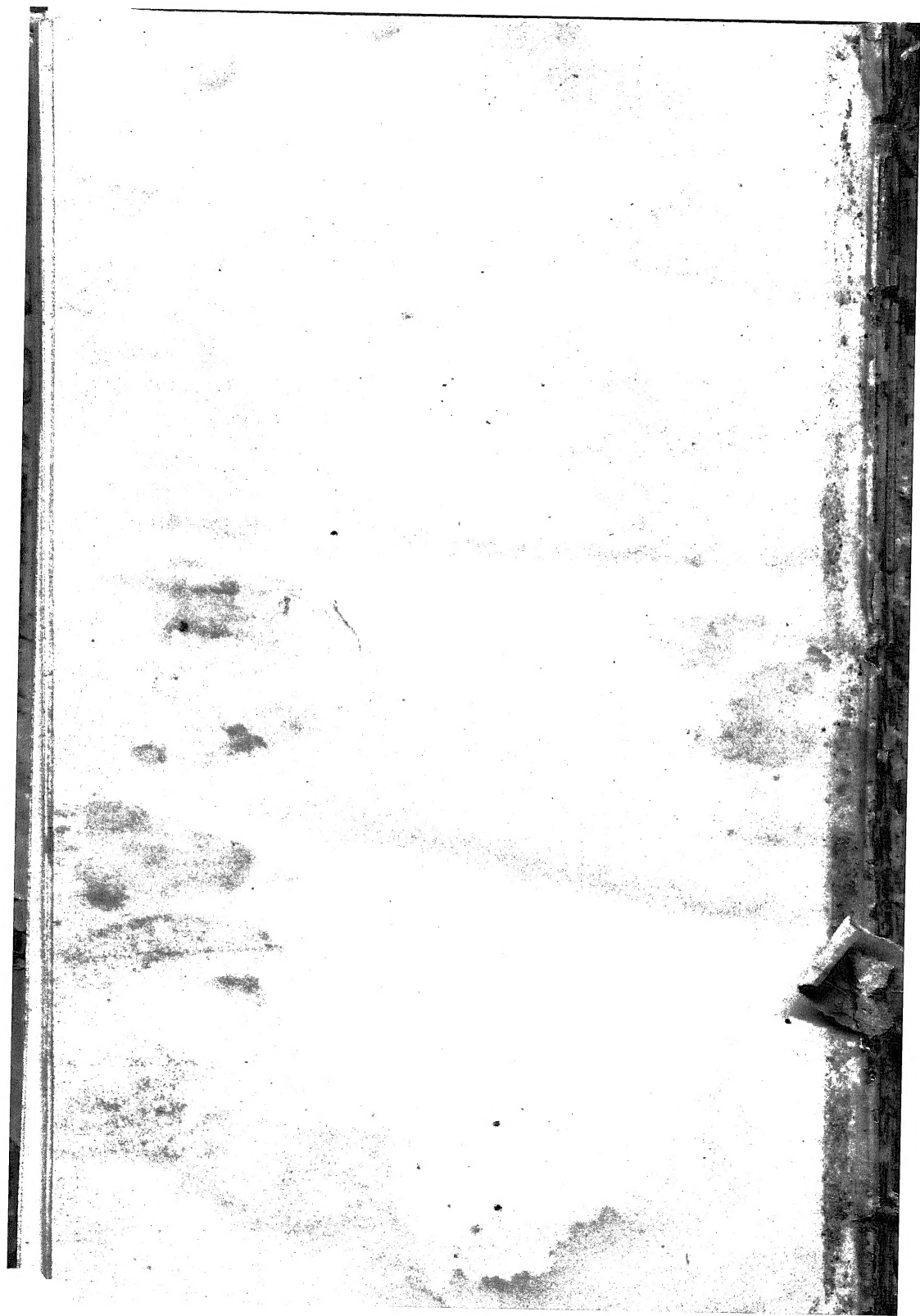
$$\sqrt{अ ब} = \sqrt{अ} \times \sqrt{ब}$$

$$(अब)^{\frac{म}{न}} = अ^{\frac{म}{न}} \times ब^{\frac{म}{न}}$$

लाघतमानें चुकीवांचून काम करणें याविषयीं शिकणारा केवळ अभ्यासानें मात्र निपुण होईल, आणि व्यवहारांतील जे सर्व पक्ष येतात त्यांचीं विस्ताररूप उदाहरणें लाघतमाविषयीं चा पुस्तकांत आहेत.

समाप्त.





## शुद्धिपत्र.

पृष्ठ	ओळ	अशुद्ध	शुद्ध
१४	८		
१४	१७	पद्धती	पद्धति
२१	१४		
२२	६	रिती	रीति
२४.	१४	पद्धती	पद्धति
३४	८	अ+ब)(क-ड)	(अ+ब)(क-ड)
४१	२२	मागाकार	भागाकार
४६	४	$\frac{२अअ+अब}{अ+ब}$	$\frac{२अअ+बब}{अ+ब}$
७९	२१	समीकरणाचें	समीकरणाचें
८९	२३	पाण्याचें	पाण्याचें
९६	१७	-४०(-क्ष)	-४०(९-क्ष)
१०६	१५	घोड्याचें	घोड्याचें
१३१	२	-ट+क्ष	-ट+क्ष
१३६	११	तर अ	तर-अ
१४४	१४	३(६०+क्ष)	३(६०+क्ष)
१५५	१४	अक्ष+बय+कक्ष	अक्ष+बय+कक्ष
१६३	५	$\frac{२-४}{२\times २-४\times ४}$	$\frac{२-४}{२\times २-४\times ४}$
२११	१०	$\frac{(-१)^२+२(-१)(\sqrt{-३})+(\sqrt{-३})^२}{४}$	$\frac{(-२)^२+२(-१)(\sqrt{-३})+(\sqrt{-३})^२}{४}$
२१६	१०	(अ+√य) <sup>२</sup>	(क्ष+√य) <sup>२</sup>
२१८	२२	अद्यापि	अद्यापि
२२२	११	(प <sup>-२</sup> कर <sup>-१</sup> ) <sup>३</sup>	(प <sup>-२</sup> कर <sup>-१</sup> ) <sup>-३</sup>
२२३	७	√३	√३
२२४	११	आद्यापि	अद्यापि
२२६	५	दर्शावयाची	दर्शावयाची
२५३	५	$\frac{-(प^२+क^२)+\sqrt{५प^४-४प^२क+२प^२क^२+क^४}}{२प-क}$	$\frac{-(प^२+क^२)+\sqrt{५प^४-४प^२क+२प^२क^२+क^४}}{२(प-क)}$
२७३	८	याण्यायाला	आण्यायाला

पृष्ठ	ओळ	अशुद्ध	शुद्ध
३०२	१९	(अ)-क्ष <sup>३</sup> (व)	(अ)=क्ष <sup>३</sup> (व)
३१८	२२	च	चे
३१८	२९	सात	सांत
३२०	४	घ	घे
३२२	१७	$१ \div १ + क्ष^२$	$१ \div (१ + क्ष^२)$
३२२	१९	$\frac{१}{१ + क्ष^२}$	$\frac{१}{१ + क्ष^२}$
३२३	२३	$(\frac{मक}{प^३} - \frac{कन}{प^२})क्ष^२$	$(\frac{मक}{प^३} - \frac{कन}{प^२})क्ष^२$
३२७	१९	+ होतो	१ होतो
३२८	१५	$(क्ष-क्ष^२+१)$	$क्ष^२-क्ष+१$
३२८	१९	$= \frac{क्ष}{क्ष-१}$	$= \frac{क्ष}{१-क्ष}$
३२८	२३	$= \frac{क्ष-१}{क्ष-१}$	$= \frac{१-क्ष^२}{१-क्ष}$
३३३	२०	$= \frac{१}{१-क्ष}$	$= \frac{१}{१-क्ष}$
३३५	१०	चिन्ह	चिन्ह
३३६	२	व	व
३५१	१७	अपूर्णांक	पूर्णांक
३५७	४	फाकटर	फाकटर
३६७	७	फ(क्ष-य)	फ(क्ष+य)
३६७	२०	-२अ <sub>३</sub> व	-२अ <sub>३</sub> व <sup>३</sup>
३६८	१३	$\frac{क्ष^३}{२.३.४} - \frac{क्ष^४}{२.३.४.५.६}$	$\frac{क्ष^३}{२.३.४} - \frac{क्ष^४}{२.३.४.५.६}$
३६९	१४	०२क्ष	०(२क्ष)
३७५	१	लागवक्ष	लागवक्ष
३८३	२०	लाग ५१५३+	लाग ५१५३९+
३८५	२२	लाग २१७४८३६	लाग २१७४८३६